



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

**Учебно-методическое пособие**  
по выполнению контрольной работы  
студентами заочной формы обучения,  
изучающих сокращенный курс дисциплин

**«Сопротивление материалов» и  
«Техническая механика»**

Авторы  
Еремин В.Д.,  
Стрельников Г.П.,  
Языев Б.М.

Ростов-на-Дону, 2024

## Аннотация

Учебно – методическое пособие содержит индивидуальные данные, расчетные схемы и вопросы для самопроверки к задачам, входящим в контрольную работу, примеры решения задач контрольной работы с основными теоретическими положениями, список рекомендуемой при подготовке к выполнению работы литературы.

Учебно – методическое пособие предназначено для студентов – заочников всех направлений подготовки (специальностей), изучающих сокращенный курс дисциплин «Сопротивление материалов» и «Техническая механика», при самостоятельном выполнении контрольной работы, при проведении преподавателями практических занятий и контрольных работ.

Содержание пособия соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования и «Примерной программе дисциплины «Сопротивление материалов», Москва, 2012 год», рекомендованной учебно – методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области строительства.

## Авторы

к.т.н., профессор кафедры «Сопротивление материалов»  
Еремин В.Д.

к.ф.-м. н., доцент кафедры «Сопротивление материалов»  
Стрельников Г.П.

д.т.н., профессор кафедры «Сопротивление материалов»  
Языев Б.М.



## Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	<b>4</b>
<b>Раздел 1. Контрольная работа</b> .....	<b>5</b>
<b>Раздел 2. Индивидуальные исходные данные и расчетные схемы задач</b> .....	<b>6</b>
2.1. Методические указания о порядке выполнения контрольной работы .....	6
2.2. Задача №1. Расчет центрально растянутых (сжатых) стержней на прочность .....	6
2.3. Задача №2. Геометрические характеристики плоских фигур .....	9
2.4. Задача №3. Расчет балок на прочность .....	10
2.5. Задача №4. Внецентренное сжатие короткого стержня .....	13
2.6. Задача №5. Устойчивость центрально сжатого стержня .....	16
<b>Раздел 3. Основные теоретические положения и примеры решения задач контрольной работы</b> .....	<b>18</b>
3.1. Тема 1. Центральное растяжение и сжатие.....	18
3.2. Тема 2. Геометрические характеристики плоских фигур .....	29
3.3. Тема 3. Расчет балок на прочность при плоском поперечном изгибе.....	49
3.4. Тема 4. Сложное сопротивление .....	88
3.5. Тема 5. Устойчивость центрально сжатых стержней. ....	107
<b>Рекомендуемая литература</b> .....	<b>116</b>
<b>Приложение 1 Образец оформления титульного листа контрольной работы</b> .....	<b>117</b>
<b>Приложение 2 Справочные таблицы для выполнения контрольных работ и практических занятий по дисциплинам «Сопротивление материалов» и «Техническая механика»</b> .....	<b>118</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Сопротивление материалов (Техническая механика) – наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкций.

Инженеру любой специальности часто приходится производить расчеты на прочность элементов конструкций. Самая незначительная, на первый взгляд, ошибка в расчетах может повлечь за собой очень тяжелые последствия – привести конструкцию к разрушению. При проведении расчетов на прочность необходимо стремиться к сочетанию наибольшей надежности работы конструкции с наименьшим расходом материала.

Учебно – методическое пособие предназначено для студентов – заочников всех направлений подготовки (специальностей), изучающих сокращенный курс учебных дисциплин «Сопротивление материалов» и «Техническая механика».

Большое значение в закреплении как теоретических, так и практических знаний по курсам «Сопротивление материалов» и «Техническая механика» имеет самостоятельная работа студентов – заочников, в том числе и выполнение ими контрольных работ. В течение каждого семестра студент – заочник выполняет одну – две контрольные работы, предусмотренные учебным планом направления подготовки. В отличие от домашних задач, для решения каждой из которых обычно достаточно знаний в объеме одной темы, выполнение контрольной работы требует знания нескольких разделов курса.

Учебно – методическое пособие представляет собой краткое изложение теоретического материала с систематизированной подборкой задач и их решениями по основным разделам сокращенного курса учебных дисциплин «Сопротивление материалов» и «Техническая механика».

Все задачи контрольной работы имеют большое число равных по трудоемкости вариантов, что позволяет каждому студенту – заочнику получать индивидуальные исходные данные.

## РАЗДЕЛ 1. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

### Общие методические указания по выполнению контрольной работы

- Содержание контрольной работы, индивидуальные шифры студентов для выбора исходных данных задач сообщаются преподавателем в начале учебного года (семестра).
- Нельзя приступать к решению задач, не разобравшись досконально по учебникам в теории, связанной с выполнением контрольной работы, пока не будет полной ясности в том, что и как надо сделать. После изучения каждой темы надо обязательно ответить на вопросы для самопроверки – это способствует лучшему усвоению пройденного материала.
- Все расчеты необходимо вести очень четко и аккуратно, с предельной внимательностью, сначала в общем виде, затем в числах.
- Необходимо использовать все средства для самоконтроля правильности выполненной части работы. Такие возможности, как правило, имеются на каждом этапе расчета.
- Расчет на всех его этапах надо сопровождать необходимыми схемами, рисунками и графиками (построением эпюр), выполненными с обязательным соблюдением масштабов.

Графическое оформление помогает не только произвести расчет, но и облегчает его просмотр с целью ознакомления с ним или для контроля правильности выполненного этапа работы.

- Все вычисления, как правило, достаточно производить с точностью до третьей значащей цифры.
- Чистовой вариант контрольной работы предъявляется к защите в виде аккуратно оформленной и сброшюрованной пояснительной записки (в тетради обычного формата) с титульным листом, исходными данными, всеми необходимыми расчетами, схемами и чертежами.

## РАЗДЕЛ 2. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ ЗАДАЧ

### 2.1. Методические указания о порядке выполнения контрольной работы

- Исходные данные для решения задач выбираются студентом из таблиц вариантов в соответствии с его личным шифром (номером зачетной книжки).

Шифром считаются три последние цифры, например, если номер зачетной книжки – 27306, то учебным шифром будет 306. Каждая таблица вариантов разделена на три части. Для получения исходных данных надо выписать из таблицы три строки: первая строка отвечает первой цифре шифра, вторая строка отвечает второй (средней) цифре и третья строка – последней (третьей) цифре шифра. Например, для номера зачетной книжки 27306 при решении первой задачи, согласно табл. 1, получим следующие исходные данные:  $a = 2,3\text{м}$ ;  $b = 3\text{м}$ ;  $N^{\circ} \text{схемы} = 6$ ;  $A = 20\text{см}^2$ ;  $c = 2,6\text{м}$

- В заголовке контрольной работы должны быть четко написаны: название дисциплины, фамилия, имя и отчество студента, наименование направления (специальности) и профиль подготовки, учебный шифр и точный почтовый адрес.

- Контрольная работа выполняется в тетради обычного формата.

- Перед решением каждой задачи необходимо выписать полностью ее условие с числовыми данными, составить аккуратный эскиз с соблюдением масштабов и указать на нем в числах все величины, необходимые для расчета.

- После проверки контрольной работы студент должен исправить в ней отмеченные преподавателем ошибки и выполнить все сделанные указания.

Исправления должны быть вложены в соответствующие места рецензированной работы.

### 2.2. Задача №1. Расчет центрально растянутых (сжатых) стержней на прочность

**Абсолютно жесткий брус прикреплен к трем стержням при помощи шарниров (табл. 2).**

**Требуется:**

1. Определить усилия в стержнях, выразив их через силу  $F$ .
2. Найти допускаемую нагрузку  $[F]$ , приняв допускаемое нормальное напряжение на сжатие  $[\sigma_c] = 160\text{МПа}$ , а на растяжение –  $[\sigma_p] = 100\text{МПа}$ .
3. Определить напряжения в стержнях, приняв  $F = [F]$ .

Исходные данные для решения задачи выбрать из **таблицы 1** в соответствии с личным шифром.

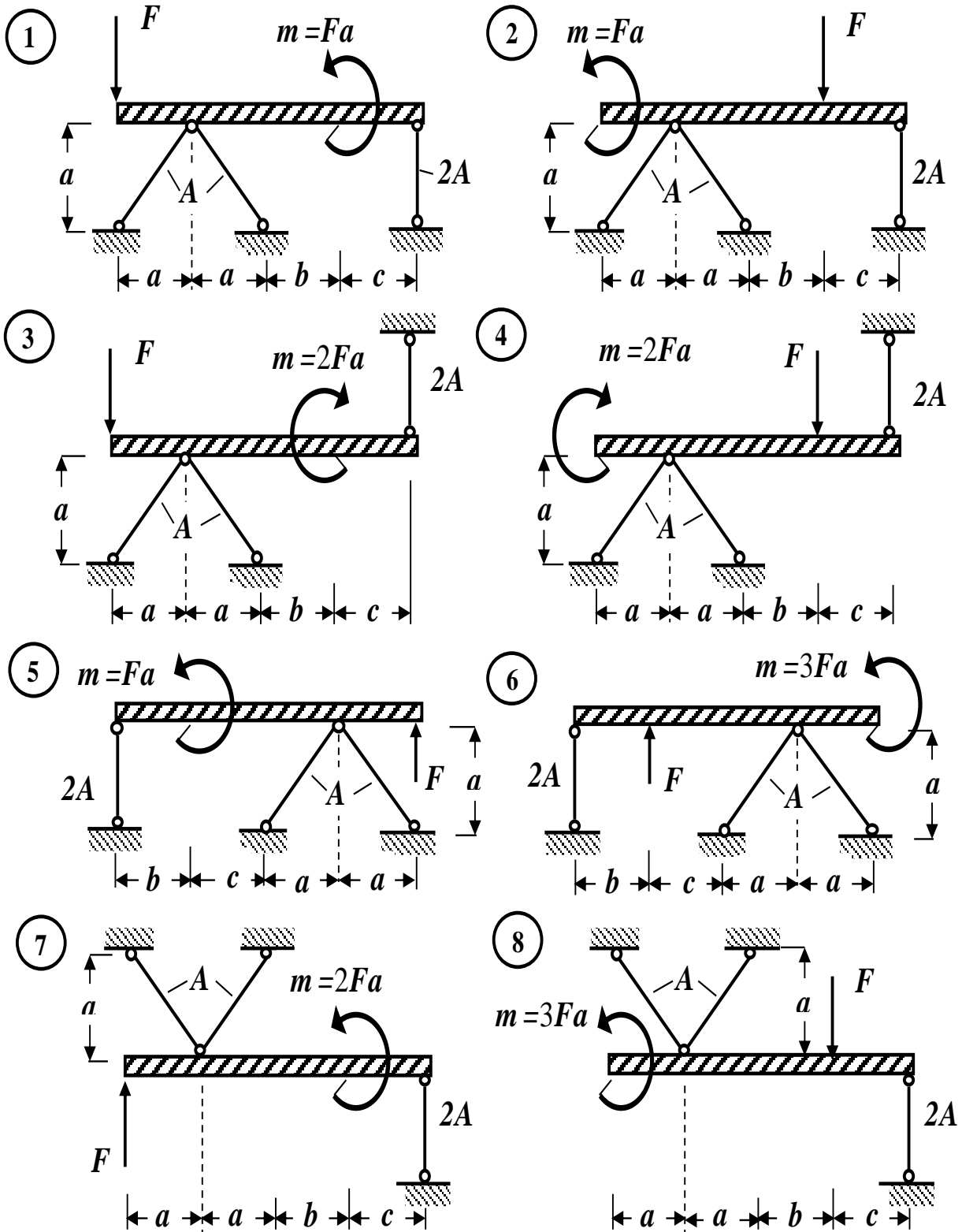
Таблица 1

## Исходные данные

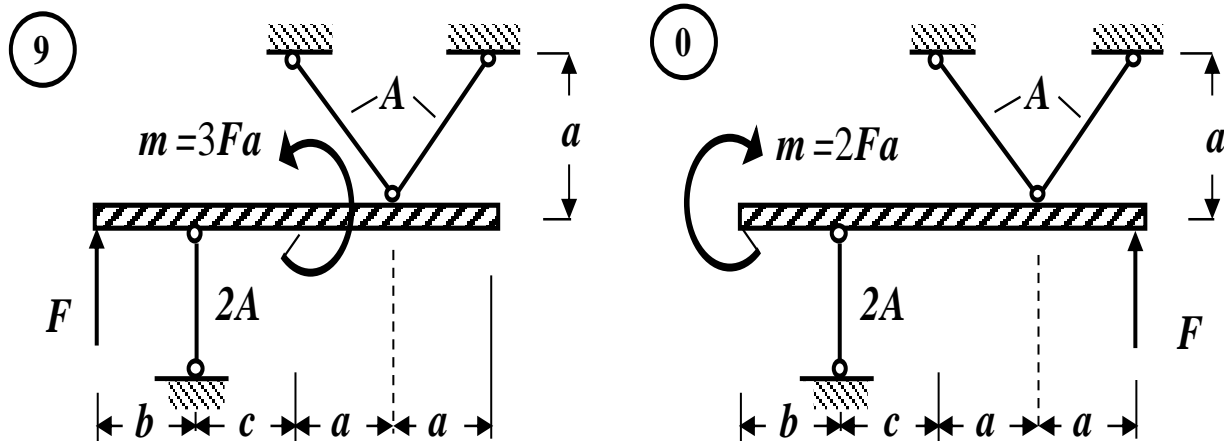
Первая цифра шифра	$a, \text{ м}$	Вторая цифра шифра	$b, \text{ м}$	Третья цифра шифра (№ схемы)	$A, \text{ см}^2$	$c, \text{ м}$
<b>1</b>	2,1	<b>1</b>	2,1	<b>1</b>	10	2,1
<b>2</b>	2,2	<b>2</b>	2,2	<b>2</b>	12	2,2
<b>3</b>	2,3	<b>3</b>	2,3	<b>3</b>	14	2,3
<b>4</b>	2,4	<b>4</b>	2,4	<b>4</b>	16	2,4
<b>5</b>	2,5	<b>5</b>	2,5	<b>5</b>	18	2,5
<b>6</b>	2,6	<b>6</b>	2,6	<b>6</b>	20	2,6
<b>7</b>	2,7	<b>7</b>	2,7	<b>7</b>	22	2,7
<b>8</b>	2,8	<b>8</b>	2,8	<b>8</b>	24	2,8
<b>9</b>	2,9	<b>9</b>	2,9	<b>9</b>	26	2,9
<b>0</b>	3,0	<b>0</b>	3,0	<b>0</b>	28	3,0

Таблица 2

## Схема задачи







### 2.3. Задача №2. Геометрические характеристики плоских фигур

Для заданного сложного поперечного сечения, состоящего из двух элементов (табл.2), требуется:

1. Выписать (вычислить) для элементов, входящих в состав сложного поперечного сечения, исходные данные из справочных таблиц (сортаментов).
2. Определить положение центра тяжести заданного сложного поперечного сечения. Построить произвольные центральные оси.
3. Найти величины осевых и центробежного моментов инерции заданного сложного поперечного сечения относительно центральных осей.
4. Определить направление главных центральных осей.
5. Найти величины осевых моментов инерции заданного сложного поперечного сечения относительно главных центральных осей.
6. Вычертить заданное сложное поперечное сечение в масштабе на миллиметровке формата А4 и указать все размеры в числах и все оси.

Исходные данные для решения задачи выбрать из **таблицы 1** в соответствии с личным шифром.

**Таблица 1**

**Исходные данные**

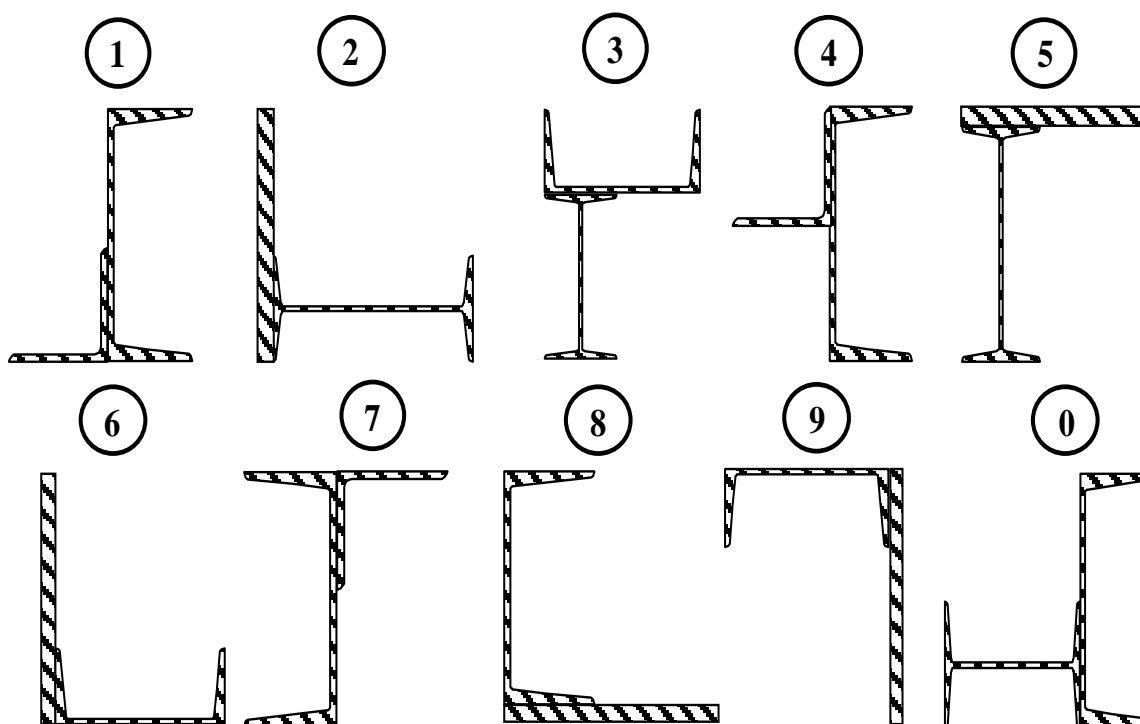
Первая цифра шифра	Двутавр	Вторая цифра шифра	Швеллер	№ сечения	Третья цифра шифра (№схемы)	Пластина мм×мм	Равнополочный уголок
1	2	3	4	5	6	7	8
1	16	1	18	1	1	10	6
2	18	2	18а	2	2	12	4
3	18а	3	20	3	3	14	2
4	20	4	20а	1	4	16	8

Окончание табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8
5	20а	5	22	2	5	18	6
6	22	6	22а	3	6	20	4
7	22а	7	24	1	7	22	8
8	24	8	24а	2	8	24	6
9	24а	9	27	1	9	26	4
0	16	0	20	2	0	28	2

Таблица 2

Схема поперечного сечения



### 2.4. Задача №3. Расчет балок на прочность

Для заданных двух расчетных схем балок (табл. 2) требуется:

1. Определить опорные реакции.
2. Для каждого участка балки составить выражения поперечных сил ( $Q$ ) и изгибающих моментов ( $M$ ). Построить их эпюры.
3. Сделать проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балки.
4. Определить опасные сечения балки по нормальным и касательным напряжениям.
5. Из условия прочности по методу допускаемых нормальных напряжений при изгибе подобрать:
  - а) для схемы (а) деревянную балку круглого поперечного сечения, приняв допустимое нормальное напряжение  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ ;

б) для схемы (б) стальную балку двутаврового поперечного сечения, приняв допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

6. Проверить прочность подобранных балок по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений.

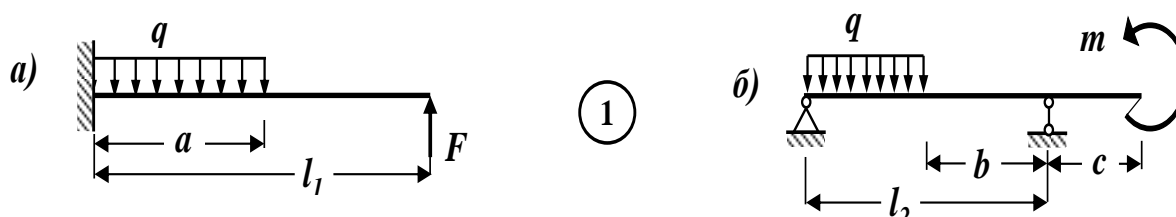
7. Проверить прочность подобранных балок по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений, приняв для схемы (а) допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 2 \text{ МПа}$ , а для схемы (б) допускаемое касательное напряжение  $[\tau] \approx 0,6 \cdot [\sigma]$ .

8. Для опасных сечений балок построить эпюры нормальных и касательных напряжений по высоте поперечного сечения.

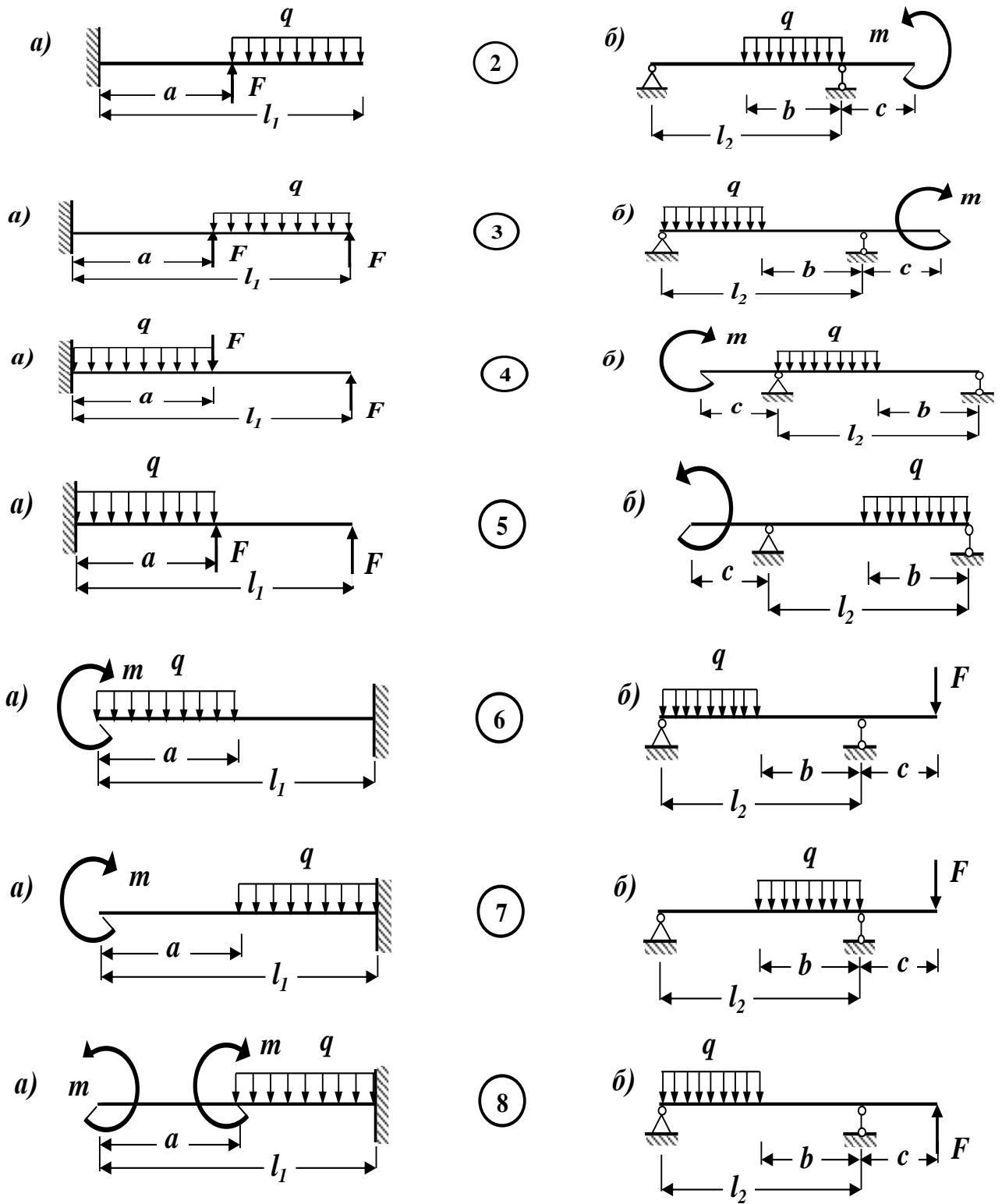
Исходные данные для решения задачи выбрать из **таблицы 1** в соответствии с личным шифром.

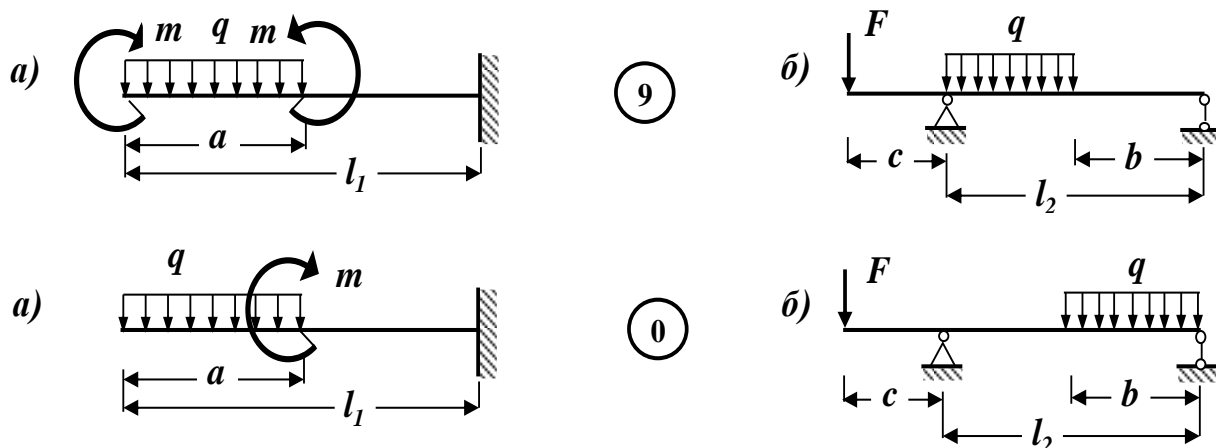
**Таблица 1**
**Исходные данные**

Первая цифра шифра	$m$ , кНм	$\frac{a}{l_1}$	Вторая цифра шифра	$F$ , кН	$l_1$ , м	$\frac{b}{l_2}$	Третья цифра шифра (№ схемы)	$q$ , кН/м	$l_2$ , м	$\frac{c}{l_2}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	10	0,3	1	3	1,1	0,3	1	3	3	0,3
2	11	0,4	2	4	1,2	0,4	2	4	4	0,4
3	12	0,5	3	5	1,3	0,5	3	5	5	0,5
4	13	0,6	4	6	1,4	0,6	4	6	6	0,6
5	14	0,7	5	7	1,5	0,7	5	7	7	0,7
6	15	0,3	6	8	1,6	0,3	6	8	3	0,3
7	16	0,4	7	9	1,7	0,4	7	9	4	0,4
8	17	0,5	8	10	1,8	0,5	8	10	5	0,5
9	18	0,6	9	11	1,9	0,6	9	11	6	0,6
0	19	0,7	0	12	2,0	0,7	0	12	7	0,7

**Таблица 2**
**Расчетные схемы балок**


## Продолжение табл. 2





### 2.5. Задача №4. Внецентренное сжатие короткого стержня

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого приведено в таблице 2, сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в точке  $K$ .

Требуется:

1. Вычислить величины наибольших растягивающих и сжимающих напряжений в поперечном сечении, выразив величины этих напряжений через  $F$ .
2. Из условий прочности найти допускаемую нагрузку  $[F]$  при заданных значениях допускаемых нормальных напряжений для чугуна на сжатие  $[\sigma_c]$  и на растяжение  $[\sigma_p]$ .

Исходные данные для решения задачи выбрать из **таблицы 1** в соответствии с личным шифром.

Таблица 1

Исходные данные

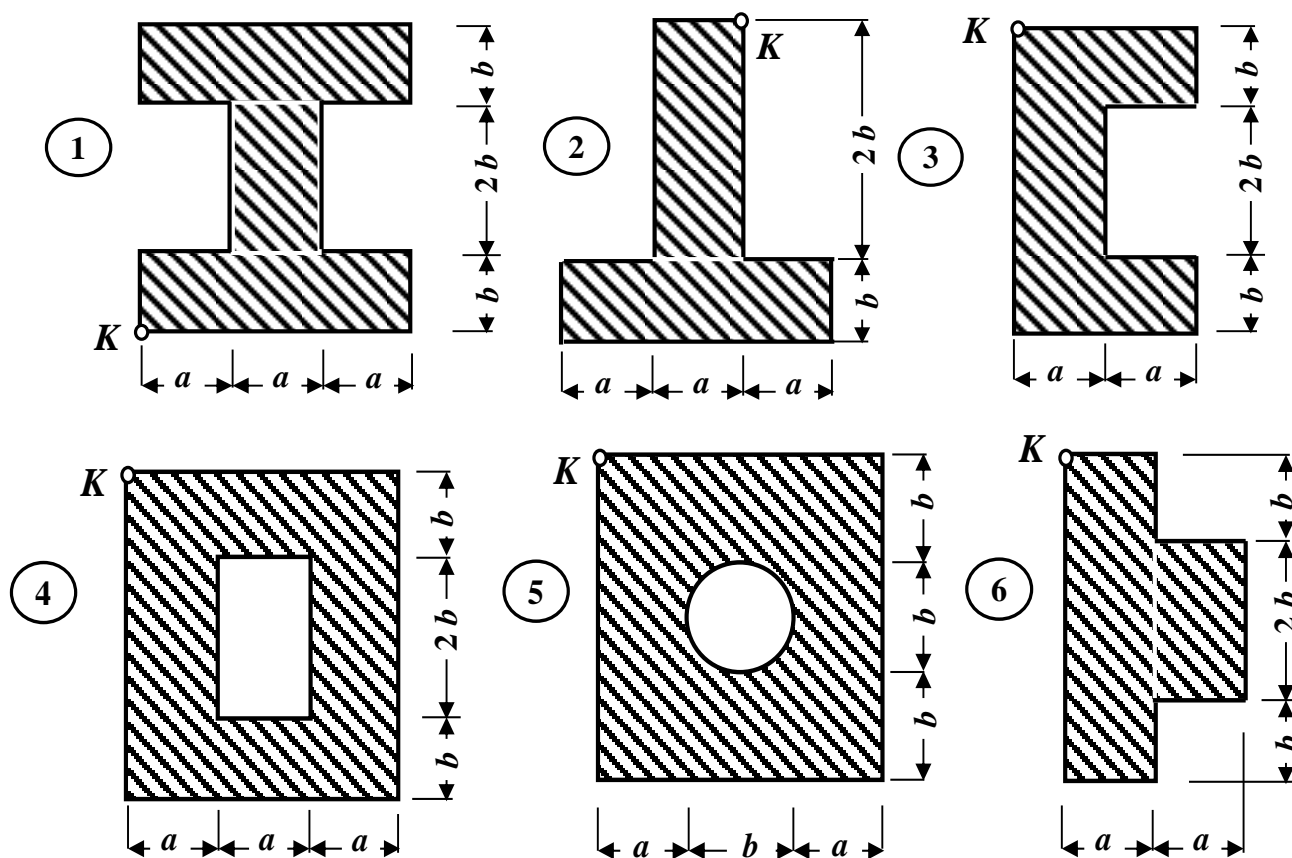
Первая цифра шифра	$a$ , см	Вторая цифра шифра	$[\sigma_c]$ , МПа	Третья цифра шифра (№ схемы)	$b$ , см	$[\sigma_p]$ , МПа
1	2	3	4	5	6	7
1	2,1	1	110	1	2,1	21
2	2,2	2	120	2	2,2	22
3	2,3	3	130	3	2,3	23
4	2,4	4	140	4	2,4	24
5	2,5	5	150	5	2,5	25
6	2,6	6	60	6	2,6	26

Окончание табл. 1

1	2	3	4	5	6	7
7	2,7	7	70	7	2,7	27
8	2,8	8	80	8	2,8	28
9	2,9	9	90	9	2,9	29
0	3,0	0	100	0	3,0	30

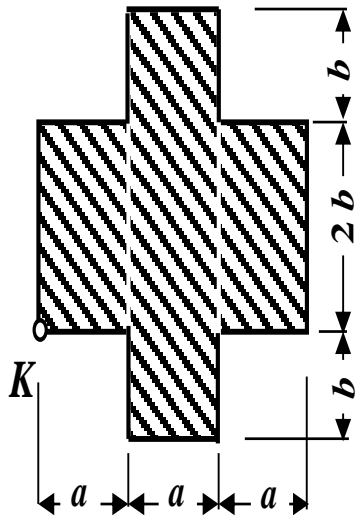
Таблица 2

## Схемы поперечных сечений

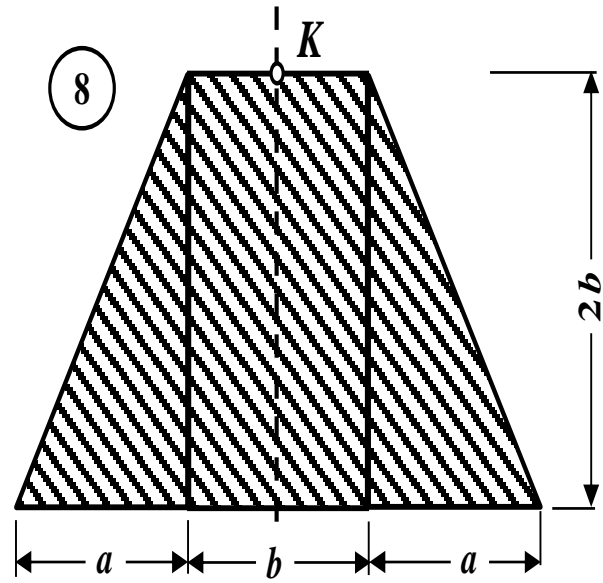


Окончание табл. 2

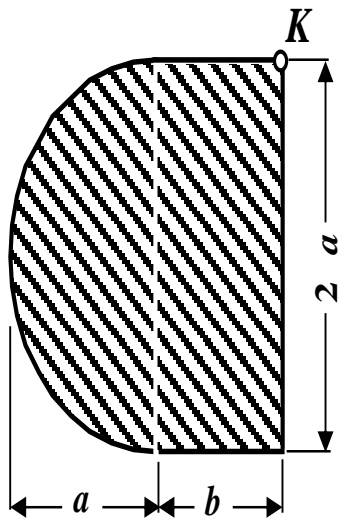
7



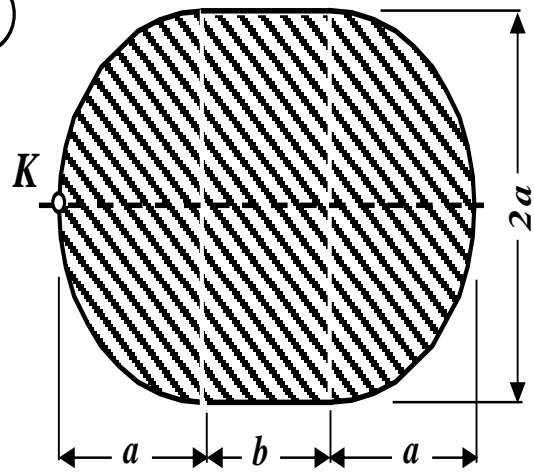
8



9



0



## 2.6. Задача №5. Устойчивость центрально сжатого стержня

Стальной стержень длиной  $l$  сжимается силой  $F$  (табл.2, 3).

Требуется:

1. Из условия устойчивости подобрать размеры поперечного сечения при допуске нормальном напряжении  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Расчет проводить с помощью метода последовательных приближений, предварительно задавшись величиной коэффициента  $\varphi = 0,5$ .

Если гибкость стойки в первом приближении окажется меньше **50**, необходимо проектную длину стойки увеличить в **2** раза, а при гибкости более **150** – уменьшить в **2** раза.

2. Проверить выполнение условия устойчивости.
3. Определить величину критической силы. Модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .
4. Найти значения допускаемой нагрузки и коэффициента запаса устойчивости.

Исходные данные для решения задачи выбрать из **таблицы 1** в соответствии с личным шифром.

**Таблица 1**

**Исходные данные**

Первая цифра шифра	$F$ , кН	Вторая цифра шифра	$l$ , м	№ схемы за-крепления концов стержня (по табл.2)	Третья цифра шифра	Формы сечения стержня (по табл. 3)
1	2	3	4	5	6	7
1	100	1	2,1	1	1	1
2	200	2	2,2	2	2	2
3	300	3	2,3	3	3	3
4	400	4	2,4	4	4	4
5	500	5	2,5	5	5	5
6	600	6	2,6	6	6	6
7	700	7	2,7	1	7	7
8	800	8	2,8	2	8	8
9	900	9	2,9	3	9	9
0	1000	0	3,0	4	0	0



Таблица 2

Расчетная схема закрепления концов стержня

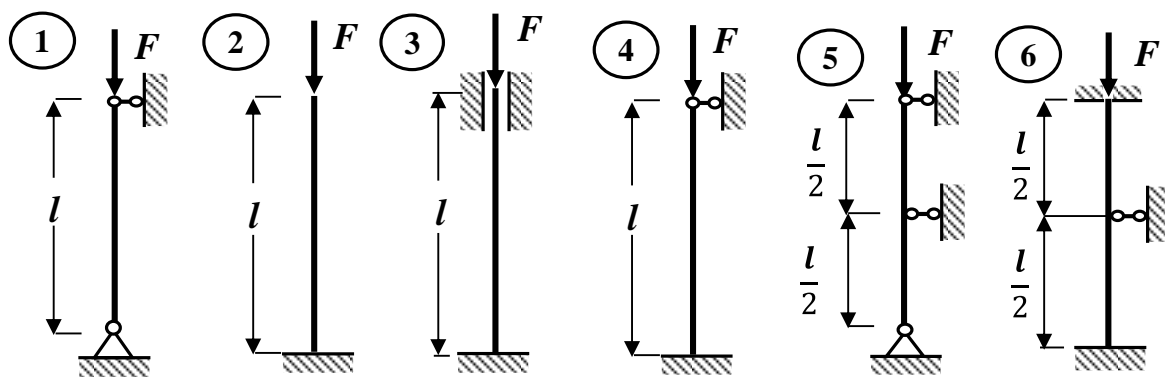
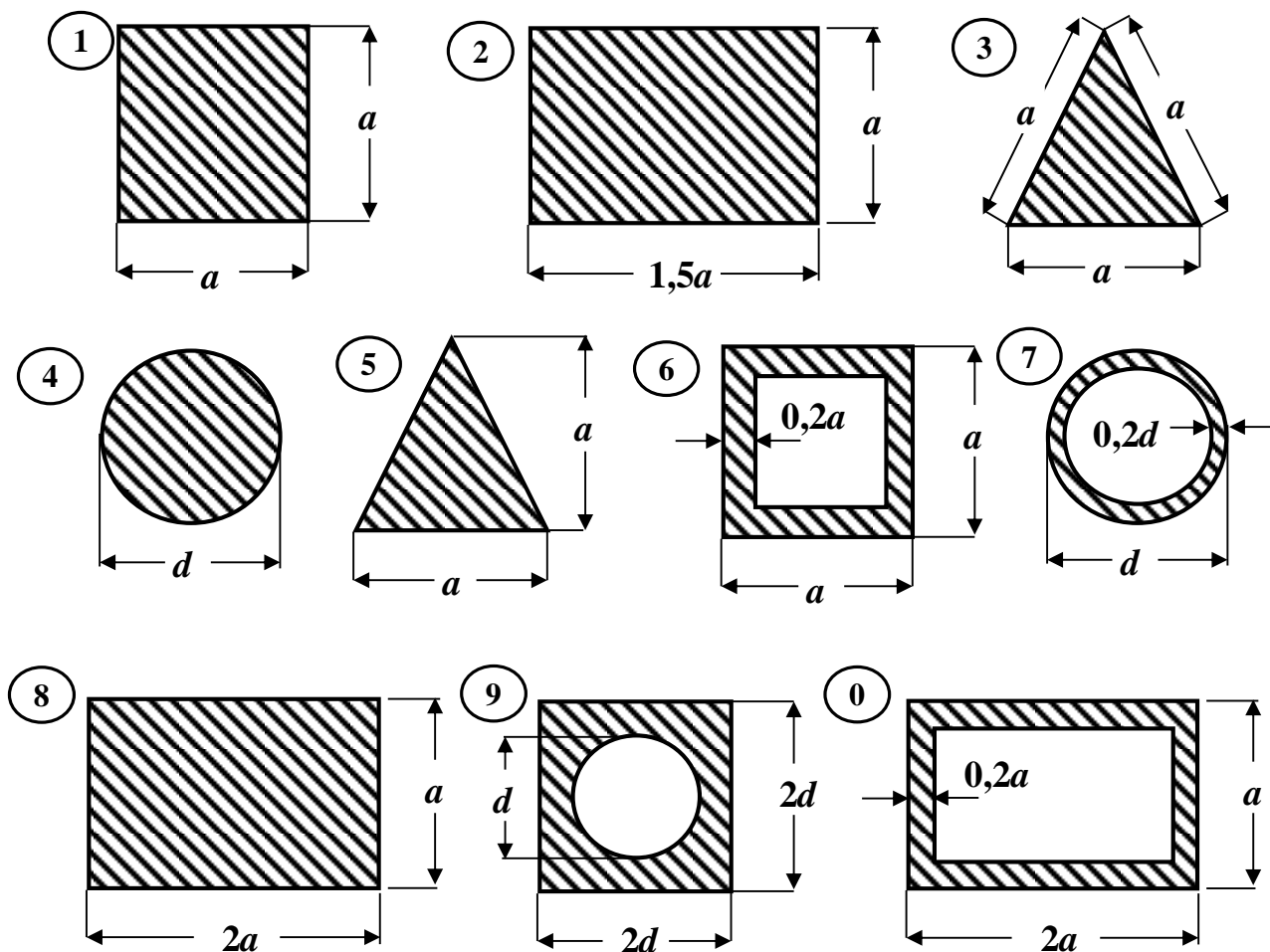


Таблица 3

Форма поперечного сечения



## РАЗДЕЛ 3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

### 3.1. Тема 1. Центральное растяжение и сжатие

#### 3.1.1. Основные теоретические положения

##### Центральное (осевое) растяжение и сжатие

##### Продольные силы и их определение

*Определение.* Центральным растяжением (сжатием) называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают только продольные силы  $N$ , а все прочие внутренние силовые факторы ( $Q$ ,  $M_{изг}$  и  $M_{кр}$ ) равны нулю.

При центральном растяжении или сжатии прямого бруса все его волокна, расположенные вдоль геометрической оси, получают одинаковое удлинение или укорочение.

*Определение.* Сечения бруса, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных к геометрической оси стержня, называются поперечными сечениями.

*Определение.* Продольная сила  $N$  в произвольном поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций на геометрическую ось стержня всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

*Правило знаков.* Если продольная сила  $N$  вызывает растяжение (удлинение) стержня относительно проведенного сечения, то она считается положительной, а если она вызывает сжатие (укорочение) – отрицательной.

#### Эпюры продольных сил. Правила их построения

Для исследования напряженного состояния бруса необходимо знать, как изменяются продольные силы  $N$  по его длине. Результат исследования закона распределения продольных сил по длине бруса можно представить в виде графика, называемого эпюрой продольных сил.

*Определение.* График, изображающий закон изменения  $N$  вдоль геометрической оси стержня, называется эпюрой продольных сил.

*Ординаты этой эпюры представляют собой численные значения продольных сил  $N$  в соответствующих сечениях стержня.*

При построении эпюры  $N$  рекомендуется следующий общий порядок действий:

1. Определяем опорные реакции из уравнений равновесия (статики).
2. Разбиваем расчетную схему стержня на участки.
3. Применяя метод сечений, мысленно проводим поперечное сечение в пределах рассматриваемого участка, которое разбивает стержень на две части.

Выбираем ту часть стержня, на которую действует наименьшее число известных нагрузок. Для определения внутреннего усилия в сечении совершенно безразлично, какую часть стержня рассматривать.

4. Составляем выражения (уравнения), показывающие закон изменения продольной силы  $N$  в пределах рассматриваемого участка. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

5. По этим выражениям вычисляем численные значения продольных сил в характерных сечениях участка (на его границах).

6. По полученным численным значениям продольных сил  $N$  строим эпюру (график) этого внутреннего усилия.

Эпюра внутреннего усилия строится на отдельной линии (базисной прямой), параллельной геометрической оси стержня.

На поле эпюры между графиком и базисной прямой ставится знак внутреннего усилия и проводятся ординаты.

7. Делаем проверки правильности построенной эпюры внутреннего силового фактора.

8. Отмечаем опасное сечение стержня, где действует максимальное (наибольшее) по абсолютной величине значение продольной силы  $N$ .

### **Определение нормальных напряжений в поперечном сечении бруса**

Поскольку в поперечных сечениях стержня при центральном растяжении (сжатии) возникает только продольная сила, естественно предположить, что касательные составляющие напряжения будут отсутствовать, а полное напряжение в сечении будет равно нормальному напряжению.

Нормальное напряжение в поперечном сечении стержня при его центральном растяжении (сжатии) определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (3.1)$$

Знак напряжения зависит от знака продольной силы в рассматриваемом сечении стержня.

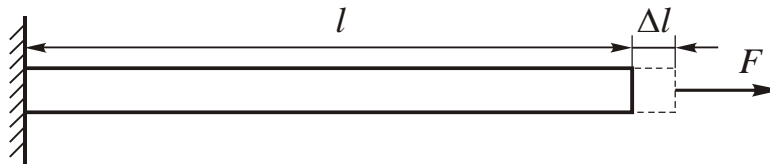
Правило знаков. В случае растяжения нормальные напряжения считаются положительными.

Как показывает опыт, нормальные напряжения распределены по всему сечению равномерно, если вблизи этого сечения нет точек приложения внешних сил или каких – то геометрических особенностей. Это предположение соответствует принципу Сен – Венана.

Определение. Особенности приложения внешних сил к растянутому стержню проявляются, как правило, на расстояниях, не превышающих характерных размеров поперечного сечения /принцип Сен – Венана/.

### **Продольные и поперечные деформации**

Рассмотрим стержень длиной  $l$ , растягиваемый продольной внешней силой  $F$  (рис. 3.1).



**Рис. 3.1**

После нагружения длина стержня увеличится и станет равной  $l + \Delta l$ .

Величину  $\Delta l$  называют абсолютным удлинением стержня.

Мы считаем напряженное состояние в стержне однородным, при этом относительная деформация  $\epsilon$  вдоль оси стержня остается одной и той же, равной своему среднему значению по длине  $l$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3.2)$$

**Определение.** Отношение абсолютного удлинения стержня к его первоначальной длине называется относительным удлинением стержня  $\epsilon$ .

Для однородного напряженного состояния естественно предположить, что все продольные волокна стержня растягиваются одинаковым образом, то есть справедлива гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений).

**Определение.** Поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его геометрической оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к его оси и после деформации /гипотеза Бернулли/.

Как показывает опыт при центральном растяжении (сжатии) деформации возникают не только в продольном, но и в поперечном направлении. Это приводит к тому, что под нагрузкой размеры поперечных сечений уменьшаются (увеличиваются). Связь поперечных и продольных деформаций может быть записана в виде

$$\epsilon_{\text{попер}} = \mu \cdot \epsilon_{\text{прод}}, \quad (3.3)$$

где

$\mu$  – безразмерный коэффициент, который называется коэффициентом Пуассона. Его значения лежат в пределах  $0,25 \div 0,35$ . Теоретически,  $\mu \leq 0,5$ .

### **Закон Гука при осевом растяжении и сжатии**

Связь между напряжением и деформацией стержня при центральном растяжении (сжатии) дает закон Гука, который в случае одноосного напряженного состояния принимает особо простой вид

$$\sigma = E \cdot \epsilon. \quad (3.4)$$

**Определение.** При центральном растяжении (сжатии) нормальное напряжение прямо пропорционально относительному удлинению (закон Гука).

Коэффициент пропорциональности  $E$ , или модуль Юнга, определяется экспериментально, на основе опытов на растяжение специальных образцов из различных материалов. (для стали  $E = 200 \text{ ГПа}$ ; для дюралюминия  $E = 72 \text{ ГПа}$ ; для меди  $E = 120 \text{ ГПа}$  и т. д.).

Закон Гука соблюдается в случае так называемых малых деформаций. Для конечных деформаций связь с напряжениями перестает быть линейной.

Формулу закона Гука (3.4) можно преобразовать, выразив нормальное напряжение по уравнению (3.1), а относительное удлинение – по формуле (3.2).

В результате получим

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}. \quad (3.5)$$

*По этой формуле можно вычислять величину полного (общего) удлинения стержня в пределах рассматриваемого участка.*

Если напряженное состояние по длине стержня не является однородным, то общее удлинение может быть найдено как интегральная сумма удлинений по бесконечно малым участкам длиной  $dx$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{E \cdot A} \cdot dx.$$

Последней формулой пользуются в тех случаях, когда какая – либо из величин  $N$ ,  $E$  или  $A$  не постоянна по длине стержня.

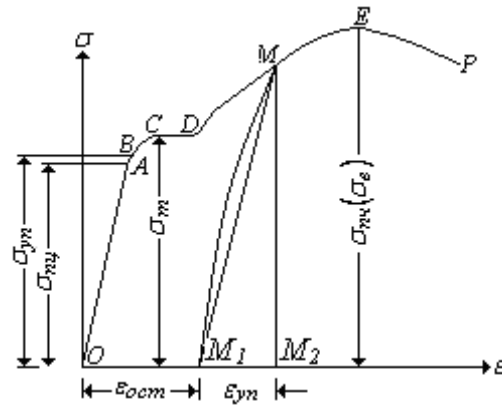
*Определение.* Произведение  $E \cdot A$  (модуля Юнга на площадь поперечного сечения) называется жесткостью стержня при центральном растяжении (сжатии).

### **Основные характеристики механических свойств материалов и их опытное изучение**

Механические характеристики материала определяются путем испытания стандартных образцов. Основным видом испытаний стали является растяжение стандартных круглых или плоских образцов, для которых строятся диаграммы растяжения в координатах: сила – абсолютное удлинение /  $F = f(\Delta l)$  /.

Для определения обобщенных механических характеристик материала строят диаграммы напряжения в координатах: напряжение – относительная деформация /  $\sigma = f(\epsilon)$  /.

Диаграмма напряжения малоуглеродистой стали ВСт.3, обладающей высокими пластическими свойствами и широко применяемой в строительстве, имеет вид (рис. 3.2)


**Рис. 3.2**

На отрезке **ОА** зависимость между напряжениями и деформациями является линейной.

Определение. Напряжение  $\sigma_{пц}$ , соответствующее точке **А** на диаграмме напряжения, называется пределом пропорциональности.

На отрезке **АВ** линейная зависимость нарушается, но при разгрузке образца возникшие деформации исчезают.

Определение. Напряжение  $\sigma_{уп}$ , соответствующее точке **В** на диаграмме напряжения, называется пределом упругости.

Практически горизонтальный отрезок **СD** называется площадкой текучести.

Определение. Напряжение  $\sigma_{т}$ , соответствующее точке **Д** на диаграмме напряжения, называется пределом текучести.

При напряжениях, равных пределу текучести, в малоуглеродистых сталях развиваются пластические деформации, связанные с необратимыми деформациями сдвига между кристаллами феррита.

После развития определенных пластических деформаций и перестройки кристаллической решетки стали несущая способность стержня увеличивается – рост деформаций сопровождается увеличением напряжений, происходит упрочнение стали. Участок **DE** на диаграмме напряжения называется зоной упрочнения. При напряжениях, соответствующих наивысшей точке **Е** на диаграмме напряжения, в определенном участке образца появляется значительное уменьшение размеров поперечного сечения – образуется, так называемая, шейка.

Определение. Напряжение  $\sigma_{пч} = \sigma_{в}$ , соответствующее точке **Е** диаграммы напряжения, называется пределом прочности или временным сопротивлением.

Разрушение образца наступает вскоре после образования шейки.

Рассмотренная диаграмма напряжения называется *условной*, так как при ее построении не учитывается уменьшение площади поперечного сечения при растяжении образца.

Рассмотренные выше напряжения – предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести и предел прочности (временное сопротивление) являются основными механическими характеристиками прочности и упругости материала.

### **Расчет на прочность при осевом растяжении и сжатии**

### Метод допускаемых напряжений

Наиболее распространенным расчетом на прочность при центральном растяжении (сжатии) является расчет по допускаемым напряжениям, согласно которому наибольшее нормальное напряжение, возникающее в материале, не должно превышать определенной величины, свойственной данному материалу и условиям работы. Эта величина называется допускаемым напряжением, то есть

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]. \quad (3.6)$$

В качестве допускаемого напряжения выбирают величину

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[n]}, \quad (3.7)$$

где

$[\sigma]$  – допускаемое напряжение;

$\sigma_{пред}$  – предельное значение нормального напряжения для данного материала. Это предел текучести  $\sigma_T$  для пластичных материалов, либо предел прочности  $\sigma_{ПЧ} = \sigma_B$  – для хрупких материалов;

$[n]$  – допускаемый коэффициент запаса прочности. В машиностроении запасы прочности сравнительно невелики:  $[n] = 1,5 \div 2$ . В строительстве они существенно выше:  $[n] = 2 \div 5$ , что связано с большей опасностью возможных последствий при аварии.

Максимальное нормальное напряжение в стержне при центральном растяжении (сжатии) возникает в сечении, где продольная сила достигает наибольшей по модулю величины, то есть в опасном сечении.

Определение. Сечение, в котором продольная сила принимает максимальное по абсолютной величине значение  $N_{max}$ , называется опасным сечением стержня по нормальным напряжениям.

Таким образом, наибольшие нормальные напряжения в стержне при центральном растяжении (сжатии) будут равны

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \quad (3.8)$$

Следовательно, условие прочности при центральном растяжении или сжатии по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma] \quad (3.9)$$

В этой формуле

$\sigma_{max}$  – максимальное нормальное напряжение в стержне;

$N_{max}$  – максимальная продольная сила в стержне;

$A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

При расчете элементов конструкции, работающих на центральное растяжение или сжатие, встречаются задачи трех типов:

а). Проектный расчет. По заданной нагрузке определяют продольную силу  $N$  и из условия прочности находят величину требуемой площади поперечного сечения

$$A_{\text{треб}} \geq \frac{N_{\text{max}}}{[\sigma]} \quad (3.10)$$

б). Определение допускаемой нагрузки. По известной площади  $A$  и допускаемому напряжению  $[\sigma]$  определяют наибольшую величину допускаемой нагрузки

$$[N] \leq [\sigma] \cdot A. \quad (3.11)$$

в). Проверочный расчет. По известным значениям  $N$ ,  $A$ ,  $[\sigma]$  проверяют выполнение условия прочности (3.9).

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N_{\text{max}}}{A} \leq [\sigma]$$

#### Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Центральное растяжение и сжатие»

1. Какой вид деформации называется центральным растяжением (сжатием)?
2. В чем заключается метод сечений?
3. Как определяется численное значение продольной силы?
4. Что называется эпюрой продольных сил?
5. План построения эпюры продольных сил.
6. По какой формуле определяются нормальные напряжения при центральном растяжении (сжатии) в произвольной точке поперечного сечения стержня?
7. Что называется коэффициентом поперечной деформации?
8. Сформулируйте закон Гука. Как он выражается математически?
9. По какой формуле определяется величина продольной деформации участка стержня?
10. Что характеризует модуль упругости первого рода (модуль Юнга) и какая его размерность?
11. От чего зависит численное значение модуля упругости первого рода (модуля Юнга)?
12. Что называется жесткостью стержня при центральном растяжении и сжатии?
13. Как строятся диаграммы растяжения и напряжения?
14. Перечислите характерные точки диаграмм растяжения и напряжения.
15. В чем разница между пластичными и хрупкими материалами?
16. Перечислите основные механические характеристики материалов.
17. Напишите условие прочности при центральном растяжении (сжатии) по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений?



18. Дайте определение допускаемому напряжению и коэффициенту запаса прочности.

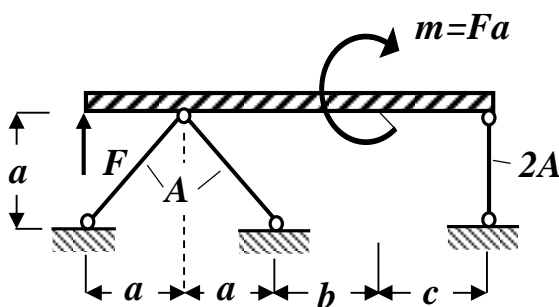
19. Как определяется величина допускаемого напряжения для пластичных и хрупких материалов?

20. Какие факторы влияют на величину допускаемого напряжения и коэффициента запаса прочности?

*После изучения этой темы можно приступить к решению задачи №1, включенной в контрольную работу.*

### 3.1.2. Пример решения задачи № 1

#### «Расчет центрально растянутых (сжатых) стержней прочность»



#### Исходные данные:

$$A = 2,4 \text{ м}; \quad b = 2 \text{ м}; \quad c = 3 \text{ м}; \quad A = 10 \text{ см}^2;$$

$$[\sigma_p] = 100 \text{ МПа} = 10 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right);$$

$$[\sigma_c] = 160 \text{ МПа} = 16 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right).$$

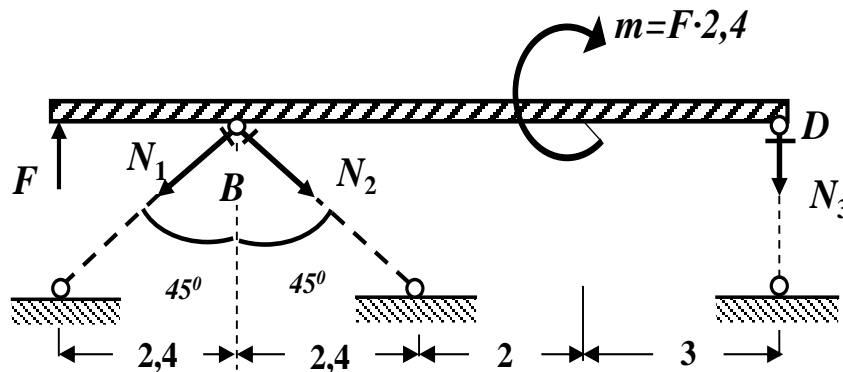
**Рис. 3.3. Схема стержневой системы**

**Для заданной расчетной схемы стержневой системы с абсолютно жестким брусом (рис. 3.3) требуется:**

1. Определить усилия в стержнях, выразив их через силу  $F$ .
2. Найти допускаемую нагрузку  $[F]$ , приняв допускаемое нормальное напряжение на сжатие  $[\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$ , а на растяжение –  $[\sigma_p] = 100 \text{ МПа}$ .
3. Определить напряжения в стержнях, приняв  $F = [F]$ .

**Решение**
**Определение усилий в стержнях**

Для определения усилий в стержнях разрежем стержни и в местах разрезов приложим неизвестные пока усилия, предполагая, что они вызывают растяжение (рис.3.4).


**Рис. 3.4. Расчетная схема**

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до трех значащих цифр.

Составляем три уравнения равновесия (статики) с учетом правила знаков:

1. Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю

$$\sum F_x = 0: \quad -N_1 \cdot \sin 45^\circ + N_2 \cdot \sin 45^\circ = 0; \quad \rightarrow \quad \mathbf{N_1 = N_2.}$$

2. Сумма моментов всех сил относительно точки  $B$  равна нулю

$$\sum M_B = 0: \quad -F \cdot 2,4 - m - N_3 \cdot (2 + 3 + 2,4) = 0;$$

$$-F \cdot 2,4 - F \cdot 2,4 - N_3 \cdot (7,4) = 0;$$

$$-F \cdot 4,8 - N_3 \cdot 7,4 = 0;$$

$$N_3 = -\frac{4,8F}{7,4} = -0,64865 F = -0,649 F; \quad \rightarrow \quad \mathbf{N_3 = -0,649 F.}$$

3. Сумма моментов всех сил относительно точки  $D$  равна нулю

$$\sum M_D = 0: \quad -F \cdot (2,4 + 2,4 + 2 + 3) + N_1 \cdot \cos 45^\circ (2,4 + 2 + 3) + N_2 \cdot \cos 45^\circ \cdot (2,4 + 2 + 3) - m = 0;$$

$$-F \cdot 9,8 + 2N_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot 7,4 - F \cdot 2,4 = 0;$$

$$N_1 \cdot 10,47 - F \cdot 12,2 = 0;$$

$$N_1 = \frac{12,2F}{10,47} = 1,165232F = 1,165F; \quad \rightarrow \quad \mathbf{N_1 = N_2 = +1,165F.}$$

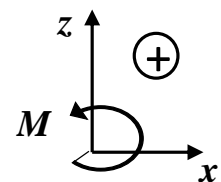
Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна 0):

$$\sum F_z = F - N_1 \cdot \cos 45^\circ - N_2 \cdot \cos 45^\circ - N_3 = F - 2 \cdot 1,165F \cdot 0,707 -$$

$$-(-0,649 F) = 1,649 F - 1,647 F = 0,002 F \approx 0 (\pm 5\%).$$

Мы определили численные значения внутренних усилий  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  в стержнях, выразив их через внешнюю силу  $F$ .

Из полученных результатов видно, что первый и второй стержни испытывают растяжение, а третий – сжатие.



### Определение допускаемой нагрузки из условия прочности стержней по методу допускаемых напряжений при растяжении-сжатии

Условие прочности при растяжении или сжатии по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид (3.9)

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma]$$

В этой формуле

$\sigma_{max}$  – максимальное нормальное напряжение в стержне;

$N_{max}$  – максимальная продольная сила в стержне;

$A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

Определяем нормальные напряжения в стержнях, выразив их через внешнюю силу  $F$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{1,165 F}{10 \text{ см}^2} = \frac{0,1165 F}{1 \text{ см}^2}; \text{ т.к. } A_1 = A = 10 \text{ см}^2;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-0,649 F}{20 \text{ см}^2} = -\frac{0,0325 F}{1 \text{ см}^2}; \text{ т.к. } A_3 = 2A = 2 \cdot 10 \text{ см}^2 = 20 \text{ см}^2.$$

Из условия прочности на растяжение определим допускаемую нагрузку для 1-го и 2-го стержней

$$\sigma_1 = \sigma_2 \leq [\sigma_p]; \text{ получаем } \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{0,1165 F}{1 \text{ см}^2} \leq 10 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}; \rightarrow$$

$$F \geq \frac{10 \text{ кН}}{0,1165} = 85,8 \text{ кН}.$$

Из условия прочности на сжатие определим допускаемую нагрузку для 3-го стержня

$$|\sigma_3| \leq [\sigma_c]; \text{ получаем } |\sigma_3| = \frac{0,0325 F}{1 \text{ см}^2} \leq 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}; \rightarrow$$

$$F \geq \frac{16 \text{ кН}}{0,0325} = 492 \text{ кН}.$$

Из двух полученных численных значений допускаемой нагрузки выбираем наименьшую. Это и есть допускаемая сила для всей стержневой системы

$$[F] = 85,8 \text{ кН}.$$

#### Определение напряжений в стержнях, принимая $F = [F]$

Так как  $F = [F] = 85,8 \text{ кН}$ , то напряжения в стержнях будут равны

$$N_1 = N_2 = 1,165 F = 1,165 \cdot 85,8 \text{ кН} = 99,957 \text{ кН} \approx 100 \text{ кН};$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{100 \text{ кН}}{10 \text{ см}^2} = 10 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 100 \text{ МПа}.$$

$$N_3 = -0,649 F = -0,649 \cdot 85,8 \text{ кН} = -55,684 \text{ кН} \approx -55,7 \text{ кН};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-55,7 \text{ кН}}{20 \text{ см}^2} = -2,785 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -27,9 \text{ МПа}.$$

## 3.2. Тема 2. Геометрические характеристики плоских фигур

### 3.2.1. Основные теоретические положения

#### Статические моменты, их свойства

#### Определение положения центра тяжести сложных сечений

Рассмотрим произвольную фигуру, расположенную в декартовой системе координат  $yOz$  и любую точку  $K(y, z)$ , принадлежащую этой фигуре (рис. 3.5).

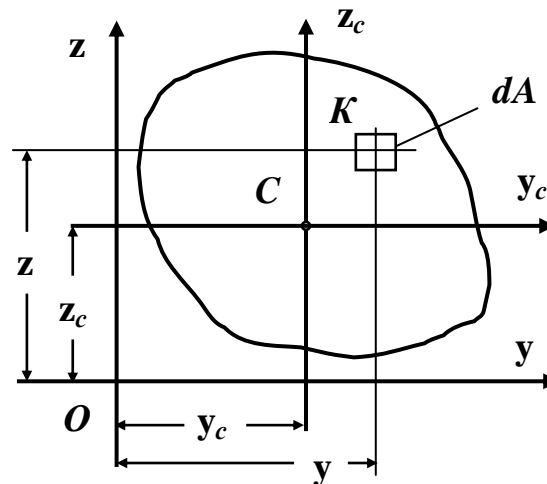


Рис. 3.5

Точку  $K(y, z)$  ограничим элементарной площадью величиной  $dA$ . По аналогии с выражением для момента силы относительно какой-либо оси можно составить выражение момента элементарной площади относительно некоторой оси.

Произведение элементарной площади  $dA$  на координату  $z$  точки  $K(y, z)$ , принадлежащей элементарной площадке, называется статическим моментом этого элемента площади относительно оси  $y$

$$dS_y = z dA$$

Аналогично,  $dS_z = y dA$  – статический момент элемента площади  $dA$  относительно оси  $z$ .

*Определение.* Статическим моментом площади фигуры относительно какой-либо оси, называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на координату точки  $K(y, z)$ , принадлежащей элементарной площадке,

$$S_y = \int_A z dA ; \quad S_z = \int_A y dA . \quad (3.12)$$

Единицей измерения статического момента является единица длины в третьей степени – см<sup>3</sup> (в системе СИ – м<sup>3</sup>).

*Статический момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю.*

Проводя аналогию между моментами сил и моментами площадей, на основании теоремы Вариньона о моменте равнодействующей системы сил из курса теоретической механики, можно записать следующие выражения для моментов площади

$$S_y = A z_c; \quad S_z = A y_c,$$

где

**A** – площадь рассматриваемой фигуры;

**y<sub>c</sub>** и **z<sub>c</sub>** – координаты ее центра тяжести.

Если провести оси **y<sub>c</sub>** и **z<sub>c</sub>** через центр тяжести фигуры – точку **C**, то статические моменты относительно этих осей будут равны нулю, т.е.

$$S_{y_c} = 0; \quad S_{z_c} = 0.$$

*Определение.* Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются центральными. Относительно этих осей статические моменты равны нулю.

Таким образом, получаем формулы для определения координат центра тяжести фигуры

$$y_c = \frac{S_z}{A}; \quad z_c = \frac{S_y}{A}. \quad (3.13)$$

При вычислении статических моментов сложной составной фигуры ее разбивают на элементарные или простые части, для каждой из которых площадь и положение ее центра тяжести известны.

В этом случае статические моменты определяются как алгебраические суммы статических моментов каждой элементарной площади

$$S_y = S_y^I + S_y^{II} + S_y^{III} + \dots = A_1 z_{c_1} + A_2 z_{c_2} + A_3 z_{c_3} + \dots$$

$$S_z = S_z^I + S_z^{II} + S_z^{III} + \dots = A_1 y_{c_1} + A_2 y_{c_2} + A_3 y_{c_3} + \dots$$

Используя последние соотношения, получаем формулы для определения координат центра тяжести сложной составной фигуры

$$y_c = \frac{A_1 y_{c_1} + A_2 y_{c_2} + A_3 y_{c_3} + \dots}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots}, \quad z_c = \frac{A_1 z_{c_1} + A_2 z_{c_2} + A_3 z_{c_3} + \dots}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots} \quad (3.14)$$

### Осевые и центробежные моменты инерции и их свойства

**Определение.** Осевым или экваториальным моментом инерции площади фигуры относительно какой-либо оси, называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на квадрат координаты точки  $K(y, z)$ , принадлежащей элементарной площадке (рис. 3.6),

$$J_y = \int_A z^2 dA; \quad J_z = \int_A y^2 dA \quad (3.15)$$

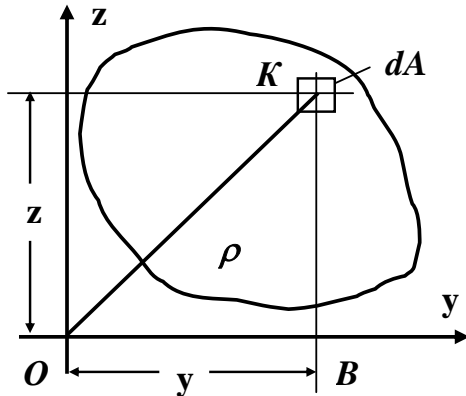


Рис. 3.6

**Определение.** Полярным моментом инерции площади фигуры относительно данной точки (полюса  $O$ ) называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на квадрат их расстояний  $\rho$  от полюса (рис.3.6)

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA \quad (3.16)$$

Единицей измерения момента инерции является единица длины в четвертой степени – см<sup>4</sup>, (в системе СИ – м<sup>4</sup>, для прокатных профилей по ГОСТу – см<sup>4</sup>).

*Осевой и полярный моменты инерции всегда положительны по определению.*

**Определение.** Центробежным моментом инерции площади фигуры называется алгебраическая сумма или интеграл произведений площади элементарной площадки на координаты точки  $K(y, z)$ , принадлежащей элементарной площадке (рис. 3.6)

$$J_{yz} = \int_A yz dA \quad (3.17)$$

*Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и, в частном случае, равным нулю.*

Если, хотя бы одна, из взаимно перпендикулярных осей декартовой системы координат, является осью симметрии фигуры, то центробежный момент инерции такой площади равен нулю.

### Вычисление моментов инерции простейших фигур

**Прямоугольник.** Вычислим осевые моменты инерции прямоугольника относительно центральных осей  $y$  и  $z$  (рис. 3.7).

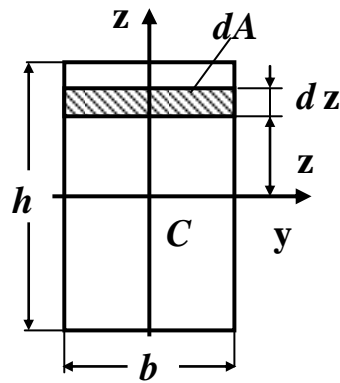


Рис. 3.7

По определению осевого момента инерции (3.15)

$$J_y = \int_A z^2 dA,$$

где

$dA = b \cdot dz$  - площадь элементарного прямоугольника (рис. 3.7).

Подставляя под знак интеграла вместо  $dA$  ее значение, получим

$$J_y = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{b}{3} h^3 \left| \frac{z^3}{3} \right|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12} \rightarrow J_y = \frac{bh^3}{12}.$$

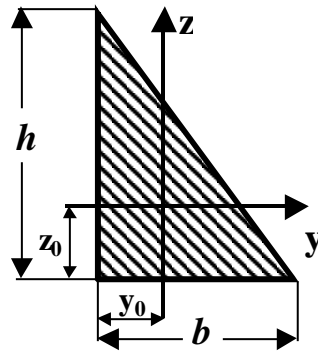
Аналогично можно вывести формулу осевого момента инерции прямоугольника относительно оси  $z$

$$J_z = \frac{hb^3}{12} \quad (3.18)$$

Таким же образом можно получить формулы для вычисления моментов инерции треугольника и круга.

**Треугольник.** Моменты инерции треугольника относительно центральных осей  $y$  и  $z$





определяются по формулам

$$J_y = \frac{bh^3}{36}; \quad J_z = \frac{hb^3}{36}; \quad J_{yz} = \frac{b^2h^2}{72}. \quad (3.19)$$

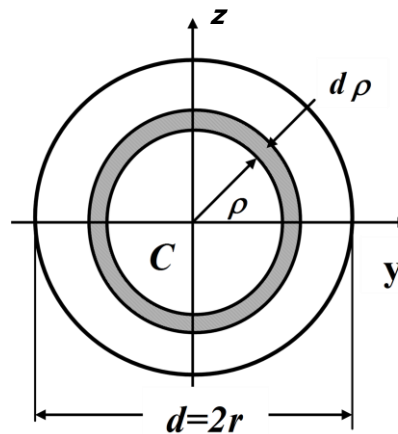
**Круг.** Моменты инерции круга относительно центральных осей  $y$  и  $z$  (рис. 3.8) определяются по формулам

$$J_y = J_z = \frac{\pi d^4}{64}; \quad J_{yz} = 0. \quad (3.20)$$

### Полярный момент инерции и его свойства

#### Вычисление полярного момента инерции круга и кольца

В задачах на кручение стержней используется понятие полярного момента инерции, который определяется по формуле (3.16)



**Рис. 3.8**

$$J_p = \int_A \rho^2 dA,$$

где

$\rho$  – полярный радиус, или расстояние от начала координат до площадки  $dA$ .  
Поскольку

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \rightarrow J_\rho = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = J_z + J_y,$$

То есть

$$J_\rho = J_y + J_z = \text{const.} \quad (3.21)$$

*Полярный момент инерции сечения равен сумме осевых моментов инерции.*

**Круг.** Вычислим полярный момент инерции круга относительно центра тяжести. В качестве элементарной площади рассмотрим площадь заштрихованного кольца с радиусами  $\rho$  и  $\rho + d\rho$  (рис. 3.8).

Площадь этого кольца

$$dA = 2\pi\rho \cdot d\rho.$$

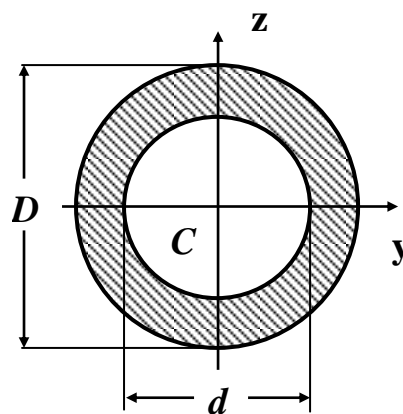
Тогда

$$I_\rho = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot \rho^2 = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 \cdot d\rho$$

После интегрирования и подстановки пределов полярный момент инерции круга относительно его центра тяжести  $C$  найдем по формуле

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 \cdot d^4. \quad (3.22)$$

**Кольцо.** Полярный момент инерции в этом случае равен разности полярных моментов инерции внешнего и внутреннего кругов (рис. 3.9)



**Рис. 3.9**

$$J_\rho = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad (3.23)$$

где

$$\alpha = \frac{d}{D}.$$

Осевые моменты инерции кольца по аналогии будут равны

$$J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4).$$

### Зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых - центральная

Для произвольной фигуры, площадь которой равна  $A$ , известны моменты инерции  $J_{y_c}$ ,  $J_{z_c}$  и  $J_{y_c z_c}$  относительно центральных осей  $y_c$ ,  $z_c$ . Необходимо определить моменты инерции  $J_{y_1}$ ,  $J_{z_1}$  и  $J_{y_1 z_1}$  относительно новых осей  $y_1$  и  $z_1$ , которые параллельны центральным осям  $y_c$  и  $z_c$  (рис. 3.10).

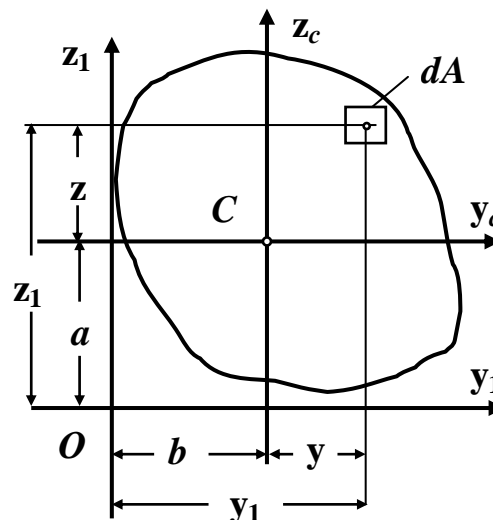


Рис. 3.10

Формулы параллельного переноса осей в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} J_{y_1} &= J_{y_c} + a^2 A; J_{z_1} = J_{z_c} + b^2 A; \\ J_{y_1 z_1} &= J_{y_c z_c} + abA \end{aligned} \quad (3.24)$$

Первые две зависимости формулируются следующим образом:

*Момент инерции фигуры относительно любой оси, параллельной центральной, равен моменту инерции фигуры относительно центральной оси, плюс произведение квадрата расстояния между осями на площадь фигуры.*

Третья зависимость читается так:

*Центробежный момент инерции фигуры относительно произвольных осей, параллельных центральным, равен центробежному моменту инерции фигуры относительно*

центральных осей плюс произведение координат центра тяжести фигуры относительно произвольных осей на площадь фигуры.

Необходимо помнить, что вышеприведенные формулы параллельного переноса осей (3.24) справедливы только в том случае, когда оси  $y_c$  и  $z_c$  – центральные оси.

### Зависимость между моментами инерции при повороте осей

Рассмотрим некоторую фигуру, отнесенную к первоначальной декартовой системе координат  $y_0, z_0$  (рис. 3.11).

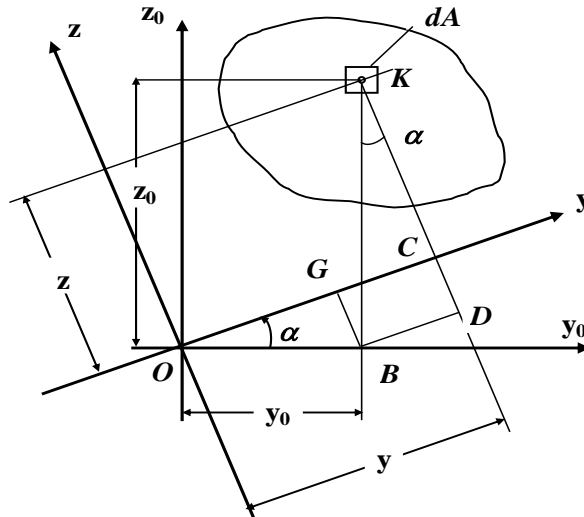


Рис. 3.11

Относительно осей  $y_0$  и  $z_0$  моменты инерции  $J_{y_0}, J_{z_0}, J_{y_0z_0}$  известны.

Ставится задача по определению осевых и центробежного моментов инерции относительно новых осей  $y$  и  $z$ , которые получены поворотом первоначальных центральных осей  $y_0$  и  $z_0$  против хода часовой стрелки на угол  $\alpha > 0$ . То есть необходимо найти значения  $J_y, J_z$  и  $J_{yz}$ , выразив их через  $J_{y_0}, J_{z_0}$  и  $J_{y_0z_0}$ , а также положительный угол  $\alpha$ .

**Формулы повернутых осей имеют вид**

$$\begin{aligned}
 J_y &= J_{y_0} \cos^2 \alpha + J_{z_0} \sin^2 \alpha - J_{y_0z_0} \sin 2\alpha \\
 J_z &= J_{y_0} \sin^2 \alpha + J_{z_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0z_0} \sin 2\alpha \\
 J_{yz} &= \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0z_0} \cos 2\alpha
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

**Правило знаков.** Положительный угол  $\alpha$  откладывается от первоначальных осей  $y_0$  и  $z_0$  против хода часовой стрелки.

Эти формулы являются основными для расчетов, связанных с определением моментов инерции относительно любых повернутых осей.

Складывая первое и второе выражения, получим

$$J_y + J_z = J_{y_0} + J_{y_0} = \text{const.} \quad (3.26)$$

Следовательно, при повороте центральных осей сумма соответствующих осевых моментов инерции не изменяется.

### Главные оси и главные моменты инерции

#### Определение положения главных центральных осей и численных значений главных моментов инерции для симметричных и несимметричных сечений

*Определение.* Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения (относительно одной – максимум, относительно другой – минимум), называются главными осями.

*Определение.* Главные оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются главными центральными осями.

**Замечание.** Ось симметрии всегда является главной центральной осью.

Анализируя формулы повернутых осей (3.25), приходим к заключению о том, что при изменении угла поворота  $\alpha$  осевые моменты инерции изменяются так, что их сумма остается неизменной (3.26). Это приводит к выводу о том, что можно найти такое значение угла  $\alpha_0$ , при котором один из осевых моментов инерции достигнет минимального значения, а второй – максимального, т.е. возникает постановка задачи на нахождение экстремума функции по переменной  $\alpha$ .

Вычисляя производную от  $J_y$  или  $J_z$  по переменной  $\alpha$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{dJ_y}{d\alpha} &= 2J_{y_0} \cos \alpha (-\sin \alpha) + 2J_{z_0} \sin \alpha \cos \alpha - 2J_{y_0 z_0} \cos 2\alpha = \\ &= -2 \left( \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0 z_0} \cos 2\alpha \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$J_{yz} = \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0 z_0} \cos 2\alpha$$

выражение для производной принимает вид

$$\frac{dJ_y}{d\alpha} = -2 \left( \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_0 z_0} \cos 2\alpha \right) = -2 J_{yz}.$$

Приравняв производную нулю, получаем уравнение, позволяющее найти угол  $\alpha_0$

$$\frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{y_0 z_0} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Из этого уравнения следует, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{y_0 z_0}}{J_{y_0} - J_{z_0}} \quad \text{и} \quad J_{yz} / \alpha = \alpha_0 = 0. \quad (3.27)$$

Таким образом, эта формула определяет положение экстремальных осей, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, т.е. положение главных осей.

Определение. Осевые моменты относительно главных осей называются главными моментами инерции.

Для определения численных значений главных моментов инерции можно использовать формулы повернутых осей, подставляя в них значение угла  $\alpha_0$ .

Выполняя эту операцию в общем виде, после некоторых алгебраических преобразований тригонометрических выражений, получим формулы для определения главных моментов инерции, не содержащие угла  $\alpha_0$

$$J_{\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4J_{yz}^2}. \quad (3.28)$$

Следовательно, для определения положения главных центральных осей и численных значений главных центральных моментов инерции несимметричных поперечных сечений рекомендуется следующий общий порядок действий:

1. Проводят произвольные оси. Вычисляют статические моменты инерции относительно этих осей (разбив предварительно сложное поперечное сечение на ряд простых фигур) и находят положение центра тяжести сложного сечения.

2. Проводят через центр тяжести всего сечения оси, параллельные первоначально выбранным произвольным осям, и находят с помощью формул параллельного переноса осей центробежный и осевые моменты инерции сечения относительно этих новых центральных осей.

3. Находят положение главных центральных осей  $u$  и  $v$  по формуле (3.27).

4. Находят численные значения главных центральных моментов инерции по формулам (3.25) или (3.28).

5. Для проверки правильности вычисления  $J_u$  и  $J_v$  используют равенства

$$J_u + J_v = J_y + J_z \quad \text{и} \quad J_{uv} = 0$$

Примечание. Следует иметь в виду, что с помощью этих равенств можно проверить только правильность вычисления положения главных центральных осей и численных значений главных моментов инерции. Соблюдение этих равенств не гарантирует

правильности вычисления положения центра тяжести сечения, а также осевых и центрального моментов инерции сечения относительно центральных осей.

*Для симметричных фигур* положение главных центральных осей определяется достаточно просто.

Для фигуры, имеющей одну ось симметрии, одна из главных центральных осей совпадает с этой осью симметрии, а вторая главная центральная ось проходит через центр тяжести перпендикулярно к ней.

*Для фигуры, имеющей две оси симметрии, главные оси совпадают с этими осями симметрии.*

Можно сказать, что, если для какой – либо фигуры два главных осевых момента равны между собой, тогда любая центральная ось является главной (круг, квадрат, правильный треугольник, правильный шестиугольник и т.д.).

### Радиусы инерции

#### Вычисление радиусов инерции круга

Иногда при расчетах бывает математически удобно представить момент инерции как произведение площади фигуры на квадрат некоторой величины, называемой радиусом инерции

$$J_y = A \cdot i_y^2$$

где

$i_y^2$  – радиус инерции относительно оси  $y$ .

Откуда следует, что

$$i_y = \pm \sqrt{\frac{J_y}{A}}; \quad i_z = \pm \sqrt{\frac{J_z}{A}}. \quad (3.29)$$

Радиус инерции круга будет равен

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi d^4}{64 \cdot \pi d^2}} = \pm \frac{d}{4}. \quad (3.30)$$

#### Моменты сопротивления и их свойства

Определение. Моментом сопротивления плоской фигуры относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости фигуры, называется отношение осевого момента инерции относительно той же оси к расстоянию от оси до наиболее удаленной точки фигуры

$$W_y = \frac{J_y}{|z_{max}|}; \quad W_z = \frac{J_z}{|y_{max}|}. \quad (3.31)$$

Здесь

$W_y$  и  $W_z$  – соответственно моменты сопротивления фигуры относительно осей  $y$  и  $z$ ,

$|z_{max}|$  и  $|y_{max}|$  – расстояния от осей до наиболее удаленных точек фигуры.

Определение. Полярным моментом сопротивления плоской фигуры относительно какого-либо центра (полюса), лежащего в плоскости фигуры, называется отношение полярного момента инерции плоской фигуры относительно того же центра к расстоянию от центра до наиболее удаленной точки фигуры

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{|\rho_{max}|} \quad (3.32)$$

где

$W_\rho$  – полярный момент сопротивления фигуры относительно центра  $O$ ,

$J_\rho$  – полярный момент инерции фигуры;

$|\rho_{max}|$  – расстояние от центра до наиболее удаленной точки фигуры.

Моменты сопротивления измеряются единицами длины в третьей степени – см<sup>3</sup>, (в системе СИ – м<sup>3</sup>).

Сложные сечения, встречающиеся в различных конструкциях, часто включают элементы стандартных прокатных профилей стали (двутавры, швеллера, уголки и др.).

Расчет геометрических характеристик таких сечений сложен и трудоемок, поэтому в справочных таблицах для этих профилей (в сортаментах) приводятся не только их геометрические размеры, но и такие важные сведения, как положение центра тяжести, моменты инерции, моменты сопротивления и др.

Эти табличные данные намного облегчают вычисление геометрических характеристик сложных составных сечений.

### **Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Геометрические характеристики плоских фигур»**

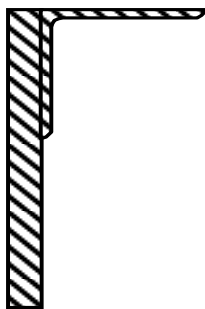
1. Какие оси называются центральными?
2. Что называется статическим моментом площади фигуры относительно некоторой оси?
3. Как определяется статический момент фигуры относительно некоторой оси, координаты центра тяжести которой известны?
4. Как вычисляется положение центра тяжести сложных фигур (для симметричных и несимметричных сечений)?
5. Дайте определение осевого и центробежного моментов инерции фигуры.
6. Приведите формулы моментов инерции простейших фигур относительно собственных главных центральных осей (прямоугольник, треугольник, круг).
7. Дайте определение полярного момента инерции.
8. Приведите формулы полярного момента инерции круга и кольца.
9. Как изменяются моменты инерции при параллельном переносе осей, если исходные оси – центральные?
10. Формулы для моментов инерции при повороте осей.



11. Каким свойством обладает сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
12. Какие оси называются главными центральными осями инерции?
13. Как определяется положение главных центральных осей инерции для симметричных сечений?
14. Формула для определения положения главных осей инерции для несимметричных сечений?
15. Определение численных значений главных моментов инерции для симметричных и несимметричных сечений.
16. Радиусы инерции. Вычисление радиусов инерции круга и кольца.
17. Моменты сопротивления и их свойства.

*После изучения этой темы можно приступить к решению задачи №2, включенной в контрольную работу.*

### 3.2.2. Пример решения задачи № 2 «Геометрические характеристики плоских фигур»



#### Исходные данные:

Пластина – 200 × 20мм;  
Равнобокий уголок – 160×160×12мм.

**Рис. 3.12**

**Для заданного сложного поперечного сечения, состоящего из двух элементов (рис. 3.12), требуется:**

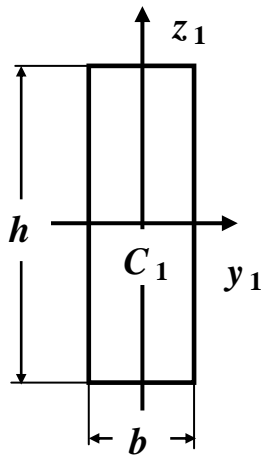
1. Выписать (вычислить) для элементов, входящих в состав сложного поперечного сечения, исходные данные из справочных таблиц (сортаментов).
2. Определить положение центра тяжести заданного сложного поперечного сечения. Построить произвольные центральные оси.
3. Найти величины осевых и центробежного моментов инерции заданного сложного поперечного сечения относительно этих центральных осей.
4. Определить направление главных центральных осей.
5. Найти величины осевых моментов инерции заданного сложного поперечного сечения относительно главных центральных осей.
6. Вычертить заданное сложное поперечное сечение в масштабе на миллиметровке формата А 4 и указать все размеры в числах и все оси.

#### Решение

Выпишем и подсчитаем геометрические характеристики отдельных элементов,

входящих в состав сложного поперечного сечения (исходные данные возьмем из справочных таблиц /сортаментов/).

Будем считать, что пластина – фигура **I**, а равнополочный уголок – фигура **II**.



**Фигура I – пластина 200×20мм**

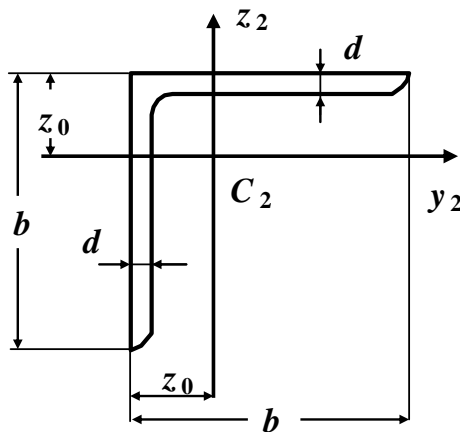
$$b = 20\text{мм} = 2\text{см}; h = 200\text{мм} = 20\text{см};$$

$$A_1 = b \cdot h = 2 \cdot 20\text{см}^2 = 40\text{см}^2;$$

$$J_{y_1}^I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2\text{см} \cdot (20\text{см})^3}{12} = 1333,333\text{см}^4 = 1333\text{см}^4;$$

$$J_{z_1}^I = \frac{b^3h}{12} = \frac{(2\text{см})^3 \cdot 20\text{см}}{12} = 13,33333\text{см}^4 = 13,33\text{см}^4;$$

$$J_{y_1z_1}^I = 0.$$



**Фигура II – равнополочный уголок  
160×160×12**

$$b = 160\text{мм} = 16\text{см};$$

$$d = 12\text{мм} = 1,2\text{см};$$

$$A_2 = 37,4\text{см}^2;$$

$$z_0 = 4,39\text{см};$$

$$J_{y_2}^{II} = J_{z_2}^{II} = 913\text{см}^4;$$

$$J_{y_2z_2}^{II} = +537\text{см}^4.$$

Здесь и в дальнейшем

$A_1, A_2$  – соответственно площади первой и второй фигур;

$A$  – площадь составной фигуры (общая площадь заданного сложного поперечного сечения).

Верхние индексы **I, II** у моментов инерции соответствуют номерам фигур, их отсутствие означает, что определяется момент инерции всего сечения.

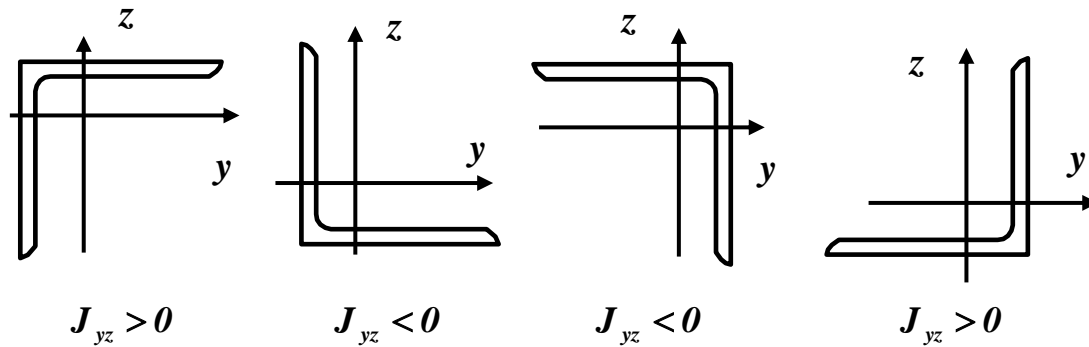
Например,

$J_{y_1}^I$  – момент инерции первой фигуры относительно оси  $y_1$ ;

$J_{y_2z_2}^{II}$  – центробежный момент инерции второй фигуры относительно осей

$y_2, z_2$ .

Замечание. В справочных таблицах (сортаментах) значения центробежного момента инерции уголка относительно центральных осей приводятся без учета знака. Знак центробежного момента инерции заданного уголка (равнобокого или неравнобокого) можно выбрать в соответствии с рис. 3.13.


**Рис. 3.13**

Если в справочных таблицах (сортаментах) значение центробежного момента инерции уголка (равнобокого или неравнобокого) относительно собственных центральных осей отсутствует, то найти это значение можно с помощью третьей формулы поворнутых осей (3.25)

$$J_{yz} = \frac{J_{max} - J_{min}}{2} \cdot \sin 2\alpha,$$

где

$J_{max}$  и  $J_{min}$  - главные центральные моменты инерции уголка, значения которых приведены в таблицах сортамента.

Используя приведенные выше справочные данные, вычертим заданное сложное поперечное сечение в масштабе с указанием всех осей и необходимых размеров в сантиметрах (рис. 3.14).

На рис. 3.14 в рамках показаны размеры, взятые из справочных данных, остальные получены в ходе расчета.

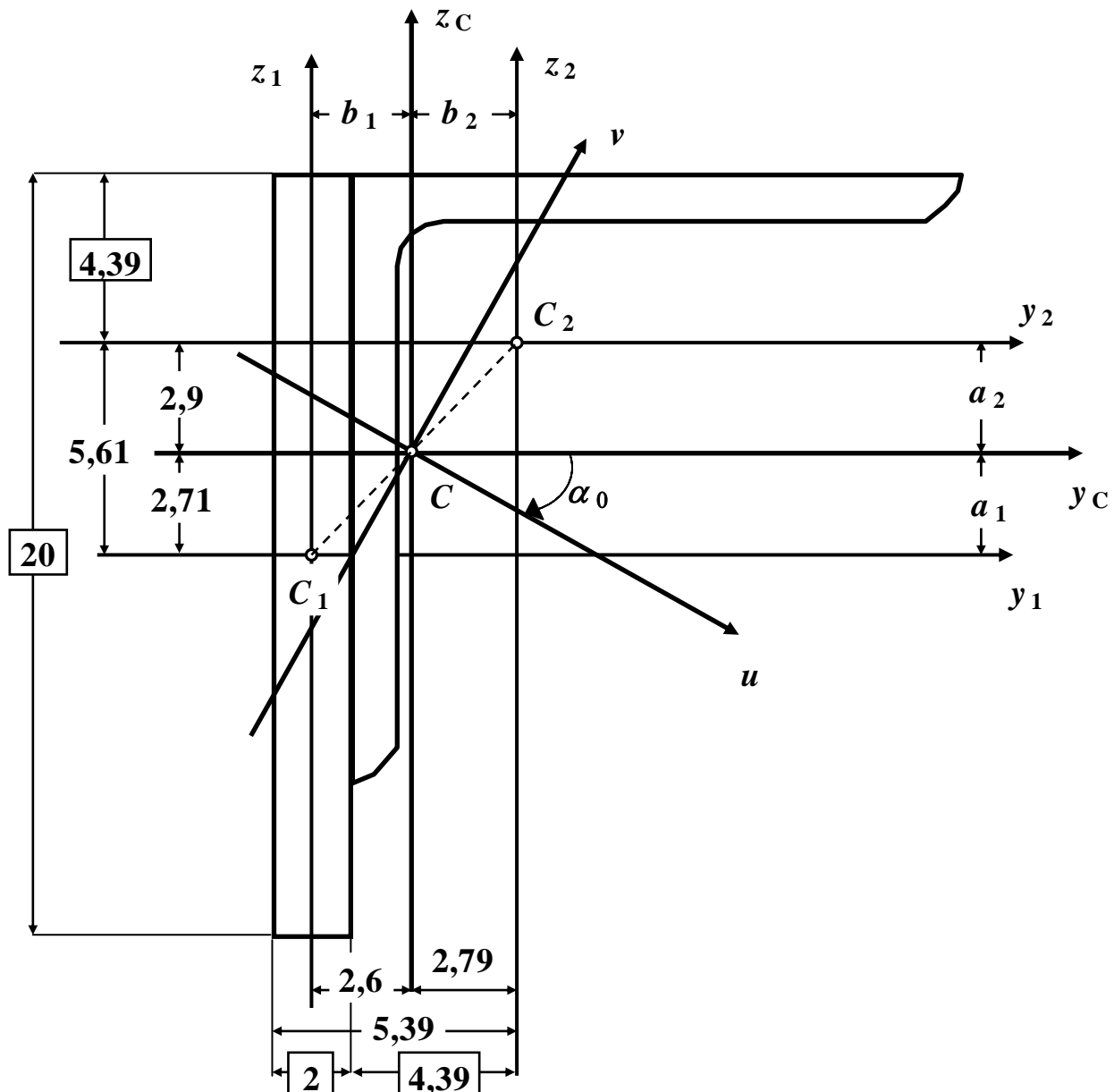


Рис. 3.14

Замечание. Заданное сложное поперечное сечение не имеет ни одной оси симметрии.

### Определение положения центра тяжести заданного сложного поперечного сечения

Определим координаты центров тяжести первой и второй фигур (точек  $C_1$  и  $C_2$ ) относительно произвольной координатной системы  $z_1 C_1 y_1$ .

**Точка  $C_1$ :**  $y_{C_1} = 0$ ;  $z_{C_1} = 0$ .

**Точка  $C_2$ :**  $y_{C_2} = \frac{2}{2} + 4,39 = 5,39 \text{ см}$ ;  $z_{C_2} = \frac{20}{2} - 4,39 = 5,61 \text{ см}$ .

Общая площадь заданного сложного поперечного сечения

$$A = A_1 + A_2 = 40 + 37,4 = 77,4 \text{ см}^2.$$

Координата центра тяжести заданного сложного поперечного сечения по оси  $y_1$  будет равна

$$y_c = \frac{A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2}}{A} = \frac{(40 \cdot 0 + 37,4 \cdot 5,39) \text{ см}^3}{77,4 \text{ см}^2} = \frac{201,586 \text{ см}^3}{77,4 \text{ см}^2} = 2,604 \text{ см} = 2,60 \text{ см}.$$

Координата центра тяжести заданного сложного поперечного сечения по оси  $z_1$  будет равна

$$z_c = \frac{A_1 z_{C_1} + A_2 z_{C_2}}{A} = \frac{(40 \cdot 0 + 37,4 \cdot 5,61) \text{ см}^3}{77,4 \text{ см}^2} = \frac{209,814 \text{ см}^3}{77,4 \text{ см}^2} = 2,7105 \text{ см} = 2,71 \text{ см}.$$

По полученным значениям координат найдем положение центра тяжести (точка  $C$ ) заданного сложного поперечного сечения (рис. 3.14).

*Замечание.* Центр тяжести (точка  $C$ ) сложного поперечного сечения, состоящего из двух простых фигур, всегда должен лежать на прямой линии, соединяющей центры тяжести (точки  $C_1$  и  $C_2$ ) первой и второй фигур (рис. 3.14).

### Построение центральных осей

Через найденный центр тяжести заданного сложного поперечного сечения (точка  $C$ ) проведем произвольные центральные оси  $y_c$  и  $z_c$  параллельно осям  $y_1$  и  $z_1$ , как это показано на рис. 3.14.

### Определение величин осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей

Осевой момент инерции заданного сложного поперечного сечения относительно центральной оси  $y_c$  равен сумме моментов инерции первой и второй фигур относительно этой оси

$$J_{y_c} = J_{y_c}^I + J_{y_c}^{II}.$$

В соответствии с формулами параллельного переноса осей момент инерции первой фигуры относительно центральной оси  $y_c$  равен моменту инерции относительно собственной оси  $y_1$  плюс площадь этой фигуры умноженной на квадрат расстояния между осями  $y_1$  и  $y_c$  (рис. 3.14)

$$J_{y_c}^I = J_{y_1}^I + A_1 a_1^2 = 1333 + 40 \cdot 2,71^2 = 1626,8 \text{ см}^4 = 1627 \text{ см}^4,$$

где

$$a_1 = z_{C_1} - z_c = 0 - 2,71 \text{ см} = -2,71 \text{ см} \quad (\text{рис. 3.14}).$$

Аналогично, момент инерции второй фигуры относительно центральной оси  $y_c$  равен

$$J_{y_c}^{II} = J_{y_2}^{II} + A_2 a_2^2 = 913 + 37,4 \cdot 2,9^2 = 1227,5 \text{ см}^4 = 1228 \text{ см}^4.$$

где

$$a_2 = z_{c_2} - z_c = 5,61 \text{ см} - 2,71 \text{ см} = 2,9 \text{ см} \text{ (рис. 3.14).}$$

Следовательно, осевой момент инерции заданного сложного поперечного сечения относительно центральной оси  $y_c$  равен

$$J_{y_c} = 1627 + 1228 = 2855 \text{ см}^4 = 2860 \text{ см}^4.$$

Аналогично, осевой момент инерции заданного сложного поперечного сечения относительно центральной оси  $z_c$  равен сумме моментов инерции первой и второй фигур относительно этой оси

$$J_{z_c} = J_{z_c}^I + J_{z_c}^{II}$$

$$J_{z_c}^I = J_{z_1}^I + A_1 b_1^2 = 13,33 + 40 \cdot 2,6^2 = 284 \text{ см}^4$$

где

$$b_1 = y_{c_1} - y_c = 0 - 2,60 \text{ см} = -2,60 \text{ см} \text{ (рис. 3.14).}$$

Осевой момент инерции второй фигуры относительно оси  $z_c$

$$J_{z_c}^{II} = J_{z_2}^{II} + A_2 b_2^2 = 913 + 37,4 \cdot 2,79^2 = 1204 \text{ см}^4$$

где

$$b_2 = y_{c_2} - y_c = 5,39 \text{ см} - 2,60 \text{ см} = 2,79 \text{ см} \text{ (рис. 3.14).}$$

Следовательно, осевой момент инерции заданного сложного поперечного сечения относительно центральной оси  $z_c$  равен

$$J_{z_c} = 284 + 1204 = 1488 \text{ см}^4 = 1490 \text{ см}^4$$

Центробежный момент инерции заданного сложного поперечного сечения относительно центральных осей  $y_c$  и  $z_c$  равен сумме центробежных моментов инерции первой и второй фигур относительно этих осей

$$J_{y_c z_c} = J_{y_c z_c}^I + J_{y_c z_c}^{II}$$

$$J_{y_c z_c}^I = J_{y_1 z_1}^I + A_1 a_1 b_1 = 0 + 40 \cdot (-2,71) \cdot (-2,6) = 282 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c z_c}^{II} = J_{y_2 z_2}^{II} + A_2 a_2 b_2 = 537 + 37,4 \cdot 2,9 \cdot 2,79 = 840 \text{ см}^4$$

Следовательно, центробежный момент инерции заданного сложного поперечного сечения относительно центральных осей  $y_c$  и  $z_c$  равен

$$J_{y_c z_c} = 282 + 840 = 1122 \text{ см}^4 = 1120 \text{ см}^4$$

Моменты инерции заданного сложного поперечного сечения относительно центральных осей  $y_c$  и  $z_c$  найдены

$$J_{y_c} = 2860 \text{ см}^4; J_{z_c} = 1490 \text{ см}^4; J_{y_c z_c} = 1120 \text{ см}^4.$$

### Определение направления главных центральных осей

Направление главных центральных осей заданного сложного поперечного сечения определяется по формуле

$$\text{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{y_c z_c}}{J_{y_c} - J_{z_c}} = -\frac{2 \cdot 1120}{2860 - 1490} = -\frac{2240}{1360} = -1,6350 = -1,64;$$

$$2\alpha_0 = \text{arctg}(-1,64) = -58,6^\circ; \alpha_0 = \frac{-58,6^\circ}{2} = -29,3^\circ.$$

Знак « - » показывает, что угол  $\alpha_0$  откладывается от оси  $y_c$  по ходу часовой стрелки (для « + » – против хода часовой стрелки).

Проводим главные центральные оси  $u$  и  $v$ , как это показано на рис. 3.14.

### Определение величин главных моментов инерции

Моменты инерции относительно главных центральных осей вычисляются по следующим формулам

$$J_{\frac{max}{min}} = \frac{1}{2} \left[ (J_{y_c} + J_{z_c}) \pm \sqrt{(J_{y_c} - J_{z_c})^2 + 4J_{y_c z_c}^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ (2860 + 1490) \pm \sqrt{(2860 - 1490)^2 + 4 \cdot 1120^2} \right] = \frac{1}{2} [4350 \pm 2625,7];$$

$$J_{max} = \frac{1}{2} [4350 + 2625,7] = 3487,85 \text{ см}^4 = 3490 \text{ см}^4;$$

$$J_{min} = \frac{1}{2} [4350 - 2625,7] = 862,15 \text{ см}^4 = 860 \text{ см}^4.$$

Так как  $J_{y_c} > J_{z_c}$ , то

$$J_u = J_{max} = 3490 \text{ см}^4; \quad J_v = J_{min} = 860 \text{ см}^4.$$

### Контроль (проверки) правильности вычисления главных моментов инерции $J_u$ и $J_v$

Для проверки правильности вычисления главных моментов инерции  $J_u$  и  $J_v$  можно использовать равенства

$$J_u + J_v = J_{y_c} + J_{z_c} \quad \text{и} \quad J_{uv} = 0.$$

#### Проверка № 1:

$$J_u + J_v = J_{y_c} + J_{z_c} = \text{const.}$$

$$J_u + J_v = 3490 + 860 = 4350 \text{ см}^4; \quad J_{y_c} + J_{z_c} = 2860 + 1490 = 4350 \text{ см}^4.$$

Следовательно,

$$J_u + J_v = J_{y_c} + J_{z_c} = 4350 \text{ см}^4 = 4350 \text{ см}^4 (\pm 5\%).$$

Проверка выполняется.

#### Проверка № 2:

$$J_{uv} = \frac{(J_{y_c} - J_{z_c})}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{y_c z_c} \cos 2\alpha_0 = \frac{(2860 - 1490)}{2} \sin(-58,6^\circ) + 1120 \cdot \cos(-58,6^\circ) = -585 + 584 = -1 \text{ см}^4 (\pm 5\%).$$

Проверка выполняется.

Замечание. Следует иметь в виду, что с помощью этих равенств можно проверить правильность вычисления только направления главных центральных осей и численных значений главных моментов инерции. Соблюдение этих равенств не гарантирует правильности вычисления положения центра тяжести сечения, а также осевых и центробежного моментов инерции относительно его центральных осей.

В нашей задаче все проверки выполняются, следовательно, величины главных моментов инерции для заданного сложного поперечного сечения определены правильно.



### 3.3. Тема 3. Расчет балок на прочность при плоском поперечном изгибе

#### 3.3.1. Основные теоретические положения

В строительных конструкциях широко применяются элементы, работающие на изгиб. Характерным признаком изгиба является изменение кривизны продольной оси бруса.

Прямой брус (стержень), работающий на изгиб, называется балкой.

Определение. Сечения, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных к геометрической оси стержня, называются поперечными сечениями.

При изгибе балки продольные волокна, находящиеся на выпуклой части, растягиваются, а находящиеся на вогнутой части – сжимаются. Слой промежуточных волокон, которые, искривляясь, не изменяют своей длины, называется *нейтральным слоем*.

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной линией* или *нейтральной осью* (нулевой линией).

При действии на балку системы внешних сил, расположенных в плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции каждого поперечного сечения балки, и перпендикулярных к ее продольной оси, в каждом ее сечении могут возникать две внутренние силы – изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ . Эта плоскость называется *силовой плоскостью*.

Если в поперечных сечениях балки возникают одновременно изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ , то такой вид деформации называется *плоским поперечным изгибом*, если только изгибающий момент  $M$  – *чистым изгибом*.

В условиях чистого изгиба может находиться вся балка или отдельные ее участки.

#### Основные типы опор и балок

Для того чтобы балка могла воспринимать внешнюю нагрузку и передавать ее на основание, она должна быть соединена с ним опорными связями (опорами). Существует несколько основных типов опор:

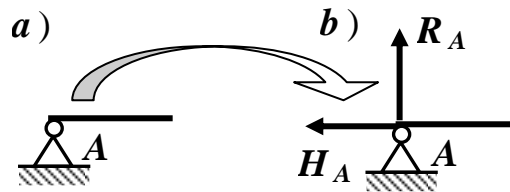
- **Защемление или заделка** (рис. 3.15, а)



**Рис. 3.15. Защемление или заделка**

Защемленный конец балки  $A$  не может смещаться ни поступательно (в горизонтальном и вертикальном направлениях), ни поворачиваться. В такой опоре возникает реакция, составляющими которой являются вертикальная сила  $R_A$ , препятствующая вертикальному смещению, горизонтальная сила  $H_A$ , исключаяющая горизонтальное смещение, и момент  $M_A$ , препятствующий повороту (рис. 3.15, б).

- **Цилиндрическая шарнирно - неподвижная опора** (рис. 3.16, а)

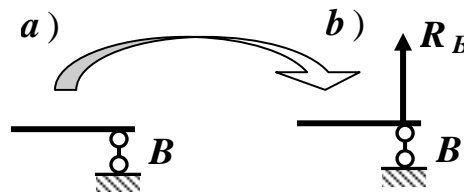


**Рис. 3.16. Шарнирно - неподвижная опора**

Эта опора не позволяет сечению балки в точке **A** иметь поступательные перемещения в горизонтальном и вертикальном направлениях, но при этом возможен поворот сечения в одной плоскости относительно оси цилиндрического шарнира. В такой опоре возникает реакция, составляющими которой являются вертикальная сила  $R_A$ , препятствующая вертикальному смещению, и горизонтальная сила  $H_A$ , исключающая горизонтальное смещение (рис. 3.16, б).

- **Цилиндрическая шарнирно - подвижная опора** (рис. 3.17, а)

Эта опора позволяет сечению балки в точке **B** поворачиваться вокруг шарнира и перемещаться в горизонтальном направлении, но не позволяет перемещаться по вертикали. В такой опоре возникает только реакция  $R_B$ , препятствующая вертикальному смещению (рис. 3.17, б).



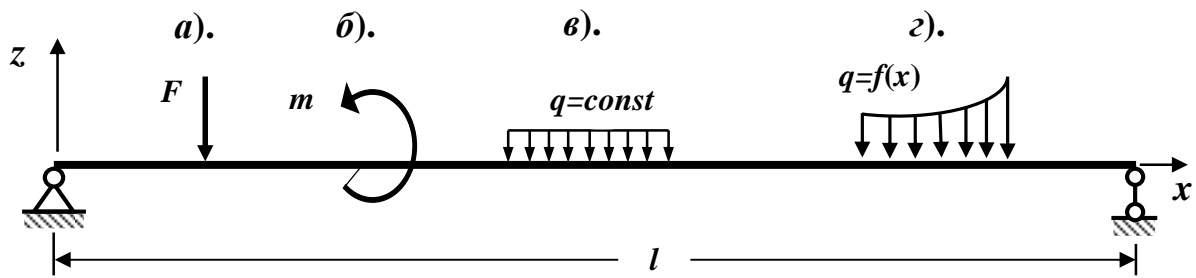
**Рис. 3.17. Шарнирно - подвижная опора**

Для обеспечения неподвижности балки, то есть, чтобы она могла сопротивляться приложенным внешним силам, необходимо зафиксировать один ее конец или в одном ее сечении устроить шарнирно – неподвижную опору, а в другом – шарнирно – подвижную опору.

*Таким образом, наименьшее число связей, не позволяющих балке перемещаться в плоскости действия нагрузок, равно трем.*

### **Основные виды внешних нагрузок, вызывающих изгиб балок**

На рис. 3.18 показаны различные виды внешних нагрузок, вызывающих изгиб: *a* – сосредоточенная сила; *б* – сосредоточенная пара сил с моментом  $m$  (кратко – сосредоточенный момент); *в* – равномерно распределенная нагрузка; *г* – неравномерно распределенная нагрузка.



**Рис. 3.18. Основные виды внешних нагрузок**

### Определение опорных реакций в балках

Для определения внутренних усилий и напряжений, возникающих в элементах любой конструкции, необходимо найти все действующие на нее нагрузки, а, следовательно, и все неизвестные опорные реакции.

Для определения опорных реакций для плоской системы сил можно, в общем случае, составить три уравнения равновесия (статики) в любых удобных комбинациях: нагрузки, а, следовательно, и все неизвестные опорные реакции.

Для определения опорных реакций для плоской системы сил можно, в общем случае, составить три уравнения равновесия (статики) в любых удобных комбинациях:

*а). Первая комбинация*

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 - \text{Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось } x \text{ равна нулю;} \\ \Sigma F_z &= 0 - \text{Сумма проекций всех сил на вертикальную ось } z \text{ равна нулю;} \\ \Sigma M_A &= 0 - \text{Сумма моментов всех сил относительно точки } A \text{ равна нулю.} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Уравнение  $\Sigma M_B = 0$  (Сумма моментов всех сил относительно точки **B** равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

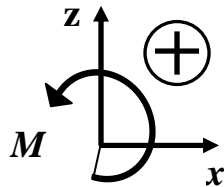
*б). Вторая комбинация*

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 - \text{Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось } x \text{ равна нулю;} \\ \Sigma M_A &= 0 - \text{Сумма моментов всех сил относительно точки } A \text{ равна нулю;} \\ \Sigma M_B &= 0 - \text{Сумма моментов всех сил относительно точки } B \text{ равна нулю.} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Уравнение  $\Sigma F_z = 0$  (Сумма проекций всех сил на вертикальную ось **z** равна нулю) используется для проверки правильности полученных результатов.

Уравнения равновесия нужно составлять так, чтобы в каждое уравнение, по возможности, входила только одна неизвестная опорная реакция. Это облегчит нахождение опорных реакций.

*Составляя уравнения равновесия (статики), обычно используют правило знаков, показанное на рис. 3.19, т.е. горизонтальные и вертикальные силы положительны, если их направления совпадают с направлениями осей **x** и **z**. Положительное направление моментов – против хода часовой стрелки.*



**Рис. 3.19. Правила знаков**

Определение. Балки, у которых все опорные реакции могут быть определены только из уравнений равновесия (статики), называются статически определимыми.

### **Внутренние силовые факторы при изгибе**

При действии на балку внешней нагрузки, перпендикулярной к геометрической оси балки и расположенной в одной из главных плоскостей инерции каждого поперечного сечения балки, в ее сечениях, в общем случае, возникают изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ .

Внутренние силовые факторы определяются через внешние силы, действующие на балку, с помощью метода сечений, применение которого позволяет сформулировать общие правила для нахождения указанных внутренних усилий на каждом участке балки.

Определение. Участком называется часть балки, в пределах которой закон (уравнение) изменения данного внутреннего усилия постоянен.

Границами участка являются точки приложения сосредоточенных сил, сосредоточенных моментов, точки начала и конца распределенной нагрузки.

Суть метода сечений сводится к следующему:

1. Мысленно проводим поперечное сечение, которое разбивает балку на две части.
2. Выбираем ту часть балки, на которую действуют известные нагрузки (наименьшее число известных нагрузок).

3. Составляем выражения для изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

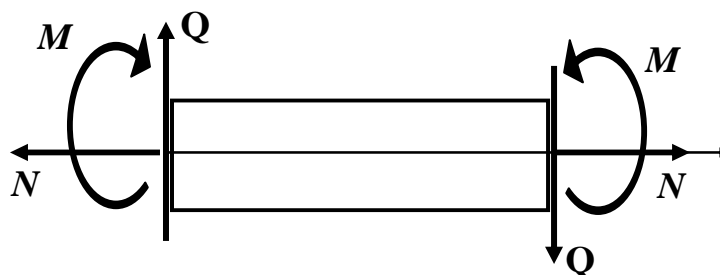
Определение. Изгибающий момент  $M$  в произвольном поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от проведенного сечения, относительно нейтральной оси этого поперечного сечения (или относительно той точки продольной оси балки, через которую проходит рассматриваемое сечение).

Определение. Поперечная сила  $Q$  в произвольном поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от проведенного сечения, на ось, перпендикулярную к геометрической оси балки.

### **Правила знаков внутренних силовых факторов для балок**

Правило знаков. Изгибающий момент  $M$  считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки (рис. 3.20).

Правило знаков. Поперечная сила  $Q$  считается положительной, если внешние силы стремятся вращать рассматриваемую часть балки относительно центра тяжести проведенного сечения по ходу часовой стрелки (рис. 3.20).



**Рис. 3.20. Положительные направления внутренних силовых факторов**

Изгибающий момент и поперечная для балок отрицательны, если направления этих силовых факторов противоположны направлениям, указанным на рис. 3.20.

### Эпюры внутренних силовых факторов

Для исследования напряженного состояния балки необходимо знать, как изменяются внутренние усилия ( $Q$  и  $M$ ) по длине балки.

Чтобы иметь наглядное представление об изменении  $Q$  и  $M$  по длине балки, строят эпюры этих внутренних усилий.

Определение. Графики, изображающие законы изменения  $Q$  и  $M$  вдоль геометрической оси балки, называются соответственно эпюрой поперечных сил и эпюрой изгибающих моментов.

Ординаты этих эпюр представляют собой численные значения  $Q$  и  $M$  в соответствующих сечениях балки.

При построении эпюр  $Q$  и  $M$  в статически определимых системах рекомендуется следующий общий порядок действий:

1. Определяем опорные реакции из уравнений равновесия (статики).
2. Разбиваем расчетную схему балки на участки.
3. Применяя метод сечений, мысленно проводим поперечное сечение в пределах рассматриваемого участка, которое разбивает балку на две части.

Выбираем ту часть балки, на которую действует наименьшее число известных нагрузок. Для определения внутренних усилий в сечении совершенно безразлично, какую часть балки рассматривать. Величины внутренних усилий будут одни и те же.

4. Составляем выражения (уравнения), показывающие закон изменения в пределах рассматриваемого участка поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

5. По этим выражениям вычисляем численные значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях участка (на его границах). Если функциональная зависимость указанных силовых факторов нелинейная, вычисление производим еще и в промежуточной точке, например, в середине участка или в сечении, где функция достигает экстремального значения.

6. По полученным численным значениям поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  строим эпюры (графики) этих внутренних усилий.

Эюра каждого внутреннего усилия строится на отдельной линии (базисной прямой), параллельной геометрической оси балки. Для балок эпюры располагаются непосредственно под ней.

В проектных строительных организациях при построении эпюр для балок положительные значения поперечных сил  $Q$  откладываются вверх от базисной прямой, а отрицательные значения – вниз. Положительные значения изгибающих моментов  $M$  откладываются со стороны «растянутых» волокон, то есть вниз от базисной прямой, а отрицательные значения – со стороны «сжатых» волокон, то есть вверх.

Таким образом, *эюра изгибающих моментов  $M$  строится на «растянутом» волокне.*

На поле эпюры между графиком и базисной прямой ставится знак внутреннего усилия и проводятся ординаты.

7. Делаем проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов.

8. Отмечаем опасные сечения балки, где действуют максимальные (наибольшие) по абсолютной величине значения внутренних силовых факторов.

### **Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для балок**

Дифференциальные зависимости Д.И. Журавского между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью внешней распределенной нагрузки определяют связь между эпюрами  $M$  и  $Q$ , построенными от любой внешней нагрузки. Эта взаимная связь имеет важное практическое значение для контроля правильности выполненного построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо.*

- «Скачки» на эпюре  $Q$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре  $Q$  имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз имеется «скачок» вниз.

- «Скачки» на эпюре  $M$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вверх.

- На участках балки, на которых поперечная сила  $Q$  положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила  $Q$  отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на участках балки, где поперечная сила  $Q$  равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ( $M = const$ ).

- Изгибающий момент  $M$  достигает  $\max$  или  $\min$  ( $M_{экстр}$ ) в тех сечениях балки, где поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).

- На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов  $M$  на этом участке ограничена кривой.
- На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  отсутствует, поперечная сила  $Q$  постоянная ( $Q = const$ ), а эпюра изгибающих моментов  $M$  изменяется по линейному закону.

### Расчет балок на прочность

#### а). Нормальные напряжения при изгибе

При действии на балку внешней нагрузки, перпендикулярной геометрической оси балки и расположенной в одной из главных плоскостей инерции каждого поперечного сечения балки, в ее сечениях, в общем случае, возникают одновременно изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ .

Изгибающий момент  $M$  в поперечном сечении балки вызывает нормальные напряжения, которые определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z, \quad (3.35)$$

где

$\sigma$  – нормальное напряжение в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения балки;

$M_y$  – изгибающий момент в исследуемом поперечном сечении балки;

$I_y$  – главный момент инерции поперечного сечения относительно главной оси  $y$ ;

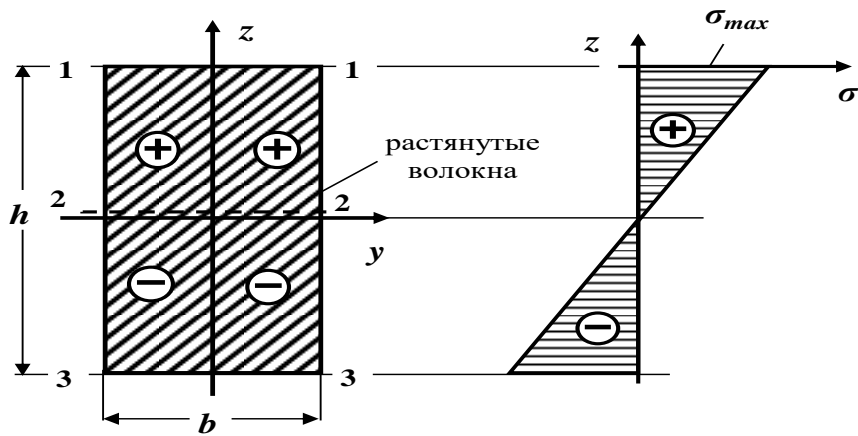
$z$  – координата точки поперечного сечения, в которой определяется нормальное напряжение.

Формула (3.35) позволяет определять величину нормального напряжения  $\sigma$  в любой точке рассматриваемого поперечного сечения балки.

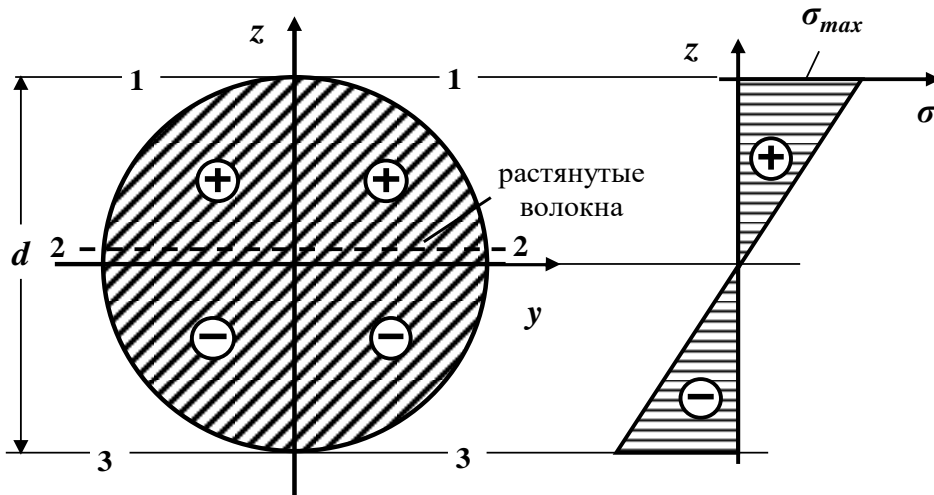
Если в формуле (3.35) учитывать знаки изгибающего момента  $M_y$  и координаты  $z$ , то эта формула позволяет определять численное значение нормального напряжения  $\sigma$  и его знак.

Правило знаков. Изгибающий момент  $M_y$  считается положительным, если он вызывает растяжение в точках первой четверти рассматриваемого поперечного сечения балки.

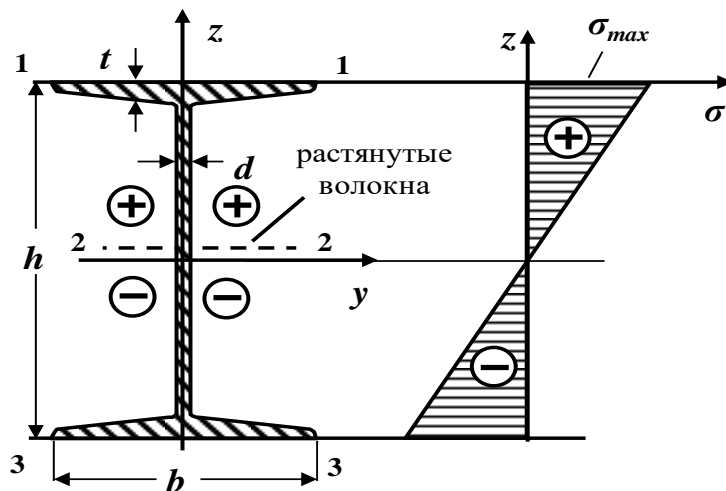
Определим нормальные напряжения в характерных точках поперечного сечения балки, лежащих на линиях **1 – 1**, **2 – 2** и **3 – 3** (рис. 3.21 ÷ 3.23).



**Рис. 3.21. Эпюра нормальных напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения балки**



**Рис. 3.22. Эпюра нормальных напряжений по высоте круглого поперечного сечения балки**



**Рис. 3.23. Эпюра нормальных напряжений по высоте двутаврового поперечного сечения балки**



В точках поперечного сечения, лежащих на линиях **1 – 1** и **3 – 3**, т.е. наиболее удаленных от главной оси ( $z = z_{max}$ ), возникают наибольшие нормальные напряжения

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max}. \quad (3.36)$$

Обозначая  $\frac{I_y}{|z_{max}|} = W_y$ , получаем формулу для определения максимальных напряжений в произвольном поперечном сечении балки

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y}. \quad (3.37)$$

В этих формулах

$I_y$  – главный момент инерции поперечного сечения относительно оси  $y$ ;

$|z_{max}|$  – максимальное расстояние, измеряемое по оси  $z$  от главной оси  $y$  до наиболее удаленной точки поперечного сечения;

$W_y$  – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно главной оси  $y$ .

*Опасными точками поперечного сечения называются точки, напряжения в которых достигают наибольших по величине значений.*

В точках **2 – 2** поперечного сечения балки, лежащих на главной оси  $y$  (на нейтральной оси), нормальные напряжения равны нулю.

Определение. Нейтральной осью (нулевой линией) называется геометрическое место точек поперечного сечения балки, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Нейтральная ось при плоском изгибе проходит через центр тяжести поперечного сечения перпендикулярно к силовой линии.

Максимальное напряжение в балке возникает в сечении, где изгибающий момент достигает наибольшей по модулю величины, то есть в опасном сечении.

Определение. Сечение, в котором изгибающий момент принимает максимальное по абсолютной величине значение  $M_{max}$ , называется опасным сечением балки по нормальным напряжениям.

Таким образом, наибольшие нормальные напряжения возникают *в опасных точках опасного сечения балки*

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \quad (3.38)$$

Построим эпюры нормальных напряжений  $\sigma$  для некоторых типов поперечных сечений.

Определение. График, изображающий закон изменения напряжений  $\sigma$  по высоте поперечного сечения, называется эпюрой нормальных напряжений.

Как следует из формулы (3.35), нормальные напряжения  $\sigma$  зависят линейно от координаты  $z$ , и по высоте поперечного сечения закон изменения нормальных напряжений представляет прямую линию.

На рис. 3.21 ÷ 3.23 показаны в общем виде эпюры нормальных напряжений  $\sigma$  для прямоугольного, круглого и двутаврового поперечных сечений балки /для случая растянутых верхних волокон/.

### Расчет балок на прочность по нормальным напряжениям

Размеры элементов конструкций (поперечные сечения и длина) необходимо подбирать такими, чтобы под действием внешних нагрузок они не разрушались и не получали деформаций выше допустимого предела.

В условиях массового строительства также возникает проблема экономии строительных материалов при полной гарантии прочности конструкций.

Для безопасной работы конструкции необходимо, чтобы максимальные напряжения, возникающие в ее элементах, были ниже предельных значений.

Поэтому при проектировании необходимо правильно установить напряжения, обеспечивающие безопасность конструкции.

В настоящее время применяются, в основном, два метода расчета на прочность: *по допускаемым напряжениям и по предельным состояниям*.

Оба метода преследуют одну цель – обеспечить сооружению прочность и долговечность.

Первый метод еще недавно широко использовался в строительном деле и частично используется в настоящее время. По этому методу размеры элементов конструкции должны быть такими, чтобы во всех сечениях напряжения, вызываемые нагрузкой, не превышали допустимой величины.

Второй, более прогрессивный метод расчета по предельным состояниям был разработан советскими учеными. В настоящее время он является основным методом, применяемым при проектировании сооружений в нашей стране. Нормами установлены три вида предельных состояний. В сопротивлении материалов рассматривается главным образом первое предельное состояние, связанное с прочностью конструкции, и отчасти второе, зависящее от развития чрезмерных деформаций, нарушающих нормальную эксплуатацию конструкции.

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям *по методу допускаемых напряжений* имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (3.39)$$

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям *по методу предельных состояний* имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot n}{W_y} \leq R^H \cdot k \cdot m_B. \quad (3.40)$$

В этих формулах

$\sigma_{max}$  – максимальное нормальное напряжение;

$M_{max}$  – наибольшее по абсолютной величине значение изгибающего момента (определяется по эпюре изгибающих моментов);

$W_y$  – момент сопротивления поперечного сечения относительно главной оси  $y$  (горизонтальная ось);

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение материала элементов конструкции;

$R^H$  – нормативное сопротивление материала элементов конструкции;

$n$  – коэффициент перегрузки;

$k$  – коэффициент однородности материала элементов конструкции;

$m_B$  – коэффициент условий работы элементов конструкции.

Величина допускаемых напряжений  $[\sigma]$  назначается в зависимости от материала, из которого изготовлена балка.

Пластичные материалы обладают примерно равными пределами текучести на сжатие и на растяжение, поэтому  $[\sigma_c] = [\sigma_p] = [\sigma]$ .

Для хрупких материалов, у которых прочность на сжатие выше, чем на растяжение, допускаемые напряжения на растяжение и сжатие, как правило, не равны между собой  $[\sigma_c] \geq [\sigma_p]$  и, поэтому, необходимо записывать два условия прочности

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_y} \cdot z_{max_p} \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_y} \cdot z_{max_c} \leq [\sigma_c],$$

где

$z_{max_p}$  и  $z_{max_c}$  – расстояния (координаты) от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутых и сжатых волокон.

Величина  $R$ , равная

$$R = R^H \cdot k \cdot m_B, \quad (3.41)$$

называется *расчетным сопротивлением* материала элементов конструкции.

В зависимости от цели расчета различают три вида расчетов на прочность:

1). *Проектный расчет*. В этом случае известны внешняя нагрузка и материал элементов конструкции ( $[\sigma]$  или  $R^H$ ). По заданной нагрузке определяют наибольший изгибающий момент  $M_{max}$  (по эпюре изгибающих моментов) и из условия прочности (3.39) или (3.40) находят величину требуемого момента сопротивления поперечного сечения по формулам:

а). По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям

$$W_y^{треб} \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} \quad (3.42)$$

б). По методу расчета на прочность по предельным состояниям

$$W_y^{треб} \geq \frac{M_{max} \cdot n}{R^H \cdot k \cdot m_B}. \quad (3.43)$$

По полученной величине требуемого момента сопротивления  $W_y^{треб}$  подбирают размеры поперечных сечений балки таким образом, чтобы действительный момент сопротивления  $W_y$  примерно равнялся бы требуемому  $W_y^{треб}$ , т. е.

$$W_y \approx W_y^{\text{треб}}.$$

Как известно, момент сопротивления  $W_y$  для простых поперечных сечений определяется по формулам через размеры сечения или по сортаментам для прокатных профилей.

Подбор сечения производят следующим образом:

- если балка проектируется из прокатного профиля, то необходимый номер профиля берется по таблицам сортамента прокатных сталей в зависимости от величины требуемого момента сопротивления  $W_y^{\text{треб}}$ ;
- в случае подбора круглого сплошного сечения балки диаметром  $d$ , известно, что момент сопротивления  $W_y$  определяется по формуле

$$W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Приравнивая  $W_y \approx W_y^{\text{треб}}$ , находят требуемый диаметр балки

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_y^{\text{треб}}}{\pi}}.$$

- в случае подбора прямоугольного поперечного сечения балки размером  $b$  х  $h$ , предварительно задаются соотношением  $\beta = h / b$ , т.е.  $h = \beta \cdot b$ .

Известно, что момент сопротивления  $W_y$  для прямоугольного поперечного сечения балки определяется по формуле

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (\beta \cdot b)^2}{6} = \frac{\beta^2 \cdot b^3}{6}.$$

Приравнивая  $W_y \approx W_y^{\text{треб}}$ , находят требуемые размеры балки

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot W_y^{\text{треб}}}{\beta^2}}; \rightarrow h = \beta \cdot b.$$

2). Определение допустимой нагрузки. В этом случае известны размеры поперечного сечения ( $W_y$ ) и материал элементов конструкции ( $[\sigma]$  или  $R^H$ ).

Из условия прочности (3.39) или (3.40) находят наибольшую допустимую величину изгибающего момента:

- а). По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям

$$M_{\max} = [M_{\max}] \leq W_y \cdot [\sigma]. \quad (3.44)$$

- б). По методу расчета на прочность по предельным состояниям

$$M_{max} = [M_{max}] \leq W_y \cdot R^H \cdot k \cdot m_B \cdot 1/n. \quad (3.45)$$

По найденному допускаемому значению изгибающего момента  $[M_{max}]$  определяется допускаемое значение внешней нагрузки.

3). *Проверочный расчет.* В этом случае известны внешняя нагрузка, размеры поперечного сечения ( $W_y$ ) и материал элементов конструкции ( $[\sigma]$  или  $R^H$ ).

Требуется определить наибольшее нормальное напряжение, возникающее в элементах конструкции, и сравнить с допускаемым напряжением, т.е. проверить выполнение условия прочности (3.39) или (3.40):

а). По методу расчета на прочность по допускаемым напряжениям

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq [\sigma].$$

б). По методу расчета на прочность по предельным состояниям

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot n}{W_y} \leq R^H \cdot k \cdot m_B.$$

### б). Касательные напряжения при изгибе

При плоском изгибе в поперечных сечениях балки наряду с нормальными напряжениями  $\sigma$ , вызванными изгибающим моментом  $M_y$ , возникают и касательные напряжения  $\tau$ , вызванные поперечными силами  $Q$ . При этом предполагают, что по ширине поперечного сечения балки касательные напряжения  $\tau$  распределяются равномерно, и пренебрегают его искривлениями.

Касательные напряжения  $\tau$  в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения балки при плоском изгибе определяются по формуле Д.И. Журавского

$$\tau = \frac{Q \cdot S_y^{отс}}{b(z) \cdot I_y} \quad (3.46)$$

где

$Q$  – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$S_y^{отс}$  – абсолютное значение статического момента «отсеченной» части поперечного сечения балки относительно главной оси  $y$ ;

$b(z)$  – ширина поперечного сечения на уровне рассматриваемой точки;

$I_y$  – главный момент инерции поперечного сечения балки.

$z$  – координата точки поперечного сечения, в которой определяется касательное напряжение.

*Определение.* «Отсеченной» частью поперечного сечения балки является часть поперечного сечения, расположенная по одну сторону от прямой, проведенной через исследуемую точку параллельно нейтральной оси (главной оси  $y$ ).

В любом поперечном сечении балки статический момент отсеченной части  $S_y^{отс}$  для самых отдаленных от нейтральной оси (главной оси  $y$ ) точек сечения равен нулю, поэтому касательные напряжения  $\tau$  в них равны нулю.

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси (главной оси  $y$ ),  $S_y^{\text{отс}} = S_y^{1/2} = S_{\text{max}}$ , следовательно, касательные напряжения в них достигают максимальных значений (*опасные точки*).

Здесь  $S_y^{1/2}$  – статический момент половины поперечного сечения.

*Сечение, в котором поперечная сила принимает максимальное по абсолютной величине значение, называется опасным сечением балки по касательным напряжениям.*

Таким образом, *наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки*

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_{\text{max}} \cdot S_y^{1/2}}{b(z) \cdot I_y} \quad (3.47)$$

Рассмотрим распределение касательных напряжений при плоском изгибе по высоте некоторых типов поперечных сечений (эпюры  $\tau$ ).

В отличие от нормальных напряжений распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения зависит от формы сечения.

Определение. График, изображающий закон изменения напряжений  $\tau$  по высоте поперечного сечения, называется эпюрой касательных напряжений.

Из формулы (3.46) видно, что касательные напряжения в балке изменяются по высоте поперечного сечения по тому же закону, что  $\frac{S_y^{\text{отс}}}{b(z)}$ .

### Прямоугольное поперечное сечение

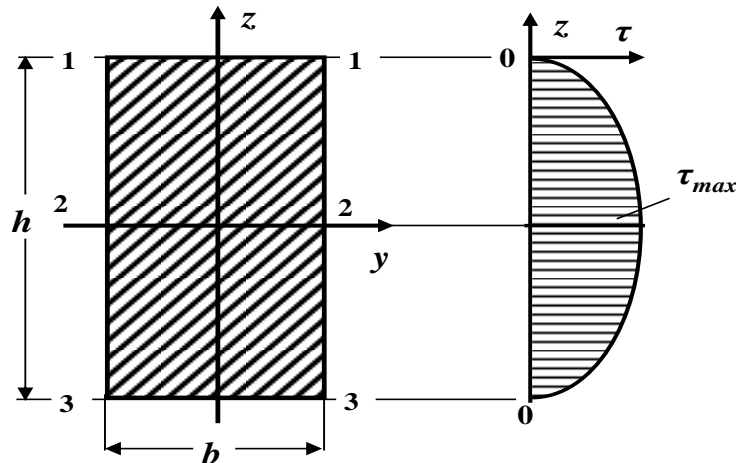
В прямоугольном сечении  $b(z) = b = \text{const}$ , поэтому закон распределения будет таким же, что и для статического момента «отсеченной» части поперечного сечения  $S_y^{\text{отс}}$ .

Касательные напряжения в произвольной точке прямоугольного поперечного сечения балки с координатой  $z$  вычисляются по формуле

$$\tau = \frac{Q S_y^{\text{отс}}}{b(z) J_y} = \frac{6Q}{bh^3} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (3.48)$$

Эта формула показывает, что касательные напряжения по высоте прямоугольного поперечного сечения изменяются по закону квадратной параболы.

Определим касательные напряжения в характерных точках поперечного сечения балки, лежащих на линиях **1 – 1**, **2 – 2** и **3 – 3** (рис. 3.24).



**Рис. 3.24. Эпюра касательных напряжений для прямоугольного поперечного сечения балки**

В точках поперечного сечения, лежащих на линиях **1 – 1** и **3 – 3**, т.е. наиболее удаленных от нейтральной оси (**при  $z = \pm \frac{h}{2}$** ), касательные напряжения равны нулю.

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси **2 – 2** (**при  $z = 0$** ), возникают наибольшие касательные напряжения (**опасные точки**).

Следовательно,

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}. \quad (3.49)$$

В этой формуле

$\tau_{max}$  – максимальное касательное напряжение;

$Q$  – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$A = b \cdot h$  – площадь прямоугольного поперечного сечения балки.

Так как, *наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки*, то для нахождения самых больших по величине касательных напряжений в балке необходимо в формулу (3.49) подставить  $Q = Q_{max}$

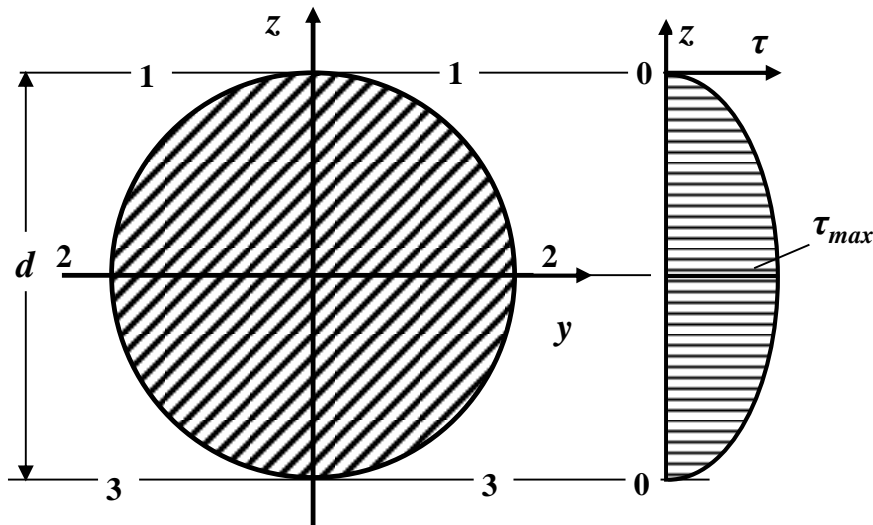
$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{max}}{A} \quad (3.50)$$

На рис. 3.24 показан общий вид эпюры касательных напряжений  $\tau$  для прямоугольного поперечного сечения балки.

### Круглое поперечное сечение

Предполагается, что вертикальные проекции касательных напряжений равномерно распределены по ширине круглого сечения. Эти составляющие касательного напряжения определяются по формуле (3.46). Эта формула показывает, что касательные напряжения по высоте круглого поперечного сечения также изменяются по закону квадратной параболы.

Определим касательные напряжения в характерных точках поперечного сечения балки, лежащих на линиях **1 – 1**, **2 – 2** и **3 – 3** (рис. 3.25).



**Рис. 3.25. Эпюра касательных напряжений для круглого поперечного сечения балки.**

В точках круглого поперечного сечения, лежащих на линиях **1 – 1** и **3 – 3**, то есть наиболее удаленных от нейтральной оси (**при  $z = \pm \frac{d}{2}$** ), касательные напряжения равны нулю, так как  $S_y^{\text{отс}} = 0$ .

В точках поперечного сечения балки, лежащих на нейтральной оси **2 – 2** (**при  $z = 0$** ), возникают наибольшие касательные напряжения (**опасные точки**), так как  $S_y^{\text{отс}} = S_y^{1/2} = S_{\text{max}}$ .

Здесь  $S_y^{1/2}$  – статический момент половины поперечного сечения относительно главной оси **y**.

Максимальное касательное напряжение для круглого поперечного сечения балки можно вычислить по формуле

$$\tau_{\text{max}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A}. \quad (3.51)$$

В этой формуле

$\tau_{\text{max}}$  – максимальное касательное напряжение;

$Q$  – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$A = \frac{\pi d^2}{4}$  – площадь круглого поперечного сечения балки.

Так как, *наибольшие касательные напряжения возникают в опасных точках опасного сечения балки*, то для нахождения самых больших по величине касательных напряжений в балке необходимо в формулу (3.51) подставить  $Q = Q_{\text{max}}$ .



$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{max}}{A}. \quad (3.52)$$

На рис. 3.25 показан общий вид эпюры касательных напряжений  $\tau$  для круглого поперечного сечения балки.

### Двутавровое поперечное сечение

Характерной особенностью этого сечения является резкое изменение ширины сечения при переходе от стенки двутавра к его полке.

При определении касательных напряжений в **полке** двутавра необходимо иметь в виду, что для их определения нельзя использовать формулу Д.И. Журавского (3.46), так как предположение о равномерности распределения касательных напряжений по ширине полки здесь не выполняется. Таким образом, вопрос о величине и законе распределения касательных напряжений в полках двутавра остается неразрешенным. Однако, ввиду того, что в этих сечениях касательные напряжения невелики, то их обычно не вычисляют.

Значительно больший интерес представляют касательные напряжения в **стенке** двутавра, так как, в основном, поперечную силу воспринимает стенка.

Касательные напряжения в этом случае можно определять по формуле Д.И. Журавского (3.46)

$$\tau = \frac{Q \cdot S_y^{отс}}{b(z) \cdot I_y}$$

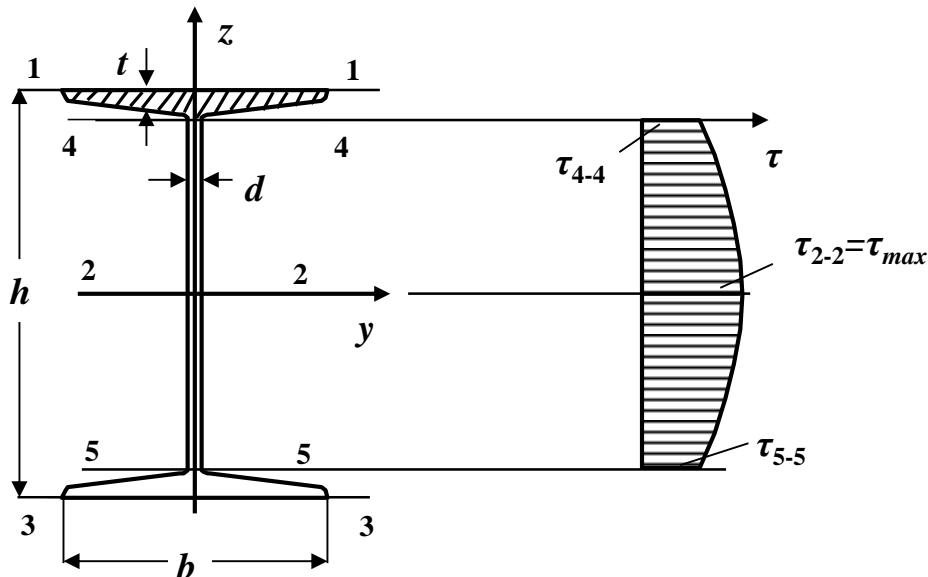
Для этого обычно определяют численные значения касательных напряжений в характерных точках поперечного сечения, лежащих на линиях **4 – 4**, **2 – 2** и **5 – 5 стенки двутавра** (рис. 3.26).

Максимальные касательные напряжения возникают в точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии **2 – 2** (на главной оси  $y$ ) двутавра (**опасные точки**). Отсеченная часть фигуры, в этом случае, – верхняя половина поперечного сечения,

поэтому  $S_y^{отс} = S_y^{1/2}$ ,

где

$S_y^{1/2}$  – статический момент половины сечения относительно главной оси  $y$ . (Для прокатных профилей эта величина приводится в соответствующем сортаменте).



**Рис. 3.26. Эпюра касательных напряжений для двутаврового поперечного сечения балки**

Для определения касательных напряжений в точках, лежащих на линиях **4 – 4** и **5 – 5**, находят статический момент полки (отсеченная часть сечения – заштрихованная полочка двутавра, рис. 3.26)

$$\begin{aligned} S_y^{\text{отс}} = S_y^{\text{полки}} &= S_y^{1/2} - S_y^{1/2 \text{ стенки}} = S_y^{1/2} - d \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right) = \\ &= S_y^{1/2} - \frac{d}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right)^2. \end{aligned}$$

По полученным численным значениям  $\tau$  в сечениях **2 – 2**, **4 – 4** и **5 – 5** строят эпюру касательных напряжений по высоте стенки двутавра (рис.3.26).

В балках сплошного сечения чаще всего величина касательных напряжений по сравнению с нормальными напряжениями невелика, и большей частью производить проверку прочности балки по касательным напряжениям нет необходимости.

В коротких балках, сильно нагруженных вблизи опор, и в балках тонкостенного профиля касательные напряжения могут иметь сравнительно большую величину.

Поэтому на практике обычно подбирают размеры поперечного сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям, а затем уже проверяют, удовлетворяет ли выбранное сечение балки условию прочности по касательным напряжениям.

В этом случае проверка прочности по методу допускаемых касательных напряжений производится по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_y^{1/2}}{b(z) \cdot I_y} \leq [\tau], \quad (3.53)$$

где

$[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение при изгибе.

Для стальных балок обычно принимают допускаемое касательное напряжение  $[\tau] \approx 0,6 \cdot [\sigma]$ .

### Контрольные вопросы для самопроверки по теме

#### «Расчет балок на прочность при плоском поперечном изгибе»

1. Какой вид деформации называется изгибом?
2. Какой случай изгиба называется чистым изгибом?
3. Какой случай изгиба называется плоским поперечным изгибом?
4. В каком случае изгиб называется прямым?
5. Что происходит с продольными волокнами материала при изгибе?
6. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях балки?
7. Чему равен изгибающий момент в произвольном сечении балки?
8. Чему равна поперечная сила в произвольном сечении балки?
9. Как определяется знак поперечной силы и изгибающего момента в поперечном сечении балки?
10. Что называется силовой плоскостью (силовой линией)?
11. Что называется нейтральной (нулевой) линией?
12. Что называется эпюрой поперечной силы и изгибающего момента?
13. Для чего строятся эпюры внутренних усилий при изгибе?
14. План построения эпюр внутренних усилий при изгибе.
15. Перечислите проверки правильности построенных эпюр внутренних усилий при изгибе.
16. Назовите гипотезы, которые принимаются при выводе формулы нормальных напряжений при чистом изгибе.
17. Формула для определения нормальных напряжений в произвольной точке поперечного сечения балки.
18. Как определяется опасное сечение балки по нормальным напряжениям?
19. Как определяются опасные точки поперечного сечения балки по нормальным напряжениям?
20. Напишите условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений. Какие задачи решаются с помощью этого условия?
21. Что называется эпюрой напряжения?
22. Эпюра нормальных напряжений при изгибе. Как с помощью этой эпюры определить напряжения в произвольной точке поперечного сечения балки?
23. Формула Журавского Д.И. для определения касательных напряжений при изгибе.
24. Какой вид имеют эпюры касательных напряжений для поперечных сечений балки прямоугольной формы, для стенки двутавра?

*После изучения этой темы можно приступить к решению задачи № 3, включенной в контрольную работу.*

### 3.3.2. Пример решения задачи № 3

#### «Расчет балок прочность»

Для заданных двух схем балок (рис. 3.27 и 3.31) требуется:

1. Определить опорные реакции.
2. Для каждого участка балки составить выражения поперечных сил ( $Q$ ) и изгибающих моментов ( $M$ ). Построить их эпюры.
3. Сделать проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов.
4. Определить опасные сечения балки по нормальным и касательным напряжениям.
5. Из условия прочности по методу допускаемых нормальных напряжений при изгибе подобрать:
  - а) для схемы (а) деревянную балку круглого поперечного сечения, приняв допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ ;
  - б) для схемы (б) стальную балку двутаврового поперечного сечения, приняв допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .
6. Проверить прочность подобранных балок по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений.
7. Проверить прочность подобранных балок по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений, приняв для схемы (а) допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 2 \text{ МПа}$ , а для схемы (б) допускаемое касательное напряжение  $[\tau] \approx 0,6 \cdot [\sigma]$ .
8. Для опасных сечений балок построить эпюры нормальных и касательных напряжений по высоте поперечного сечения.

### СХЕМА (а)

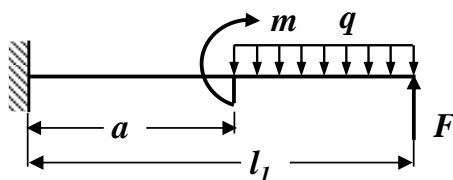


Рис. 3.27. Схема балки

#### Исходные данные:

$$l_1 = 4 \text{ м}; \quad a / l_1 = 0,5; \quad q = 10 \text{ кН/м};$$

$$m = 8 \text{ кНм}; \quad F = 15 \text{ кН};$$

$$[\sigma] = 10 \text{ МПа} = 1 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right).$$

### Решение

#### Определение опорных реакций

Для консольных балок, в виде исключения, опорные реакции  $R_A$ ,  $H_A$ , и  $M_A$  можно не определять, а вести дальнейший расчет со стороны свободного конца балки. Численные значения опорных реакций, в случае необходимости, можно определить по эпюрам  $Q$  и  $M$ , используя правило «скачков».

#### Построение эпюр поперечной силы $Q$ и изгибающего момента $M$

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

Разбиваем расчетную схему балки на участки. В нашем примере балка имеет два участка ( $AB$  и  $BC$ ), которые пронумеруем справа налево (рис. 3.28).

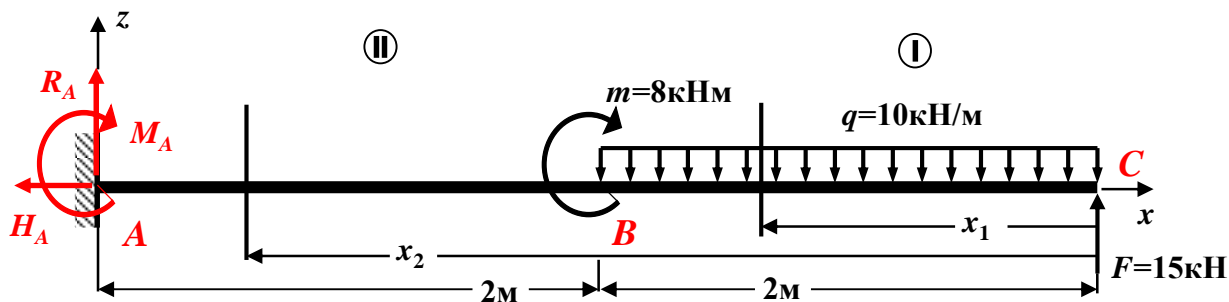


Рис. 3.28. Расчетная схема балки

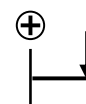
Проводим сечение на каждом участке и рассматриваем правую от проведенного сечения часть балки (рис. 3.28), так как слева от сечения опорные реакции неизвестны.

**I участок CB:**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{ м}$  (начало отсчета на правом конце балки).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на первом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_1) = -F + q \cdot x_1 = -15 + 10 \cdot x_1.$$



Здесь  $q \cdot x_1$  – равнодействующая сила распределенной нагрузки  $q$ , расположенная справа от сечения посередине участка длиной  $x_1$ .

Поперечная сила  $Q$  на первом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = -15 + 10 \cdot 0 = -15 \text{ кН (значение на правой границе участка);}$$

$$Q(2\text{ м}) = -15 + 10 \cdot 2 = +5 \text{ кН (значение на левой границе участка).}$$

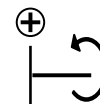
Поскольку поперечная сила  $Q$  меняет знак в пределах участка, определяем координату сечения, в котором она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент  $M$  принимает экстремальное значение)

$$Q(x_0) = -15 + 10 \cdot x_0 = 0; \quad x_0 = 15/10 = 1,5 \text{ м; } \rightarrow x_0 = 1,5 \text{ м.}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на первом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$\begin{aligned} M(x_1) &= F \cdot x_1 - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = 15 \cdot x_1 - 10 \cdot \frac{x_1^2}{2} = 15 \cdot x_1 - 5x_1^2 = \\ &= x_1 \cdot (15 - 5 \cdot x_1). \end{aligned}$$



Изгибающий момент  $M$  на первом участке является квадратичной функцией координаты  $x_1$ . Для построения ее графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка и в найденном сечении с координатой  $x_0 = 1,5 \text{ м}$

$$M(0) = 0 \text{ кНм (значение на правой границе участка);}$$

$M_{\text{экстр.}} = M(1,5\text{ м}) = +1,5 \cdot (15 - 5 \cdot 1,5) = +11,25 \text{ кН} \cdot \text{м} = +11,3 \text{ кНм}$  (значение в сечении балки с координатой  $x_0 = 1,5 \text{ м}$ );

$$M(2\text{ м}) = 2 \cdot (15 - 5 \cdot 2) = +10 \text{ кНм (значение на левой границе участка).}$$

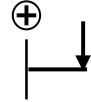
**II участок BA:**  $2\text{ м} \leq x_2 \leq 4\text{ м}$  (начало отсчета на правом конце балки).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на втором участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки.

При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_2) = -F + q \cdot 2 = -15 + 10 \cdot 2 = +5 \text{ кН.}$$



Поперечная сила  $Q$  на втором участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(2\text{ м}) = +5 \text{ кН (значение на правой границе);}$$

$$Q(4\text{ м}) = +5 \text{ кН (значение на левой границе).}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на втором участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_2) = F \cdot x_2 - q \cdot 2 \cdot (x_2 - 1) - m = 15 \cdot x_2 - 20(x_2 - 1) - 8 = -5 \cdot x_2 + 12.$$

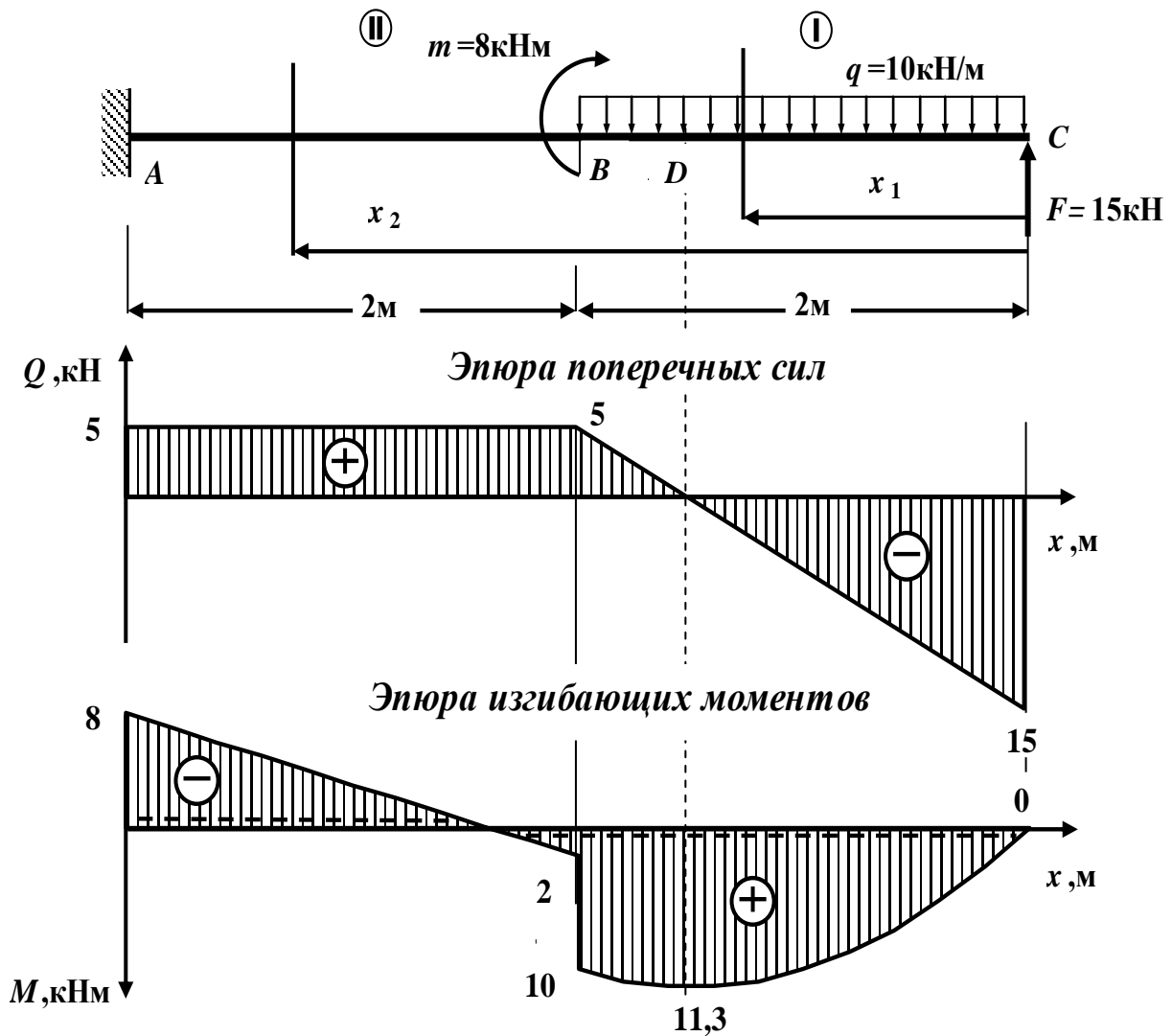


Изгибающий момент  $M$  на втором участке является линейной функцией координаты  $x_2$ . Для построения ее графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$$M(2\text{ м}) = -5 \cdot 2 + 12 = +2 \text{ кНм (значение на правой границе);}$$

$$M(4\text{ м}) = -5 \cdot 4 + 12 = -8 \text{ кНм (значение на левой границе).}$$

По полученным численным значениям  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях балки строим в масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, как показано на рис. 3.29.



**Рис. 3.29. Эпюры поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$**

Длину балки, а также эпюры поперечной силы и изгибающего момента необходимо вычертить в масштабе. Приведем один из возможных вариантов:

масштаб длины балки: 1 см - 0,5 м; масштаб оси  $Q$ : 1 см - 10 кН; масштаб оси  $M$ : 1 см - 5 кНм.

В проектных строительных организациях эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне, т.е. положительные значения изгибающих моментов откладываются вниз от базисной прямой.

На эпюре  $M$  вместе со знаком пунктиром показаны положения растянутых волокон.

### Контроль (проверки) правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо*.

- «Скачки» на эпюре  $Q$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на

эпюре  $Q$  имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз имеется «скачок» вниз.

- «Скачки» на эпюре  $M$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вверх.

- На участках балки, на которых поперечная сила  $Q$  положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила  $Q$  отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на участках балки, где поперечная сила  $Q$  равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ( $M = const$ ).

- Изгибающий момент  $M$  достигает  $\max$  или  $\min$  ( $M_{экстр}$ ) в тех сечениях балки, где поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).

- На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов  $M$  на этом участке ограничена кривой.

- На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  отсутствует, поперечная сила  $Q$  постоянная ( $Q = const$ ), а эпюра изгибающих моментов  $M$  изменяется по линейному закону.

*В нашей задаче все эти положения выполняются, следовательно, эпюры внутренних силовых факторов построены правильно.*

### Подбор круглого сечения деревянной балки по методу допускаемых напряжений

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид (3.39)

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq [\sigma].$$

В этой формуле

$\sigma_{max}$  – максимальное нормальное напряжение;

$M_{max}$  – максимальное по абсолютной величине значение изгибающего момента (определяется по эпюре изгибающих моментов);

$W_y$  – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно главной оси  $y$ ;

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

Из условия прочности определяем требуемую величину момента сопротивления поперечного сечения балки (3.42)

$$W_y^{треб} \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}$$

Размеры поперечного сечения балки подбираются из условия



$$W_y \approx W_y^{треб}.$$

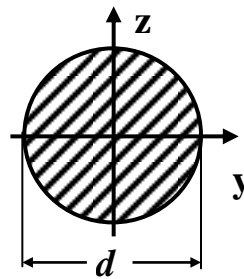
В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение **D**, рис. 3.29)

$$M_{max} = 11,3 \text{ кНм} = 11,3 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}.$$

Используя неравенство (3.42), определяем требуемую величину момента сопротивления поперечного сечения балки

$$\begin{aligned} W_y^{треб} &\geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} \geq \frac{11,3 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{10 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = \\ &= 1,13 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 \text{ см}^3 = 1130 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Момент сопротивления  $W_y$  круглого сечения диаметром  $d$  вычисляется по фор-



муле (см. справочные таблицы)

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Приравнявая  $W_y$  и  $W_y^{треб}$ , получаем

$$\frac{\pi d^3}{32} \geq 1130 \text{ см}^3.$$

Откуда находим диаметр  $d$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1130 \text{ см}^3}{3,14}} = 22,582 \text{ см} \approx 22,6 \text{ см}.$$

*Размеры сечений деревянных элементов, согласно требованиям технологии, округляются до размера, кратного 0,5 см.*

С учетом технологических требований принимаем круглое поперечное сечение балки диаметром  $d = 23,0 \text{ см}$ .

### Проверка прочности балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений

Проверяем выполнение условия прочности при изгибе по допускаемым нормальным напряжениям (3.39). С этой целью определяем фактический момент сопротивления

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot (23,0 \text{ см})^3}{32} = 1193,89 \text{ см}^3 \approx 1190 \text{ см}^3 = 1,19 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Находим максимальное нормальное напряжение

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} = \frac{11,3 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{1,19 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} = 9,50 \text{ МПа} < [\sigma] = 10 \text{ МПа}.$$

*Условие прочности по методу допускаемых нормальных напряжений выполняется. Балка недогружена.*

Проверяем выполнение условия экономичности

$$\varepsilon = \frac{[\sigma] - \sigma_{max}}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{10 - 9,50}{10} \cdot 100\% = 5,0\% (\pm 5\%).$$

*Условие экономичности выполняется.*

*Условия прочности и экономичности выполняются.*

### Проверка прочности подобранного сечения балки по касательным напряжениям

Максимальные касательные напряжения возникают в опасном сечении балки в точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии (ось  $y$ ).

Для круглого поперечного сечения балки максимальные касательные напряжения вычисляются по формуле (3.51)

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{max}}{A},$$

где

$\tau_{max}$  – максимальное касательное напряжение.

$Q_{max}$  – максимальное по абсолютной величине значение поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил).

$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$  – площадь круглого поперечного сечения балки.

Условие прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений для круглого сечения балки имеет вид

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{max}}{A} \leq [\tau].$$

Здесь

$[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение.

В опасном сечении балки по касательным напряжениям (сечение **C**, рис. 3.29)

$$Q_{\max} = 15 \text{ кН} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ МН.}$$

При принятых размерах поперечного сечения балки диаметром  $d = 23,0 \text{ см}$  площадь круглого поперечного сечения балки равна

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 23,0^2 \cdot 10^{-4}}{4} = 415 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Следовательно,

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{\max}}{A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{15 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{415 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 0,482 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} = 0,482 \text{ МПа} < [\tau] = 2 \text{ МПа.}$$

*Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.*

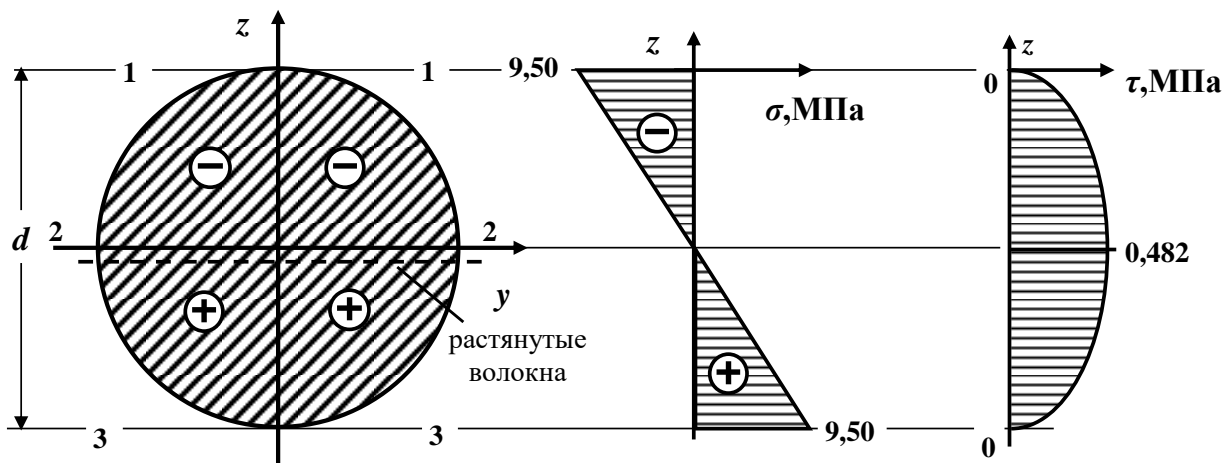
*В противном случае, из условия прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений необходимо подобрать новые большие размеры поперечного сечения балки.*

Принимаем окончательно балку круглого поперечного сечения диаметром  $d = 23,0 \text{ см}$ .

### Построение эпюр нормальных и касательных напряжений в опасных сечениях

#### а). Эпюра нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение **D**, рис. 3.29) растянуты нижние волокна, поэтому нормальные напряжения в точках поперечного сечения, лежащих на линии **1–1** – отрицательные, а в точках поперечного сечения, лежащих на линии **3–3** – положительные (рис. 3.30).



**Рис. 3.30. Эпюры нормальных и касательных напряжений в опасных сечениях балки круглого поперечного сечения**

Напряжения в точках линии **1 – 1**

$$\sigma_{1-1} = -\sigma_{\max} = -9,50 \text{ МПа.}$$

В точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии (главная ось **y**) **2 – 2**, нормальные напряжения равны **0**

$$\sigma_{2-2} = 0.$$

Напряжения в точках линии **3 – 3**

$$\sigma_{3-3} = +\sigma_{\max} = +9,50 \text{ МПа.}$$

Используя полученные данные, строим эпюру нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки, которая графически изображается наклонной прямой линией (рис.3.30).

*В нашей задаче точки, лежащие на линиях **1 – 1** и **3 – 3** поперечного сечения, являются **опасными точками по нормальным напряжениям**, они наиболее удалены от нейтральной линии (рис.3.30).*

**б). Эпюра касательных напряжений по высоте поперечного сечения балки**

Как было показано выше, максимальные касательные напряжения возникают в точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной линии (главная ось **y**) **2 – 2** (рис. 3.30)

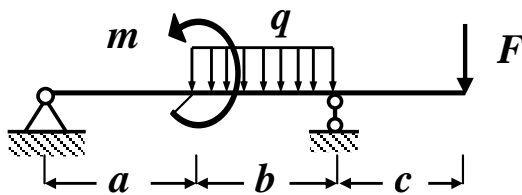
$$\tau_{\max} = \tau_{2-2} = 0,482 \text{ МПа.}$$

*Точки, лежащие на нейтральной линии (ось **y**) **2 – 2** поперечного сечения, являются **опасными точками по касательным напряжениям**.*

В точках поперечного сечения, лежащих на линиях **1 – 1** и **3 – 3** (рис. 3.30), касательные напряжения равны **0**, то есть

$$\tau_{1-1} = \tau_{3-3} = 0.$$

Используя полученные данные и учитывая, что касательные напряжения по высоте поперечного сечения изменяются по параболическому закону, строим эпюру касательных напряжений, как это показано на рис. 3.30.

**СХЕМА (6)**

**Рис. 3.31. Схема балки**
**Исходные данные:**

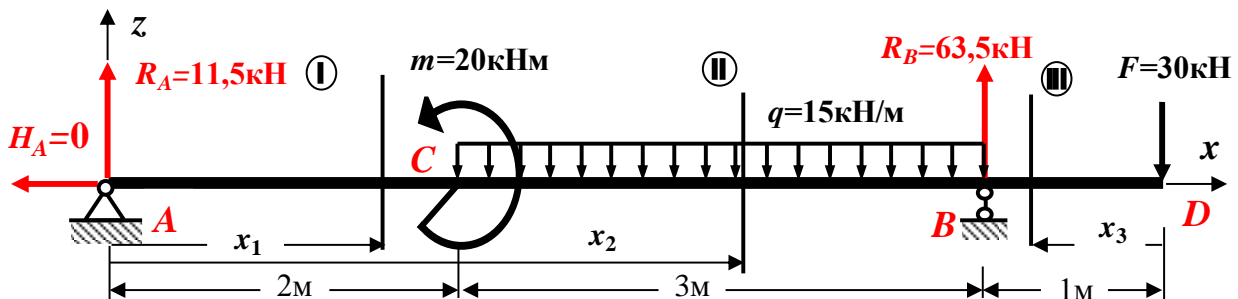
$$a = 2\text{м}; \quad b = 3\text{м}; \quad c = 1\text{м};$$

$$q = 15\text{кН/м}; \quad m = 20\text{кНм}; \quad F = 30\text{кН};$$

$$[\sigma] = 160\text{МПа} = 16 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right).$$

**Решение**
**Определение опорных реакций**

Обозначим опоры буквами **A** и **B** соответственно и заменим их действие опорными реакциями  $R_A$ ,  $H_A$  и  $R_B$  (рис. 3.32).


**Рис. 3.32. Расчетная схема балки**

Для определения опорных реакций составляем три уравнения статики (равновесия), с учетом правила знаков :

1. Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось **x** равна нулю

$$\sum F_x = 0 : -H_A = 0 \quad H_A = 0.$$

2. Сумма моментов всех сил относительно опоры **A** равна нулю

$$\sum M_A = 0 : m - q \cdot 3 \cdot (2 + 1,5) + R_B \cdot 5 - F \cdot 6 = 0;$$

$$20 - 15 \cdot 3 \cdot 3,5 + R_B \cdot 5 - 30 \cdot 6 = 0;$$

$$20 - 157,5 + R_B \cdot 5 - 180 = 0; \quad -317,5 + R_B \cdot 5 = 0;$$

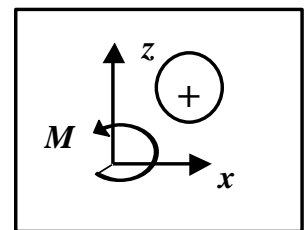
$$R_B = \frac{317,5}{5} = 63,5 \text{ кН.}$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры **B** равна нулю

$$\sum M_B = 0 : -R_A \cdot 5 + m + q \cdot 3 \cdot 1,5 - F \cdot 1 = 0;$$

$$-R_A \cdot 5 + 20 + 15 \cdot 4,5 - 30 = 0; \quad -R_A \cdot 5 + 20 + 67,5 - 30 = 0;$$

$$-R_A \cdot 5 - 57,5 = 0; \quad \rightarrow \quad R_A = \frac{57,5}{5} = 11,5 \text{ кН.}$$



Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна 0)

$$\sum F_z = + R_A - q \cdot 3 + R_B - F = 11,5 - 15 \cdot 3 + 63,5 - 30 = 75 - 75 = 0 (\pm 5\%).$$

### Построение эпюр поперечной силы $Q$ и изгибающего момента $M$

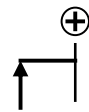
Расчетная схема балки имеет три участка ( $AC$ ,  $CB$  и  $BD$ ), которые пронумеруем слева направо (рис. 3.32).

**I участок  $AC$ :**  $0 \leq x_1 \leq 2$  (начало отсчета на левом конце балки).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на первом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_1) = + R_A = + 11,5 \text{ кН.}$$



Поперечная сила  $Q$  на первом участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = + 11,5 \text{ кН (значение на левой границе участка);}$$

$$Q(2\text{м}) = + 11,5 \text{ кН (значение на правой границе участка).}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на первом участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_1) = + R_A \cdot x_1 = + 11,5 \cdot x_1.$$

Изгибающий момент  $M$  на первом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ . Для построения ее графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$$M(0) = 0 \text{ кНм (значение на левой границе участка);}$$

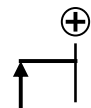
$$M(2) = + 11,5 \cdot 2 = + 23 \text{ кНм (значение на правой границе участка).}$$

**II участок  $CB$ :**  $2 \leq x_2 \leq 5$  (начало отсчета на левом конце балки).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на втором участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_2) = + R_A - q \cdot (x_2 - 2) = + 11,5 - 15 \cdot (x_2 - 2) = + 41,5 - 15 \cdot x_2$$



Здесь  $q \cdot (x_2 - 2)$  – равнодействующая сила распределенной нагрузки  $q$ , расположенная слева от сечения посередине участка длиной  $(x_2 - 2)$ .


Поперечная сила  $Q$  на втором участке является линейной функцией координаты  $x_2$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(2) = + 41,5 - 15 \cdot 2 = + 11,5 \text{ кН (значение на левой границе участка);}$$

$Q(5) = + 41,5 - 15 \cdot 5 = + 41,5 - 75 = - 33,5$  кН (значение на правой границе участка).

Поскольку поперечная сила меняет знак в пределах участка, определяем координату, при которой она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент принимает экстремальное значение):

$$Q(x_0) = + 41,5 - 15 \cdot x_0 = 0; \rightarrow x_0 = 41,5 / 15 = 2,77 \text{ м.}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на втором участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков. 

Составляем выражение для изгибающего момента

$$\begin{aligned} M(x_2) &= + R_A x_2 - m - q(x_2 - 2) \frac{(x_2 - 2)}{2} = 11,5 x_2 - 20 - 15 \frac{(x_2 - 2)^2}{2} = \\ &= -20 + 11,5 x_2 - 7,5(x_2 - 2)^2. \end{aligned}$$

Изгибающий момент  $M$  на втором участке является квадратичной функцией координаты  $x_2$ . Для построения ее графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка и в найденном сечении с координатой  $x_0 = 2,77 \text{ м}$

$M(2) = -20 + 11,5 \cdot 2 - 7,5(2 - 2)^2 = -20 + 23 = + 3$  кНм (значение на левой границе участка);

$$\begin{aligned} M_{\text{экстр}} &= M(2,77) = -20 + 11,5 \cdot 2,77 - 7,5(2,77 - 2)^2 = + 7,408 \text{ кНм} = \\ &= + 7,41 \text{ кНм (значение в сечении балки с координатой } x_0 = 2,77 \text{ м);} \end{aligned}$$

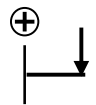
$M(5) = -20 + 11,5 \cdot 5 - 7,5(5 - 2)^2 = -30$  кНм (значение на правой границе участка).

**III участок BD:**  $0 \leq x_3 \leq 1$  м (начало отсчета на правом конце балки).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на третьем участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_3) = + F = + 30 \text{ кН.}$$



Поперечная сила  $Q$  на третьем участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

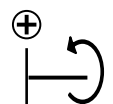
$$Q(0) = + 30 \text{ кН (значение на правой границе участка);}$$

$$Q(2\text{м}) = + 30 \text{ кН (значение на левой границе участка).}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на третьем участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_3) = - F \cdot x_3 = - 30 \cdot x_3.$$



Изгибающий момент  $M$  на третьем участке является линейной функцией координаты  $x_3$ . Для построения ее графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$$M(0) = 0 \text{ кНм (значение на правой границе участка);}$$

$$M(1) = -30 \text{ кНм (значение на левой границе участка).}$$

По полученным численным значениям  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях балки строим в масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, как показано на рис. 3.33.

*Длину балки, а также эпюры поперечной силы и изгибающего момента необходимо вычертить в масштабе. Приведем один из возможных вариантов масштаба: масштаб длины балки: 1 см - 1,5 м; масштаб оси  $Q$ : 1 см - 10 кН; масштаб оси  $M$ : 1 см - 10 кН·м.*

*В проектных строительных организациях эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне, т.е. положительные значения изгибающих моментов откладываются вниз от базисной прямой.*

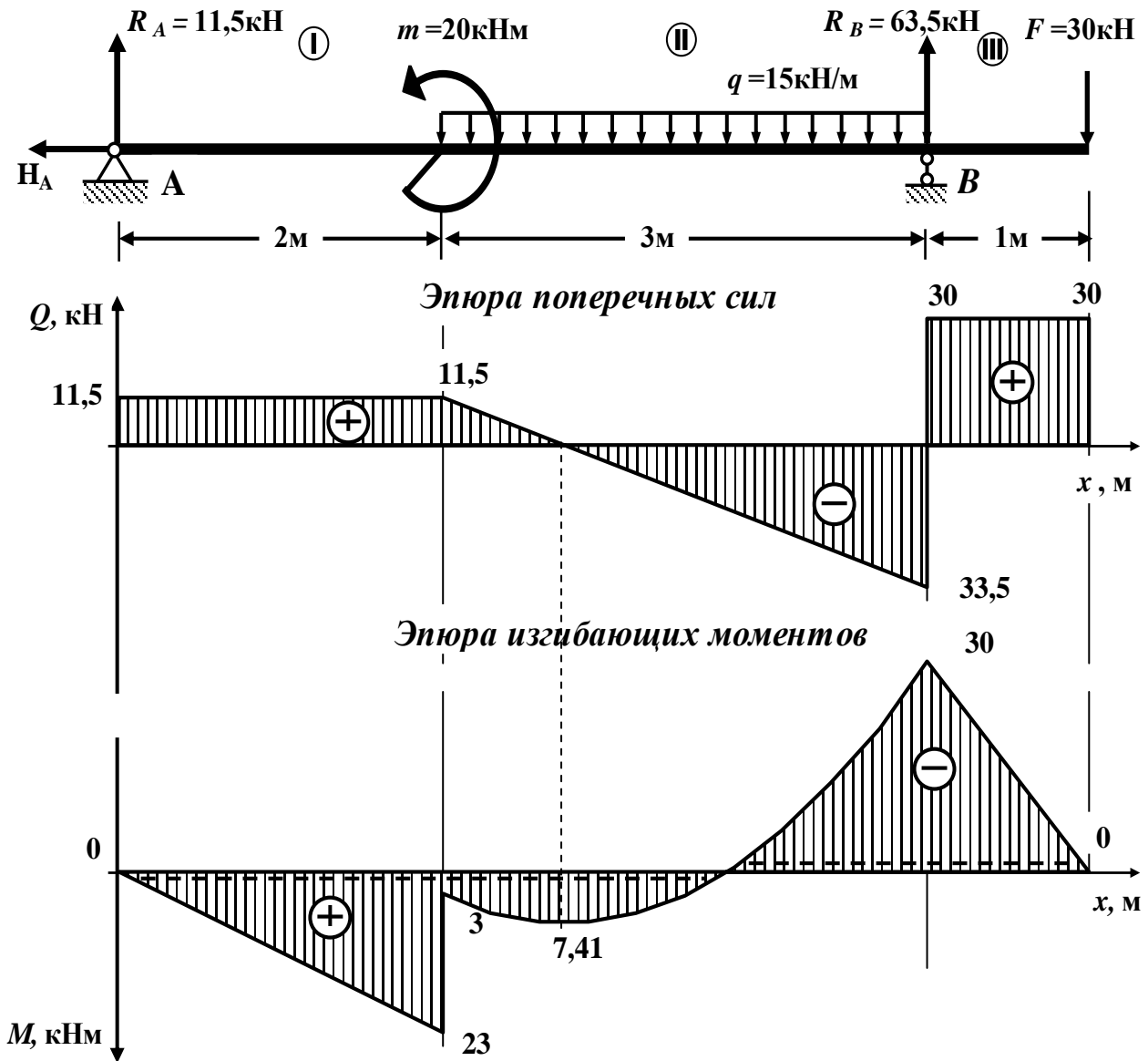
*На эпюре  $M$  вместе со знаком пунктиром показаны положения растянутых волокон.*

### **Контроль (проверки) правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов**

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо.*

- «Скачки» на эпюре  $Q$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре  $Q$  имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз имеется «скачок» вниз.





**Рис. 3.33. Эпюры поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$**

- «Скачки» на эпюре  $M$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вверх.

- На участках балки, на которых поперечная сила  $Q$  положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила  $Q$  отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на участках балки, где поперечная сила  $Q$  равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ( $M = \text{const}$ ).

- Изгибающий момент  $M$  достигает  $\max$  или  $\min$  ( $M_{\text{экстр}}$ ) в тех сечениях балки, где поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).

- На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов  $M$  на этом участке ограничена кривой.

- На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  отсутствует, поперечная сила  $Q$  постоянная ( $Q = \text{const}$ ), а эпюра изгибающих моментов  $M$  изменяется по линейному закону.

*В нашей задаче все эти положения выполняются, следовательно, эпюры внутренних силовых факторов построены правильно.*

### Подбор сечения стальной балки двутаврового поперечного сечения по методу допускаемых напряжений

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид (3.39)

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq [\sigma].$$

В этой формуле:

$\sigma_{max}$  – максимальное нормальное напряжение;

$M_{max}$  – максимальное по абсолютной величине значение изгибающего момента (определяется по эпюре изгибающих моментов);

$W_y$  – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно главной оси  $y$ ;

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

Из условия прочности определяем требуемую величину момента сопротивления поперечного сечения балки по формуле (3.42)

$$W_y^{треб} \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}$$

Размеры поперечного сечения балки подбираются из условия

$$W_y \approx W_y^{треб}.$$

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение **B**, рис. 3.33)

$$M_{max} = 30 \text{ кНм} = 30 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}.$$

Используя неравенство (3.42), определяем требуемую величину момента сопротивления

$$W_y^{треб} \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{3000 \text{ кНсм}}{16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 187,5 \text{ см}^3 \approx 188 \text{ см}^3.$$

Следовательно,

$$W_y^{треб} = 188 \text{ см}^3.$$

По сортаменту стального прокатного двутавра ближайшим к  $W_y^{треб} = 188 \text{ см}^3$  является значение момента сопротивления  $W_y = 184 \text{ см}^3$ , которое соответствует двутавру № 20.

*Принимаем сечение стальной балки в виде двутавра № 20.*

Фактический момент сопротивления для двутавра № 20 равен

$$W_y^{факт} = 184 \text{ см}^3 = 184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

### **Проверка прочности балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений**

Проверяем выполнение условия прочности балки по нормальным напряжениям по методу допускаемых напряжений (3.39)

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y^{факт}} = \frac{3000 \text{ кНсм}}{184 \text{ см}^3} = 16,304 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 163 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

На основании полученного результата устанавливаем, что балка перегружена. Определяем величину перегрузки

$$\delta = \frac{[\sigma] - \sigma_{max}}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{160 - 163}{160} \cdot 100 = 1,88\% < 5\%.$$

Перегрузка находится в допустимых пределах ( $\delta \leq 5\%$ ).

### **Проверка прочности выбранного сечения балки по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений**

Касательные напряжения ( $\tau$ ) в произвольной точке поперечного сечения балки определяются по формуле Д.И. Журавского (3.46)

$$\tau = \frac{Q S_y^{отс}}{b(z) J_y},$$

где

$Q$  – абсолютная величина поперечной силы (определяется по эпюре поперечных сил);

$S_y^{\text{отс}}$  – абсолютное значение статического момента отсеченной части поперечного сечения балки;

$b(z)$  – толщина поперечного сечения балки на уровне точки поперечного сечения, в которой определяются касательные напряжения;

$J_y$  – главный момент инерции поперечного сечения балки.

Условие прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений имеет вид (3.53)

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_y^{\text{отс}}}{b(z) \cdot J_y} \leq [\tau],$$

где

$[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение.

Для балок с поперечным сечением из прокатных стальных элементов

$$[\tau] = 0,6 \cdot [\sigma] = 0,6 \cdot 160 \text{ МПа} = 96 \text{ МПа}.$$

В нашем примере опасным сечением по касательным напряжениям является сечение, расположенное на бесконечно малом расстоянии влево от сечения **B** (рис. 3.33), где

$$Q_{\max} = 33,5 \text{ кН}.$$

Максимальные касательные напряжения возникают в опасном сечении балки ( $Q = Q_{\max}$ ), в точках поперечного сечения, лежащих на нейтральном слое (на оси  $y$ ), поэтому  $b(z) = d$ .

Отсеченная часть фигуры – верхняя половина поперечного сечения, поэтому  $S_y^{\text{отс}} = S_y^{1/2}$ .

Здесь

$S_y^{1/2}$  – статический момент половины сечения. (Для прокатных профилей эта величина приводится в соответствующем сортаменте).

Из сортамента прокатной стали для двутавра № 20 выписываем следующие значения:

$$h = 20 \text{ см}; d = 5,2 \text{ мм} = 0,52 \text{ см}; t = 8,4 \text{ мм} = 0,84 \text{ см};$$

$$J_y = 1840 \text{ см}^4; S_y^{1/2} = 104 \text{ см}^4.$$

Проверяем выполнение условия прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений (3.53)

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_y^{\text{отс}}}{b(z) \cdot J_y} = \frac{33,5 \text{ кН} \cdot 104 \text{ см}^3}{0,52 \text{ см} \cdot 1840 \text{ см}^4} = 3,64 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 36,4 \text{ МПа} < 96 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям для двутавра № 20 выполняется.

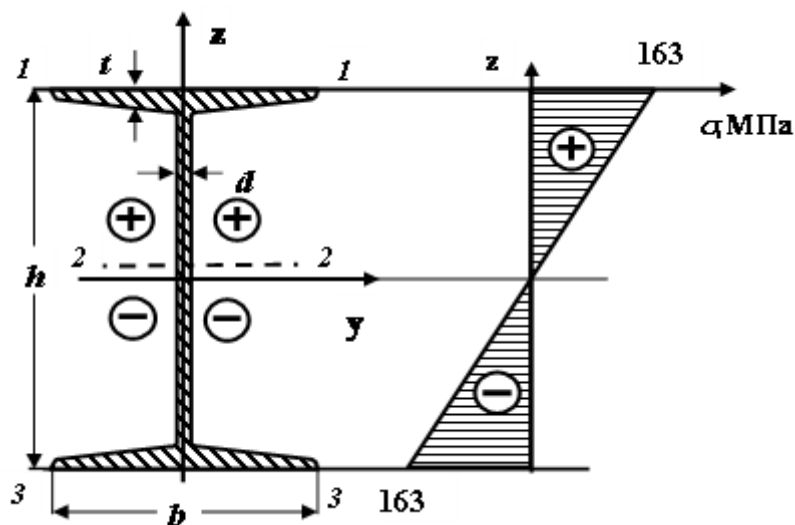
В противном случае, из условия прочности при изгибе по касательным напряжениям по методу допускаемых напряжений необходимо подобрать новые большие размеры поперечного сечения балки.

Окончательно принимаем балку с поперечным сечением из стального прокатного двутавра № 20.

### Построение эпюр нормальных и касательных напряжений в опасных сечениях балки

#### а). Эпюра нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки из двутавра

В опасном сечении балки по нормальным напряжениям (сечение **B**, рис. 3.33) растянуты верхние волокна, поэтому в опасных точках, лежащих на линии **1 – 1** двутавра (рис.3.34),



**Рис. 3.34. Эпюра нормальных напряжений по высоте двутавровой балки**

нормальное напряжение положительное и равно

$$\sigma_{1-1} = + \sigma_{\max} = + 163 \text{ МПа}.$$

В точках, лежащих на нейтральной линии **2 – 2** (ось **y**) двутавра, нормальное напряжение равно **0**

$$\sigma_{2-2} = 0 \text{ МПа}.$$

В опасных точках, лежащих на линии **3 – 3** двутавра, нормальное напряжение отрицательное и равно

$$\sigma_{3-3} = -\sigma_{\max} = -163 \text{ МПа.}$$

Используя полученные данные, строим эпюру нормальных напряжений по высоте двутавровой балки, которая графически изображается наклонной прямой линией (рис. 3.34).

**б). Эпюра касательных напряжений в пределах высоты стенки поперечного сечения балки из двутавра**

В опасном сечении балки по касательным напряжениям (сечение **B**, рис. 3.33) поперечная сила равна

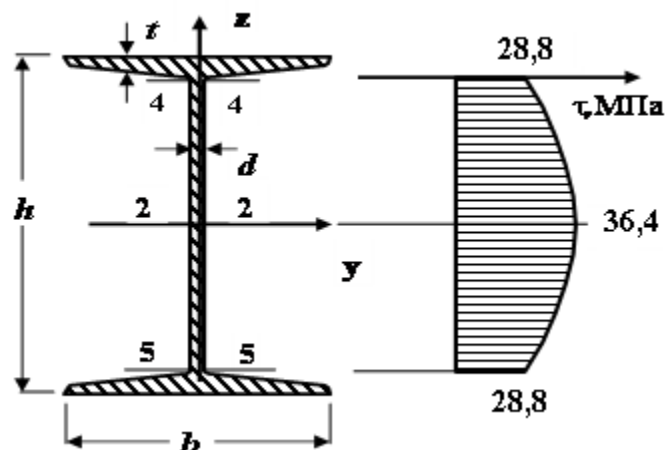
$$Q_{\max} = 33,5 \text{ кН.}$$

Из сортамента прокатной стали для двутавра № 20 имеем следующие значения

$$h = 20 \text{ см; } d = 5,2 \text{ мм} = 0,52 \text{ см; } t = 8,4 \text{ мм} = 0,84 \text{ см;}$$

$$J_y = 1840 \text{ см}^4; S_y^{1/2} = 104 \text{ см}^4.$$

Определим касательные напряжения в характерных точках поперечного сечения, лежащих на линиях **4 – 4**, **2 – 2** и **5 – 5** двутавра (рис.3.35).



**Рис. 3.35. Эпюра касательных напряжений по высоте стенки двутавра**

Касательные напряжения в этом случае можно определять по формуле Д.И. Журавского (3.46)

$$\tau = \frac{Q S_y^{\text{отс}}}{b(z) J_y}.$$

В опасных точках **2 – 2**, лежащих на нейтральной линии (ось **y**) двутавра, касательные напряжения равны  **$T_{max}$**

$$T_{2-2} = T_{max} = 36,4 \text{ МПа.}$$

Для определения касательных напряжений в точках, лежащих на линиях **4 – 4** и **5 – 5**, найдем статический момент «отсеченной» части (полки двутавра) поперечного сечения балки относительно главной оси **y**

$$\begin{aligned} S_y^{отс} &= S_y^{полки} = S_y^{1/2} - S_y^{1/2\text{стенки}} = S_y^{1/2} - d \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right) \cdot = \\ &= 104 - 0,52 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{20}{2} - 0,84\right)^2 = 104 - 21,8 = 82,2 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Вычисляем касательные напряжения в точках, лежащих на линиях **4 – 4** и **5 – 5**

$$\begin{aligned} T_{4-4} = T_{5-5} &= \frac{Q_{max} \cdot S_y^{полки}}{d \cdot I_y} = \frac{33,5 \text{ кН} \cdot 82,2 \text{ см}^3}{0,52 \text{ см} \cdot 1840 \text{ см}^4} = 2,88 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = \\ &= 2,88 \cdot 10 \text{ МПа} = 28,8 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

По полученным значениям строим эпюру касательных напряжений по высоте стенки двутавра (рис. 3.35).

### 3.4. Тема 4. Сложное сопротивление

#### 3.4.1. Основные теоретические положения

##### Общие понятия. Группы сложного сопротивления.

На практике часто встречаются случаи, когда в результате действия внешней нагрузки в поперечных сечениях бруса одновременно возникает несколько компонентов внутренних сил. В этих случаях создаются комбинации простых деформаций: кривой изгиб (изгиб в двух плоскостях одновременно), внецентренное растяжение или сжатие (растяжение или сжатие с изгибом), одновременное действие кручения с изгибом и т. д.

При расчетах на сложное сопротивление обычно исходят из принципа независимости действия сил, который справедлив при малых деформациях.

Поэтому в расчетах на сложное сопротивление бруса принцип независимости действия сил применяют тогда, когда влиянием деформаций, вызванных одним видом нагрузки, на результаты действия других видов нагрузок можно пренебречь (кривой изгиб, внецентренное растяжение или сжатие ит.д.). В противном случае этот принцип применять нельзя (одновременное действие кручения с изгибом, сжатие (или растяжение) с кручением и т. д.).

Принцип независимости действия сил позволяет применить способ сложения действия сил, то есть, найдя напряжения, соответствующие отдельным простым видам деформаций, их суммируют.

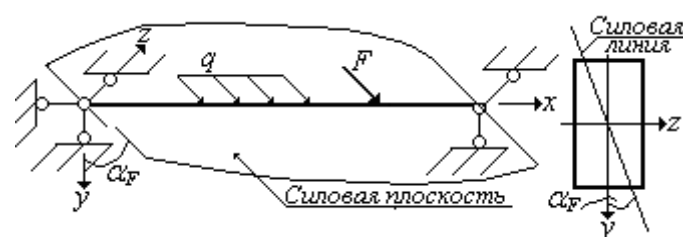
Для применения указанного метода необходимо условиться относительно правила знаков.

Правила знаков для внутренних усилий. Продольную силу, как и прежде, будем считать положительной, если она в рассматриваемом сечении вызывает растягивающие напряжения.

Изгибающие моменты будем считать положительными, если они в точках первой четверти принятой системы координат (совпадающих с главными осями) вызывают растягивающие напряжения.

#### Косой изгиб

Определение. Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором плоскость действия суммарного изгибающего момента проходит через геометрическую ось балки, но не совпадает ни с одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения (рис. 3.36).



**Рис. 3.36**

Различают два вида косоугольного изгиба: *плоский и пространственный.*



При плоском косом изгибе внешние силы действуют в одной плоскости, не совпадающей с главными плоскостями инерции. Эта плоскость называется *силовой плоскостью*, а линия ее пересечения с плоскостью поперечного сечения балки – *силовой линией*.

При пространственном косом изгибе внешние силы действуют в разных плоскостях.

Обозначим через  $\alpha_F$  угол между силовой линией и главной осью  $y$ .

Угол  $\alpha_F$  будем считать положительным при повороте силовой линии от оси  $y$  против хода часовой стрелки.

Как в случае пространственного, так и в случае плоского косоуго изгиба, наиболее целесообразно их приводить к двум прямым изгибам.

Таким образом, косоуго изгиб можно рассматривать как сочетание двух прямых изгибов, вызванных изгибающими моментами относительно главных центральных осей инерции поперечного сечения, т. е. суммарный изгибающий момент  $M$ , действующий в сечении балки, можно разложить на два изгибающих момента  $M_y$  и  $M_z$ , действующих в главных плоскостях инерции

$$M_y = M \cdot \sin \alpha_F; \quad M_z = M \cdot \cos \alpha_F,$$

где

$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$  – суммарный изгибающий момент в рассматриваемом сечении.

Отсюда, угол  $\alpha_F$  можно выразить через отношение изгибающих моментов

$$\operatorname{tg} \alpha_F = \frac{M_y}{M_z} \quad (3.54)$$

Если изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  имеют одинаковые знаки, то угол  $\alpha_F$  положителен. В этом случае силовая линия проходит через первую и третью четверти принятой системы координат.

### Определение напряжений при косом изгибе

В соответствии с принципом независимости действия сил, нормальные напряжения при косом изгибе в произвольной точке сечения с координатами  $y$  и  $z$ , вызванные изгибающими моментами  $M_z$  и  $M_y$ , определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (3.55)$$

или

$$\sigma = M \cdot \left( \frac{y \cdot \cos \alpha_F}{I_z} + \frac{z \cdot \sin \alpha_F}{I_y} \right), \quad (3.56)$$

где

$J_y$  – момент инерции сечения относительно главной оси  $y$ ;

$J_z$  – момент инерции сечения относительно главной оси  $z$ ;

$\alpha_F$  – угол между силовой линией и вертикальной главной осью  $y$ .

### Положение нейтральной (нулевой) линии при косом изгибе

Для определения опасных точек в поперечном сечении балки при косом изгибе целесообразно предварительно построить нейтральную (нулевую) линию сечения. Опасными в сечении будут точки, наиболее удаленные от нейтральной линии.

*Определение.* Нейтральной осью (нулевой линией) называется геометрическое место точек поперечного сечения балки, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Следовательно, положение нейтральной линии при косом изгибе можно установить, если приравнять нулю напряжения в точках, принадлежащих этой линии.

При косом изгибе напряжения  $\sigma$  изменяются по линейному закону. Положив  $\sigma = 0$ , получим уравнение нейтральной линии.

После преобразований получим формулу нейтральной линии (оси) при косом изгибе

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha_F \quad (3.57)$$

В этой формуле

$\alpha_0$  – угол между нейтральной линией и горизонтальной главной осью  $z$ ;

$\alpha_F$  – угол между силовой линией и вертикальной главной осью  $y$ .

Нейтральная (нулевая) линия при косом изгибе по отношению к силовой линии проходит через две другие четверти осей координат.

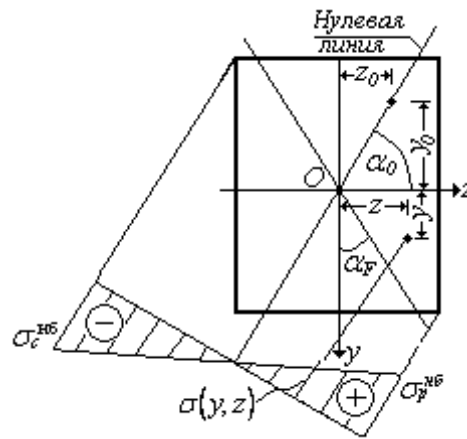
Отсюда следует, что угол  $\alpha_0$  откладывается от оси  $z$ , в ту же сторону, что и угол  $\alpha_F$  от оси  $y$  (рис. 3.37)

Анализируя формулу (3.57)

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha_F,$$

находим, что в отличие от прямого плоского изгиба при косом изгибе нулевая и силовая линии в общем случае (когда  $I_y \neq I_z$ ) не будут взаимно перпендикулярны (рис. 3.37).

*Таким образом, нейтральная ось при косом изгибе проходит через центр тяжести поперечного сечения не перпендикулярно к силовой линии.*


**Рис. 3.37**

Нулевая линия будет перпендикулярна силовой только при  $I_y = I_z$ , то есть, когда главные центральные моменты инерции поперечного сечения балки одинаковы. Но в этом случае, как известно, любые центральные оси сечения являются главными и, следовательно, кривой изгиб *невозможен*.

Из формулы (3.57) также следует, что положение нейтральной (нулевой) линии при кривом изгибе не зависит от величины изгибающего момента.

### Условие прочности при кривом изгибе

Наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нулевой линии (нейтральной оси). Для сечений типа прямоугольника и двутавра, имеющих две оси симметрии, наибольшие по абсолютной величине напряжения целесообразно вычислять по формуле

$$\sigma_{nb} = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \quad (3.58)$$

На рисунке 3.37 показан вид эпюры нормальных напряжений для прямоугольного сечения при положительных значениях  $M_y$  и  $M_z$ . В этом случае наибольшие растягивающие  $\sigma_p^{nb}$  и сжимающие  $\sigma_c^{nb}$  напряжения возникают в двух угловых точках сечения.

Условие прочности при кривом изгибе для балок с рассмотренным типом поперечных сечений имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma], \quad (3.59)$$

а в случае произвольного сечения

$$\sigma_{max} = \left| \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{max} \right| \leq [\sigma]. \quad (3.60)$$

Подбор размеров поперечного сечения балки при кривом изгибе является задачей более сложной, чем при плоском поперечном изгибе.

Условие прочности принимает вид

$$\sigma_{max} = \frac{|M \cdot \sin \alpha_F|}{W_y} + \frac{|M \cdot \cos \alpha_F|}{W_z} \leq [\sigma],$$

или

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z} \cdot \left( \frac{W_z}{W_y} \cdot |\sin \alpha_F| + \cos \alpha_F \right) \leq [\sigma]. \quad (3.61)$$

Подбор размеров поперечного сечения балки производят по формуле

$$W_z \geq \frac{|M|}{[\sigma]} \cdot \left( \frac{W_z}{W_y} \cdot |\sin \alpha_F| + \cos \alpha_F \right). \quad (3.62)$$

Сначала необходимо задаться отношением  $\frac{W_z}{W_y}$ , а затем находить размеры поперечного сечения балки методом подбора.

Для хрупкого материала в качестве  $[\sigma]$  необходимо принимать допускаемое напряжение на растяжение.

### Определение деформаций при косом изгибе

Для определения прогибов в балке, работающей на косою изгиб, снова воспользуемся принципом независимости действия сил.

Так как косою изгиб представляет собой сочетание двух плоских изгибов, то перемещения в балках при косою изгибе могут определяться теми же методами, что и при плоском изгибе. Для этого необходимо нагрузки, действующие на балку, разложить на составляющие, параллельные главным центральным осям  $y$  и  $z$ , и определить по отдельности прогибы  $v$  и  $w$  по направлениям этих осей (рис. 3.38).

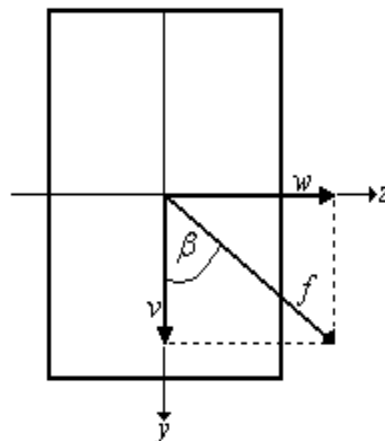


Рис. 3.38

Полный прогиб в произвольном сечении балки определяются по формуле

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}. \quad (3.63)$$

Направление полного прогиба в произвольном сечении балки определяются по формулам

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w}{v}$$

или

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha_F. \quad (3.64)$$

В этих формулах

$\beta$  – угол между направлением суммарного прогиба и вертикальной главной центральной осью  $y$ .

$\alpha_F$  – угол между силовой линией и вертикальной главной осью  $y$ .

Аналогично могут быть найдены углы поворота произвольных сечений балки.

При плоском косом изгибе балки ее изогнутая ось, представляет собой плоскую кривую.

Формула (3.63) идентична с формулой (3.57). Следовательно, угол  $\alpha_0 = \beta$ , то есть *направление полного прогиба перпендикулярно нейтральной (нулевой) линии*.

*Таким образом, при косом изгибе направление полного прогиба (плоскость деформации) не совпадает с плоскостью нагрузки (силовой плоскостью), а значительно отклоняется от нее в сторону плоскости наименьшей жесткости балки.*

Это обстоятельство объясняет, почему такой изгиб называется косым.

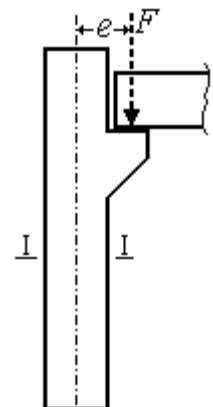
Когда  $I_y = I_z$  (круглое сечение, правильный многоугольник) плоскость деформации (полный прогиб) совпадает с силовой плоскостью. В этих случаях косой изгиб невозможен.

### Внецентренное растяжение и сжатие брусев большой жесткости

Многие элементы строительных конструкций (колонны, стойки и др.) находятся под воздействием сжимающих сил, приложенных вне центра тяжести сечения. Например, балка перекрытия, опирающаяся на колонну, передает нагрузку с эксцентриситетом  $e$  и, следовательно, в произвольном сечении  $I-I$  колонны возникает продольная сила  $N = F$  и изгибающий момент, равный  $F \cdot e$ .

Определение. Если на брус действуют продольные сжимающие или растягивающие силы, параллельной оси бруса, но приложенные не в центре тяжести сечения, то такое сопротивление бруса называют внецентренным сжатием или растяжением.

В поперечном сечении стержня при этом одновременно действуют продольная (растягивающая или сжимающая) сила и изгибающий момент, плоскость действия которого, в общем случае, не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции сечения. В этом сечении может действовать также и поперечная сила.



Внецентренно растянутый или сжатый стержень, при расчете которого можно не учитывать дополнительные изгибающие моменты, равные произведениям продольных внешних сил  $F$  на прогибы  $v$ , называются жесткими, а стержень, при расчете которого их необходимо учитывать – гибкими.

### Формула нормальных напряжений

Пусть на стержень произвольного сечения действует одна сила  $F$ , параллельная его продольной оси и приложенная не в центре тяжести сечения.

Координаты точки приложения силы относительно главных центральных осей обозначим через  $y_f$  и  $z_f$ , а расстояние этой точки до центра тяжести сечения, называемое эксцентриситетом, – через  $e$  (рис. 3.39, а).

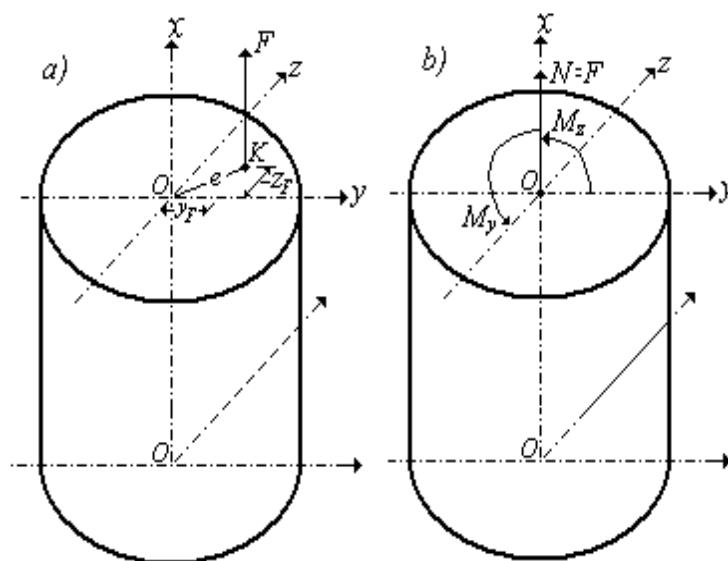


Рис. 3.39

Для любого поперечного сечения действие внецентренно приложенной силы  $F$  можно заменить действием нормальной силы  $N = F$ , приложенной в центре тяжести сечения, и действием двух изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  (рис. 3.39, б).

Таким образом, в соответствии с принципом независимости действия сил, нормальные напряжения при внецентренном растяжении (сжатии) в произвольной точке сечения будут складываться из напряжений осевого растяжения (сжатия), вызванные продольной силой  $N = \pm F$ , и напряжений от изгиба, вызванные изгибающими моментами  $M_y$  и  $M_z$ ,

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (3.65)$$

При этом

$$M_z = F \cdot y_f; \quad M_y = F \cdot z_f; \quad N = \pm F; \quad I_y = A \cdot i_y^2; \quad I_z = A \cdot i_z^2.$$

После преобразований формула для определения напряжений в произвольной точке сечения с координатами  $y$  и  $z$  при внецентренном растяжении (сжатии) принимает вид

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} \right) \quad (3.66)$$

В этих формулах

$\sigma$  – величина нормального напряжения в любой точке сечения с координатами  $y$  и  $z$ ,

$N$  – величина продольной силы;

$A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$y_F, z_F$  – координаты точки приложения внешней силы  $F$ , взятые относительно главных центральных осей сечения стержня;

$i_y^2 = \frac{I_y}{A}$ ,  $i_z^2 = \frac{I_z}{A}$  – квадраты радиусов инерции сечения относительно главных центральных осей.

### Положение нейтральной (нулевой) линии при внецентренном растяжении (сжатии)

Для определения опасных точек в поперечном сечении бруса при внецентренном растяжении (сжатии) целесообразно предварительно построить нейтральную (нулевую) линию сечения. Опасными в сечении будут точки **1** и **2**, наиболее удаленные от нейтральной (нулевой) линии (рис. 3.40).

Определение. Нейтральной осью (нулевой линией) называется геометрическое место точек поперечного сечения бруса, в которых нормальные напряжения равны нулю.

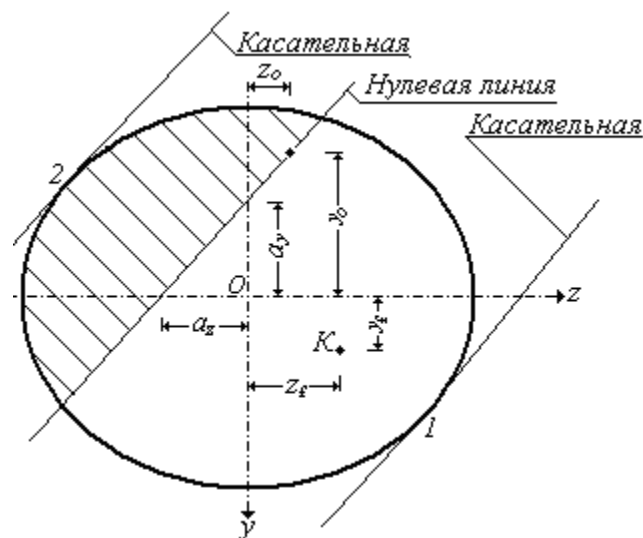


Рис. 3.40

Следовательно, положение нейтральной линии при внецентренном растяжении (сжатии) можно установить, если приравнять нулю напряжения в точках, принадлежащих этой линии.

После преобразований получим уравнение нейтральной линии в виде отрезков  $a_y$  и  $a_z$ , отсекаемых этой линией на главных центральных осях  $y$  и  $z$ ,

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}, \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}. \quad (3.67)$$

### Свойства нейтральной линии при внецентренном растяжении (сжатии)

- Точка приложения  $K$  внецентренно действующей силы и соответствующая ей нейтральная линия находятся по разные стороны от центра тяжести сечения, т. е. нейтральная линия пересекает координатные оси в точках, принадлежащих квадранту, противоположному тому, в котором находится точка приложения силы.
- При приближении точки приложения  $K$  внецентренно действующей силы к центру тяжести сечения, нейтральная линия удаляется от него.
- При удалении точки приложения  $K$  внецентренно действующей силы от центра тяжести сечения, нейтральная линия приближается к нему.
- Если точка приложения  $K$  внецентренно действующей силы располагается на одной из главных центральных осей сечения, то нейтральная линия будет перпендикулярна этой оси.
- Если точка приложения  $K$  внецентренно действующей силы перемещается вдоль некоторой прямой  $a - b$  (рис. 3.41), то соответствующая ей нейтральная линия вращается вокруг вполне определенной точки  $C$ . /Прямая теорема/.

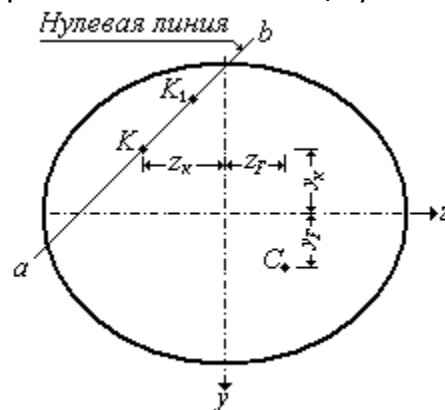


Рис. 3.41

- Если нейтральная линия вращается вокруг некоторой точки  $C$  (рис. 3.41), то соответствующая точка приложения  $K$  внецентренно действующей силы перемещается вдоль некоторой вполне определенной прямой  $a - b$ . /Обратная теорема/.
- Положение нейтральной линии не зависит от величины внецентренно действующей силы.



### Условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии)

Наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси (нулевой линии).

Проведем параллельно нейтральной линии касательные к контуру сечения и найдем опасные точки **1** и **2** в растянутой и сжатой зонах (рис. 3.40).

Условия прочности для этих точек при внецентренном растяжении (сжатии) имеют вид

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} \right) \leq [\sigma] \quad (3.68)$$

Эта формула справедлива и в случае действия сжимающей силы **F**, если нет опасности возникновения продольного изгиба.

Расчет на прочность бруса, сжатого или растянутого внецентренно приложенной продольной внешней силой (т. е. при отсутствии поперечных сил), проводится наиболее просто, так как в этом случае внутренние усилия одинаковые во всех поперечных сечениях стержня. Для стержня с постоянными размерами сечения в пределах каждого участка все сечения являются равно опасными. Для стержня с переменными поперечными размерами сечения опасным в пределах каждого участка является сечение наименьшего размера.

При пластичном материале для проверки прочности достаточно определить напряжение в точке с наибольшим по абсолютной величине нормальным напряжением. При хрупком материале необходимо определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения.

### Ядро сечения. Построение ядра сечения

Нейтральная линия в общем случае может проходить и вне сечения. Действительно, если внешняя сила **F** приложена в центре тяжести сечения, то нейтральная линия находится в бесконечности, так как напряжения в этом случае распределены по сечению *равномерно*.

По мере удаления точки приложения силы **F** от центра тяжести сечения, нейтральная линия будет приближаться к сечению и при некотором положении точки приложения внешней силы **F** впервые коснется контура сечения. При дальнейшем увеличении эксцентриситета нейтральная линия пересечет сечение. При этом нормальные напряжения в сечении будут растягивающие и сжимающие.

Представляет интерес найти такую область расположения точек приложения внешней силы **F**, при которых в сечении напряжения будут только одного знака. Это важно для стержней плохо сопротивляющихся растяжению (бетон, кирпичная кладка, чугун). Для конструкций из таких материалов предпочтительно, чтобы в сечении напряжения  $\sigma \leq 0$ , т. е., чтобы нейтральная линия не пересекала контур поперечного сечения.

Такая область называется ядром сечения.

*Определение.* Ядром сечения называется выпуклая область, расположенная вокруг центра тяжести сечения, обладающая свойством, что внешняя продольная сила, приложенная в любой ее точке, вызывает по всему сечению напряжения одного знака.

При расчете внецентренно сжатых элементов, изготовляемых из материала, плохо воспринимающего растягивающие напряжения, важно знать форму и размеры ядра сечения. Это позволяет, не вычисляя величину напряжений, по эксцентриситету сжимающей силы устанавливать, возникнут в поперечном сечении растягивающие напряжения или нет.

### План построения ядра сечения

1. Проведем нейтральные линии, соответствующие их предельному положению. Это будут касательные к поперечному сечению стержня.
2. Пронумеруем их в последовательном порядке.
3. Для каждой из этих нейтральных линий найдем соответствующую ей точку приложения силы.
4. Полученные точки соединим одну с другой в том же порядке, в каком пронумерованы касательные нейтральные линии.
5. Полученный контур и ограничивает ядро сечения.

### Совместное действие изгиба с центральным растяжением (сжатием)

На практике часто встречаются случаи, когда на стержень действуют одновременно поперечные и продольные нагрузки. При этом продольные нагрузки могут быть приложены и внецентренно.

Если на балку действуют продольные и поперечные нагрузки, пересекающие ее ось, то в общем случае в поперечных сечениях возникают изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$ , действующие в двух плоскостях, поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$ , а также продольная сила  $N$  (рис. 3.42).

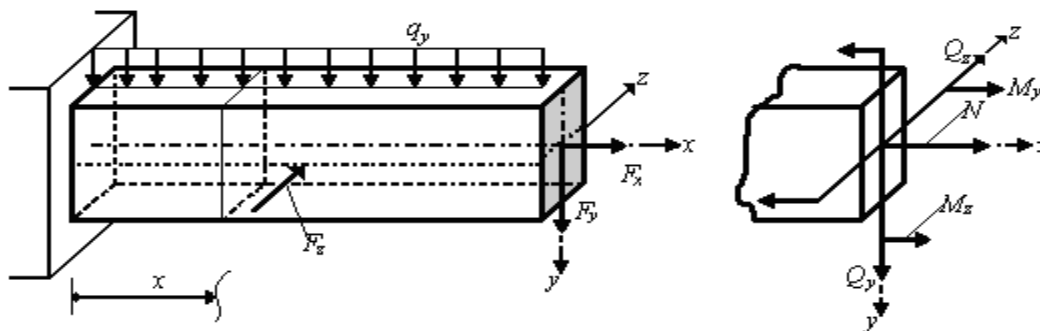


Рис. 3.42

Таким образом, в этом случае будет сложный (косой) изгиб с центральным растяжением или сжатием. Нормальное напряжение в произвольной точке сечения стержня в этом случае определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (3.69)$$

Изгибающие моменты, продольную силу и координаты точки, в которой вычисляют напряжения, подставляют в формулу с их знаками.

Правила знаков для внутренних усилий. Продольную силу будем считать положительной, если она в рассматриваемом сечении вызывает растягивающие напряжения. Изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  считаются положительными, если они вызывают растяжение в точках первой четверти рассматриваемого поперечного сечения балки.

### Расчет на прочность

#### при совместном действии изгиба с центральным растяжением (сжатием)

Пренебрегая касательными напряжениями от поперечных сил, можно считать, что напряженное состояние в опасной точке будет линейным.

Следовательно, условие прочности имеет вид

$$\sigma_{max} \leq [\sigma].$$

Наибольшие напряжения возникают в опасных точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси (нулевой линии).

В случае расчета стержней произвольной формы поперечного сечения для определения опасных точек сечения необходимо предварительно установить положение нейтральной (нулевой) линии. Способ определения положения нейтральной линии был показан при рассмотрении внецентренного растяжения (сжатия).

Условие прочности для этих точек при совместном действии косоугольного изгиба с центральным растяжением (сжатием) имеет вид

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \leq [\sigma] \quad (3.70)$$

В случае совместного действия плоского изгиба в главной плоскости  $O_{yx}$  с центральным растяжением (сжатием) трехчленная формула превращается в двухчленную

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y \leq [\sigma].$$

Эти формулы применяют и при расчете на прочность плоских рам и арок малой кривизны. Опасными в этом случае являются те сечения, где действует наибольший изгибающий момент.

При совместном действии изгиба с центральным сжатием применять полученные формулы можно лишь к коротким стержням большой жесткости, так как в случае тонкого длинного стержня возможна потеря устойчивости.

### Контрольные вопросы для самопроверки по теме

#### «Сложное сопротивление»

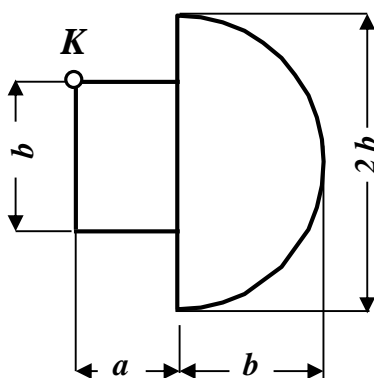
1. Какие случаи сопротивления стержней называются сложным сопротивлением?
2. В чем суть принципа независимости действия сил?
3. Какой вид деформации стержня называется косым изгибом?

4. К каким простейшим видам деформации можно свести косою изгиб?
5. Формула для определения нормальных напряжений в случае косою изгиба?
6. Приведите уравнение нейтральной линии в случае косою изгиба.
7. Какие точки поперечного сечения называются опасными? Как эти точки определяются в случае косою изгиба?
8. Как определяется деформация балки в случае косою изгиба?
9. Какой вид деформации называется внецентренным растяжением или сжатием?
10. К каким простейшим видам деформации можно свести внецентренное растяжение (сжатие)?
11. Какой принцип используется для вывода формулы нормального напряжения в случае внецентренного действия силы?
12. Формула для определения нормальных напряжений в случае внецентренного действия силы.
13. Дайте определение нейтральной линии. Приведите уравнение нейтральной линии в случае внецентренного действия силы.
14. Перечислите свойства нейтральной линии в случае внецентренного действия силы.
15. Как определяется положение опасных точек в случае внецентренного действия силы.
16. Напишите условие прочности для хрупкого материала в случае внецентренного действия силы.
17. Какой вид имеет условие прочности для пластичного материала?
18. Дайте определение ядра сечения. План построения ядра сечения.
19. Формула для определения нормальных напряжений в случае одновременного действия изгиба и центрального растяжения (сжатия)?

*После изучения этой темы можно приступить к решению задачи № 4, включенной в контрольную работу.*

### 3.4.2. Пример решения задачи № 4

#### «Внецентренное сжатие коротких стержней»



**Рис. 3.43. Поперечное сечение**

**Исходные данные:**

$$a = 4 \text{ см}; \quad b = 6 \text{ см};$$

$$[\sigma_d] = 160 \text{ МПа} = 16 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right);$$

$$[\sigma_p] = 40 \text{ МПа} = 4 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right).$$

**Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 3.43, сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в точке  $K$ .**

**Требуется:**

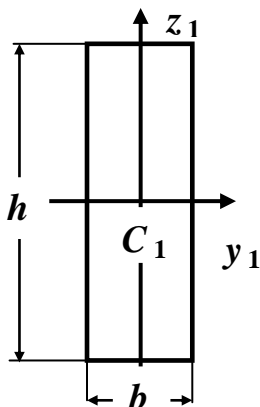
1. Вычислить величины наибольших растягивающих и сжимающих напряжений в поперечном сечении, выразив величины этих напряжений через  $F$ .
2. Из условий прочности найти допускаемую нагрузку  $[F]$  при заданных значениях допускаемых нормальных напряжений для чугуна на сжатие  $[\sigma_c]$  и на растяжение  $[\sigma_p]$ .

**Решение**

Используя справочные таблицы, вычислим геометрические характеристики отдельных элементов, входящих в состав сложного поперечного сечения.

Заданное сложное поперечное сечение чугунного короткого стержня состоит из пластины (прямоугольника) и полукруга. Будем считать, что пластина – фигура **I**, а полукруг – фигура **II**.

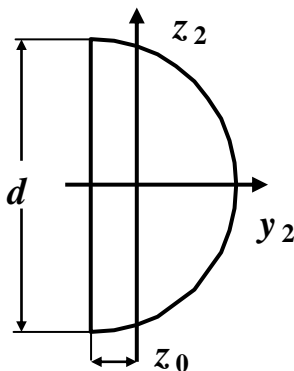
**Фигура I – прямоугольник  $b \times h = 4 \times 6$  см**



$$b = 4 \text{ см}; \quad h = 6 \text{ см}; \quad A_I = b \cdot h = 4 \cdot 6 \text{ см}^2 = 24 \text{ см}^2;$$

$$J_{y_1}^I = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \text{ см} \cdot (6 \text{ см})^3}{12} = 72 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_1}^I = \frac{b^3h}{12} = \frac{(4 \text{ см})^3 \cdot 6 \text{ см}}{12} = 32 \text{ см}^4.$$



**Фигура II – полукруг, диаметром  $d = 2b = 12$  см**

$$z_0 = 0, 212d = 0, 212 \cdot 12 \text{ см} = 2, 544 = 2, 54 \text{ см};$$

$$A_2 = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{3,14 \cdot (12 \text{ см})^2}{8} = 56,52 \text{ см}^2 = 56,5 \text{ см}^2;$$

$$J_{y_2}^{II} = 0,0245 d^4 = 0,0245 \cdot (12 \text{ см})^4 = 508,032 \text{ см}^4 = 508 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_2}^{II} = 0,00687 d^4 = 0,00687 \cdot (12 \text{ см})^4 = 142,456 \text{ см}^4 = 142 \text{ см}^4$$

Нормальные напряжения в случае *внецентренного сжатия* находятся по формуле (3.66)

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} \right)$$

В этой формуле

$\sigma$  – величина нормального напряжения в любой точке сечения с координатами  $y$  и  $z$ ,

$N = -F$  – величина сжимающей продольной силы;

$A$  – площадь поперечного сечения;

$y_K, z_K$  – координаты точки  $K$  приложения внецентренной силы  $F$ , взятые относительно главных центральных осей заданного сечения;

$i_y^2$  и  $i_z^2$  – квадраты радиусов инерции относительно главных центральных осей заданного сечения, которые определяются по формулам

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A}, \quad i_z^2 = \frac{J_z}{A}.$$

Используя приведенные выше исходные справочные данные, вычерчиваем сечение в масштабе с указанием всех осей и необходимых размеров в сантиметрах (рис. 3.44). На рис. 3.44 в рамках показаны размеры, взятые из справочных данных, остальные получены в ходе расчета.

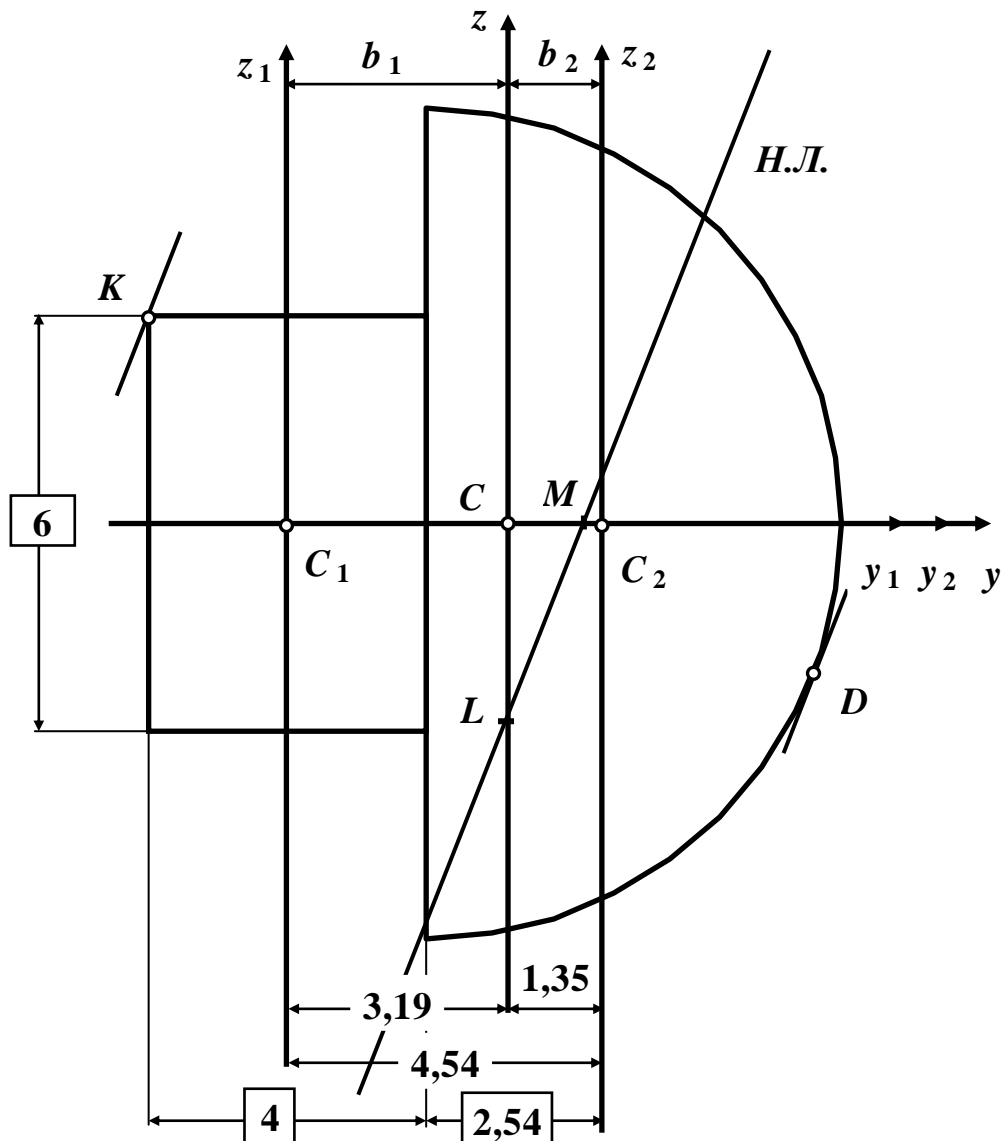


Рис. 3.44. Поперечное сечение стержня

## Вычисление величин наибольших растягивающих и сжимающих напряжений в поперечном сечении

### а). Определение положения центра тяжести сечения

Заданное сложное поперечное сечение чугунного короткого стержня имеет ось симметрии  $y$  (рис. 3.44), которая является главной центральной осью. Вторую главную центральную ось проведем после определения положения центра тяжести этой составной фигуры, который находится на оси симметрии  $y$ .

Определяем координаты центров тяжести первой и второй фигур (точек  $C_1$  и  $C_2$ ) относительно произвольной координатной системы  $z_1 C_1 y_1$ .

$$\text{Точка } C_1: y_{C_1} = 0. \quad \text{Точка } C_2: y_{C_2} = \left(\frac{4}{2} + 2,54\right) = 4,54 \text{ см.}$$

Общая площадь заданного сложного поперечного сечения

$$A = A_1 + A_2 = 24 + 56,5 = 80,5 \text{ см}^2 = 80,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Координата центра тяжести заданного сложного поперечного сечения по оси  $y$  будет равна

$$y_C = \frac{A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2}}{A} = \frac{(24 \cdot 0 + 56,5 \cdot 4,54) \text{ см}^3}{80,5 \text{ см}^2} = \frac{256,51 \text{ см}^3}{80,5 \text{ см}^2} = 3,1864 \text{ см} = 3,19 \text{ см.}$$

По полученному значению координаты  $y_C$  находим положение центра тяжести (точка  $C$ ) заданного сложного поперечного сечения (рис. 3.44).

### б). Построение главных центральных осей

Ось симметрии  $y$  (рис. 3.44) является главной центральной осью. Проводим через точку  $C$  вторую главную центральную ось  $z$ , перпендикулярную главной центральной оси  $y$ .

*Теперь главные центральные оси  $y$  и  $z$  – основная система координат (рис. 3.44).*

### в). Определение моментов инерции и квадратов радиусов инерции относительно главных центральных осей

Для определения главных моментов инерции заданного сложного поперечного сечения воспользуемся формулами параллельного переноса осей.

Осевого момента инерции заданного сложного поперечного сечения относительно главной центральной оси  $y$  равен сумме моментов инерции первой и второй фигур относительно этой оси

$$J_y = J_y^I + J_y^{II} = J_{y_1}^I + J_{y_2}^{II} = 72 + 508 = 580 \text{ см}^4.$$

Аналогично, момент инерции заданного сложного поперечного сечения относительно главной центральной оси  $z$  равен сумме моментов инерции первой и второй фигур относительно этой оси

$$J_z = J_z^I + J_z^{II}.$$

В соответствии с формулами параллельного переноса осей момент инерции первой фигуры относительно главной центральной оси  $z$  равен моменту инерции относительно собственной оси  $z_1$  плюс площадь этой фигуры, умноженной на квадрат расстояния между осями  $z_1$  и  $z$  (рис. 3.44)

$$J_z^I = J_{z_1}^I + A_1 b_1^2 = 32 + 24 \cdot 3,19^2 = 276,226 \text{ см}^4 = 276 \text{ см}^4;$$

$$b_1 = y_{c_1} - y_c = 0 - 3,19 \text{ см} = -3,19 \text{ см} \text{ (рис. 3.44).}$$

Аналогично, момент инерции второй фигуры относительно главной центральной оси  $z$  будет равен

$$J_z^{II} = J_{z_2}^{II} + A_2 b_2^2 = 142 + 56,5 \cdot 1,35^2 = 244,971 \text{ см}^4 = 245 \text{ см}^4;$$

$$b_2 = y_{c_2} - y_c = 4,54 \text{ см} - 3,19 \text{ см} = 1,35 \text{ см} \text{ (рис. 3.44);}$$

Следовательно, момент инерции заданного сложного поперечного сечения относительно главной центральной оси  $z$  равен

$$J_z = 276 + 245 = 521 \text{ см}^4.$$

Вычисляем квадрат радиуса инерции заданного сложного поперечного сечения относительно главной центральной оси  $y$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{580 \text{ см}^4}{80,5 \text{ см}^2} = 7,20497 \text{ см}^2 = 7,20 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = 7,20 \text{ см}^2.$$

Вычисляем квадрат радиуса инерции заданного сложного поперечного сечения относительно главной центральной оси  $z$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{521 \text{ см}^4}{80,5 \text{ см}^2} = 6,47205 \text{ см}^2 = 6,47 \text{ см}^2; \quad i_z^2 = 6,47 \text{ см}^2.$$

### г). Определение координат точки $K$ , в которой приложена сила $F$

$$y_K = -\left(\frac{4}{2} + 3,19\right) = -5,19 \text{ см}; \quad z_K = +\left(\frac{6}{2}\right) = 3 \text{ см} \text{ (см. рис. 3.44).}$$

### д). Нахождение положения нейтральной линии

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на главных центральных осях, определяются по следующим формулам (3.67)

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_K}; \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_K}.$$



Следовательно,

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_K} = -\frac{6,47\text{см}^2}{-5,19\text{см}} = 1,2466\text{см} = 1,25\text{см} \text{ (на рис. 3.44 – отрезок } \mathbf{CM});$$

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_K} = -\frac{7,2\text{см}^2}{3\text{см}} = -2,4\text{см} \text{ (на рис. 3.44 – отрезок } \mathbf{CL}).$$

Проводя через точки  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{L}$  прямую, получаем положение нейтральной линии ( $\mathbf{Н.Л.}$ ) (рис. 3.44).

### е). Определение координат опасных точек

*Определение.* Опасными точками поперечного сечения являются точки, в которых возникают наибольшие напряжения.

Опасные – это точки, наиболее удаленные от нейтральной линии.

На рис. 3.44 – это точки  $\mathbf{K}$  (точка приложения силы  $\mathbf{F}$ ) и  $\mathbf{D}$ . Определяем их координаты

**Точка  $\mathbf{K}$ :**  $y_K = -5,19\text{см}$ ;  $z_K = 3\text{см}$  (рис. 3.44).

**Точка  $\mathbf{D}$ :**  $y_D = 4,3\text{см}$ ;  $z_D = -2,5\text{см}$  (рис. 3.44).

Координаты точки  $\mathbf{D}$  найдены графически, т.е. измерены расстояния от точки  $\mathbf{C}$  до точки  $\mathbf{D}$  по оси  $y$  и оси  $z$ .

*Полученный результат умножили на масштабный коэффициент (чертеж поперечного сечения должен быть выполнен в масштабе).*

### ж). Определение наибольших растягивающих и сжимающих напряжений

Нормальные напряжения в опасной точке  $\mathbf{K}$

$$\begin{aligned} \sigma_K = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_K y_K}{i_z^2} + \frac{z_K z_K}{i_y^2} \right) &= -\frac{F}{80,5\text{см}^2} \left[ 1 + \frac{(-5,19\text{см})(-5,19\text{см})}{6,47\text{см}^2} + \right. \\ &\left. + \frac{(3\text{см})(3\text{см})}{7,2\text{см}^2} \right] = -\frac{6,41F}{80,5\text{см}^2} = -\frac{7,96 \cdot 10^{-2} F}{1\text{см}^2} \text{ (сжатие)}. \end{aligned}$$

Нормальные напряжения в опасной точке  $\mathbf{D}$

$$\begin{aligned} \sigma_D = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_K y_D}{i_z^2} + \frac{z_K z_D}{i_y^2} \right) &= -\frac{F}{80,5\text{см}^2} \left[ 1 + \frac{(-5,19\text{см})(4,3\text{см})}{6,47\text{см}^2} + \right. \\ &\left. + \frac{(3\text{см})(-2,5\text{см})}{7,2\text{см}^2} \right] = -\frac{(-3,49)F}{80,5\text{см}^2} = \frac{4,34 \cdot 10^{-2} F}{1\text{см}^2} \text{ (растяжение)}. \end{aligned}$$

**Определение допускаемой нагрузки  $[F]$  из условий прочности на растяжение и сжатие**

Условие прочности на сжатие имеет следующий вид

$$|\sigma_K| \leq [\sigma_c].$$

Следовательно,

$$|\sigma_K| = \frac{7,96 \cdot 10^{-2} F}{1 \text{ см}^2} \leq 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}; \quad F \leq \frac{16 \text{ кН}}{7,96 \cdot 10^{-2}} = 201 \text{ кН}.$$

Условие прочности на растяжение имеет следующий вид

$$\sigma_D \leq [\sigma_p].$$

Следовательно,

$$\sigma_D = \frac{4,34 \cdot 10^{-2} F}{1 \text{ см}^2} \leq 4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}; \quad F \leq \frac{4 \text{ кН}}{4,34 \cdot 10^{-2}} = 92,2 \text{ кН}.$$

Из двух неравенств  $F \leq 201 \text{ кН}$  и  $F \leq 92,2 \text{ кН}$  выбираем меньшее значение силы, то есть допускаемая нагрузка для чугунного короткого стержня будет равна

$$[F] = 92,2 \text{ кН}.$$

### 3.5. Тема 5. Устойчивость центрально сжатых стержней.

#### 3.5.1. Основные теоретические положения

Во многих случаях проектирования инженерных сооружений обычных расчетов на прочность бывает недостаточно для того, чтобы получить полное представление о работе сооружения. Выяснение того, что напряжения не превосходят допустимого (предельного) значения, еще не позволяет сделать вывод о безопасности эксплуатации сооружения. Это вызвано тем, что наряду с проблемой прочности существует проблема *устойчивости* сооружения или его элементов. Устойчивость есть свойство сооружения оказывать сопротивление посторонним случайным воздействиям и самостоятельно восстанавливать свое положение и форму равновесия в деформированном состоянии, когда случайные воздействия исчезают.

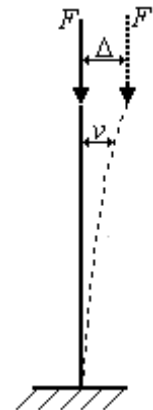
Определение. Переход сооружения из устойчивого состояния в неустойчивое называется потерей устойчивости.

Границу этого перехода называют *критическим состоянием* сооружения, а соответствующие нагрузки – *критическими*.

Определение. Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия центрально сжатого прямого стержня называется продольным изгибом.

Определение. Наименьшее значение центрально приложенной сжимающей силы  $F$ , при которой первоначальная прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой, называется критической силой.

Появление продольного изгиба опасно тем, что при нем происходит очень сильное нарастание прогибов при малом нарастании сжимающей силы. Прогибы и нагрузки связаны между собой нелинейной зависимостью.



Условие устойчивости центрально сжатого стержня по методу допускаемых напряжений имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma] \quad (3.71)$$

В этой формуле

$\sigma_{max}$  – максимальное нормальное напряжение в стержне;

$N$  – продольная сила, возникающая в стержне ( $N = F$ );

$A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$\varphi$  – коэффициент продольного изгиба центрально – сжатых стержней (коэффициент понижения основного допускаемого напряжения);

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

Применяя условие устойчивости, можно выполнять три вида расчета:

1. Проектный расчет. По заданной нагрузке  $F$  и допускаемому напряжению  $[\sigma]$  находят величину требуемой площади поперечного сечения методом последовательных приближений, начиная со значения  $\varphi = 0,5$ , так как ( $0 < \varphi \leq 1$ )

$$A_{\text{треб}} \geq \frac{N}{\varphi \cdot [\sigma]} \quad (3.72)$$

2. Определение допустимой нагрузки. По известной площади  $A$  и допустимому напряжению  $[\sigma]$  определяют величину допустимой нагрузки

$$[M] = [F] \leq \varphi \cdot [\sigma] \cdot A \quad (3.73)$$

3. Проверочный расчет. По известным значениям  $F$ ,  $A$ ,  $[\sigma]$  и  $\varphi$  проверяют выполнение условия устойчивости (3.71)

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma]$$

Определение. Величина внешней силы, при превышении которой теряется устойчивость данного вида деформации элемента конструкции, называется критической силой.

Величина критической силы ( $F_{\text{кр}}$ ) определяется по следующим формулам:

– если закон Гука выполняется, т.е.  $\lambda_{\text{факт.}} \geq \lambda_{\text{пред.}}$ , то величина критической силы ( $F_{\text{кр}}$ ) определяется по формуле Эйлера

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{(\mu l)^2}. \quad (3.74)$$

– если закон Гука не выполняется, т.е.  $\lambda_{\text{факт.}} < \lambda_{\text{пред.}}$ , то величина критической силы ( $F_{\text{кр}}$ ) определяется по формуле Тетмайера – Ясинского

$$F_{\text{кр}} = A \cdot (a - b \cdot \lambda). \quad (3.75)$$

В этих формулах

$E$  – модуль упругости при растяжении-сжатии (справочная величина);

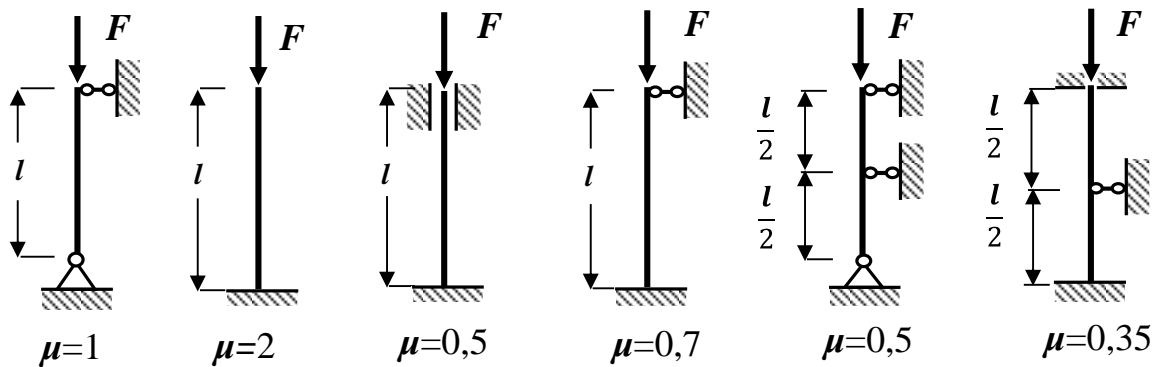
$J_{\text{min}}$  – минимальный главный момент инерции сечения стержня;

$L$  – длина стержня;

$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}}$  – гибкость стержня;

$i_{\text{min}}$  – минимальный радиус инерции  $\left( i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{J_{\text{min}}}{A}} \right)$ ;

$\mu$  – коэффициент приведенной длины, зависящий от способа закрепления концов стержня. Его значения приведены на рис. 3.45;



**Рис. 3.45. Коэффициенты приведенной длины**

$\lambda_{пред}$  – предельная гибкость стержня ( $\lambda_{пред} = 100$  для стали Ст. 3 и  $\lambda_{пред} = 70$  для дерева);

$A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$a, b$  – коэффициенты, используемые в формуле Тетмайера – Ясинского, ( $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа – для стали Ст. 3).

Коэффициент запаса устойчивости определяется по формуле

$$k_y = \frac{F_{кр}}{[F]}. \quad (3.76)$$

Из приведенных выше выражений видно, что коэффициент  $\varphi$  – коэффициент продольного изгиба центрально – сжатых стержней в конечном итоге зависит от площади подбираемого сечения, поэтому подбор размеров поперечного сечения стержня осуществляется методом последовательных приближений.

Суть этого метода заключается в том, что в первом приближении задается значение  $\varphi_1$  (удобно принимать  $\varphi_1 = 0,5$ , в середине диапазона, так как он изменяется в пределах  $0 < \varphi \leq 1$ ).

После этого по формуле (3.72) определяют  $A_1^{треб}$ , по найденному значению  $A_1^{треб}$  затем вычисляют  $J_{min}, i_{min}, \lambda_1$  и по таблице устанавливают фактическое значение  $\varphi'_1$ . При несовпадении  $\varphi_1$  и  $\varphi'_1$  для второго приближения принимают  $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}$  и все повторяют до тех пор, пока не будет выполняться неравенство  $|\varphi_n - \varphi'_n| \leq 0,02$ .

Опыт показывает, что после выполнения этого неравенства расчет можно считать законченным. Уточнив (округлив) размеры сечения, необходимо сделать проверку выполнения условия устойчивости.

В каждой попытке, после получения значения площади  $A_n$ , для определения коэффициента продольного изгиба  $\varphi_n$  нам необходимо знать значение минимального радиуса инерции  $i_{min}$ , поэтому для каждого подбираемого сечения полезно выразить  $i_{min}$  через  $F$ .

### **Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Устойчивость центрально сжатых стержней»**

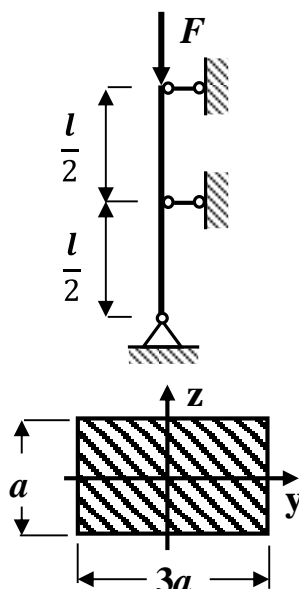
1. В чем заключается явление потери устойчивости центрально сжатого стержня?

2. Какое равновесное состояние гибкого центрально сжатого стержня является устойчивым, безразличным или неустойчивым?
3. Какая сила называется критической?
4. Запишите формулу Эйлера для определения критической силы.
5. Как определяется приведённая длина центрально сжатого стержня?
6. Запишите формулу Эйлера с учетом условий закрепления центрально сжатого стержня.
7. Что называется гибкостью стержня?
8. Что такое предельная гибкость центрально сжатого стержня?
9. Условия применимости формулы Эйлера?
10. Формула Ясинского. Условия её применимости?
11. Как записывается условие устойчивости центрально сжатого стержня и какие задачи решаются с помощью этого условия?
12. Как определяется коэффициент продольного изгиба и от чего он зависит?
13. Как определяется величина допускаемой нагрузки.
13. Что такое коэффициент запаса устойчивости?
15. Как подбирают сечение центрально сжатого стержня при расчете на устойчивость?

*После изучения этой темы можно приступить к решению задачи № 5, включенной в контрольную работу.*

### 3.5.2. Пример решения задачи № 5

#### «Устойчивость центрально сжатого стержня»



**Исходные данные:**

$$l = 4 \text{ м} = 400 \text{ см}; \quad F = 200 \text{ кН};$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

**Рис. 3.46. Расчетная схема**

**Стальной стержень длиной  $l$  сжимается силой  $F$  (рис. 3.46).**

**Требуется:**

1. Из условия устойчивости подобрать размеры поперечного сечения при допускаемом нормальном напряжении  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Расчет проводить с помощью метода

последовательных приближений, предварительно задавшись величиной коэффициента  $\varphi_1 = 0,5$ .

Если гибкость стойки в первом приближении окажется меньше **50**, необходимо проектную длину стойки увеличить в **2** раза, а при гибкости более **150** – уменьшить в **2** раза.

2. Проверить выполнение условия устойчивости.
3. Определить величину критической силы. Модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.
4. Найти значения допускаемой нагрузки и коэффициента запаса устойчивости.

### Решение

#### Определение размеров поперечного сечения стержня методом последовательных приближений

Условие устойчивости центрально сжатого стержня по методу допускаемых напряжений имеет вид (3.71)

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma],$$

где

$\sigma_{max}$  – максимальное нормальное напряжение в стержне;

$N$  – продольная сила, возникающая в стержне ( $N = F$ );

$A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$\varphi$  – коэффициент продольного изгиба центрально – сжатых стержней (коэффициент понижения основного допускаемого напряжения);

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

Из условия устойчивости определяем требуемую площадь поперечного сечения (3.72)

$$A^{треб} \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]} = \frac{200 \text{ кН}}{\varphi \cdot 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = \frac{12,5 \text{ см}^2}{\varphi}, \quad A^{треб} \geq \frac{12,5 \text{ см}^2}{\varphi}.$$

Площадь поперечного сечения стержня  $A = 3a^2$ . Приравнявая  $A$  и  $A^{треб}$ , получаем

$$3a^2 \geq \frac{12,5 \text{ см}^2}{\varphi} \rightarrow a \geq \sqrt{\frac{12,5 \text{ см}^2}{3\varphi}} = \frac{2,04 \text{ см}}{\sqrt{\varphi}} \rightarrow \boxed{a \geq \frac{2,04 \text{ см}}{\sqrt{\varphi}}}$$

Выразим геометрические характеристики поперечного сечения стержня через размер  $a$ .

Минимальный момент инерции и минимальный радиус инерции заданного поперечного сечения стержня равны

$$J_{min} = J_y = \frac{3a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{4}; \quad i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{4 \cdot 3a^2}} = \frac{a}{3,46}.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 400 \text{ см} \cdot 3,46}{a} = \frac{692 \text{ см}}{a} \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{692 \text{ см}}{a}}$$

Формулы, обведенные в рамку, используем в методе последовательных приближений.

Приближение №1: Принимаем численное значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi_1 = 0,5$ .

Следовательно,

$$a \geq \frac{2,04 \text{ см}}{\sqrt{0,5}} = 2,88 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{692 \text{ см}}{2,88 \text{ см}} = 240 > 150 .$$

В соответствии с условием задачи уменьшаем длину стержня в два раза, тогда гибкость стержня тоже уменьшится в два раза, т. е.  $\lambda = 120$ . Таким образом, для определения гибкости получаем новую формулу

$$\boxed{\lambda = \frac{346 \text{ см}}{a} .}$$

Используя **таблицу 1**, по значению гибкости стержня  $\lambda = 120$  находим значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi'_1 = 0,45$ .

**Таблица 1**

$\lambda$	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
$\varphi$	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32

Так как  $\varphi'_1$  и  $\varphi_1$  не совпали, делаем проверку

$$|\varphi_1 - \varphi'_1| = |0,5 - 0,45| = 0,05 > 0,02,$$

следовательно, переходим к следующему приближению.

Приближение №2: Принимаем численное значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi_2$  равное

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,45}{2} = 0,475.$$

Следовательно,



$$a \geq \frac{2,04 \text{ см}}{\sqrt{0,475}} = 2,96 \text{ см} \approx 3,00 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{346 \text{ см}}{2,96 \text{ см}} = 117.$$

Используя **таблицу 1**, методом линейной интерполяции определяем  $\varphi'_2$ :

$\lambda$	$\varphi$
110	0,52
117	$\varphi'_2$
120	0,45

---


$$\Delta\lambda_1 = 120 - 110 = 10 \quad \Delta\varphi_1 = 0,45 - 0,52 = -0,07$$

$$\Delta\lambda_2 = 117 - 110 = 7 \quad \Delta\varphi_2 = \varphi'_2 - 0,52.$$

Из пропорции  $\Delta\lambda_1 \cdot \Delta\varphi_2 = \Delta\lambda_2 \cdot \Delta\varphi_1$  находим

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\Delta\lambda_2 \cdot \Delta\varphi_1}{\Delta\lambda_1}; \quad \varphi'_2 - 0,52 = \frac{7 \cdot (-0,07)}{10} = -0,049.$$

Тогда

$$\varphi'_2 = 0,52 - 0,049 = 0,471.$$

Так как  $\varphi'_2$  и  $\varphi_2$  не совпали, делаем проверку

$$|\varphi_2 - \varphi'_2| = |0,475 - 0,471| = 0,004 < 0,02,$$

Проверка выполняется, следовательно, расчет можно заканчивать.

### Проверка выполнения условия устойчивости

Условие устойчивости центрально сжатого стержня по методу допускаемых напряжений имеет вид (3.71)

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma],$$

где

$$N = F.$$

Вычисляем численное значение фактической площади выбранного сечения стержня

$$A_{\text{факт}} = 3a^2 = 3 \cdot (3,00 \text{ см})^2 = 27,0 \text{ см}^2$$

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{факт}}} = \frac{200 \text{ кН}}{27,0 \text{ см}^2} = 7,41 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 74,1 \text{ МПа} < [\sigma_y] = 75,4 \text{ МПа},$$

где

$[\sigma_y]$  – допускаемое напряжение на устойчивость, равное

$$[\sigma_y] = \varphi'_2 [\sigma] = 0,471 \cdot 160 \text{ МПа} = 75,4 \text{ МПа}$$

*Условие устойчивости выполняется.*

Проверяем выполнение условия экономичности

$$\delta = \frac{|[\sigma_y] - \sigma|}{[\sigma_y]} \cdot 100\% = \frac{|75,4 - 74,1|}{75,4} \cdot 100\% = 1,72\% < 5\%.$$

*Условие экономичности выполняется.*

*Условия устойчивости и экономичности выполняются, следовательно, принимаем окончательно центрально сжатый стержень прямоугольного поперечного сечения размером  $\mathbf{b} \times \mathbf{h} = 9 \times 3 \text{ см}$ .*

Таким образом,

$$A^{\text{факт}} = 27,0 \text{ см}^2; \quad \lambda_{\text{факт}} = 117; \quad \varphi_{\text{факт}} = \varphi'_2 = 0,471.$$

### Определение величины критической силы

Так как  $\lambda_{\text{факт}} = 117 > \lambda_{\text{пред}} = 100$ , то критическую силу определяем по формуле Эйлера (3.74)

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 20,3 \text{ см}^4}{(0,5 \cdot 200 \text{ см})^2} = 400 \text{ кН},$$

где

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}; \quad J_{\text{min}} = \frac{3a \cdot a^3}{12} = \frac{3 \cdot (3,00 \text{ см})^4}{12} = 20,3 \text{ см}^4.$$

### Определение величины допускаемой нагрузки и коэффициента запаса устойчивости

Из условия устойчивости определяем величину допускаемой нагрузки (3.73)

$$[F] \leq \varphi \cdot [\sigma] \cdot A_{\text{факт}} \leq 0,471 \cdot 16 \cdot 27,0 \leq 203 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости будет равен

$$k_y = \frac{F_{\text{кр}}}{[F]} = \frac{400 \text{ кН}}{203 \text{ кН}} = 1,97.$$

Полученное значение коэффициента запаса устойчивости находится в допустимых для стали пределах ( $1,8 \leq k_y \leq 3$ ).

### РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Для подготовки к выполнению контрольной работы рекомендуется использовать следующую литературу:

1. Варданян, Г. С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник. – М.: НИЦ ИНФРА – М, 2014.
2. Александров, Анатолий Васильевич, Потапов, В. Д. Сопротивление материалов: Учебник для студентов строительных специальностей вузов. – М.: Высшая школа, 2004.
3. Краснобаев, Игорь Алексеевич, Смирнов, И. И. Сопротивление материалов: конспект лекций: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 270100 – «Строительство» ( спец. ИЗОС И ГК ). – Ростов – на–Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2010.
4. Атаров, Н. М. Сопротивление материалов в примерах и задачах: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 270100.– М.: ИНФРА – М, 2010



**ПРИЛОЖЕНИЕ 1**  
**ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Кафедра «Сопротивление материалов»**  
**Заочная форма обучения**

**Факультет** \_\_\_\_\_

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №** \_\_\_\_\_

**по** \_\_\_\_\_  
**(наименование дисциплины)**

**Студент** \_\_\_\_\_  
**(Направление (специальность),**  
**профиль подготовки)**

**Адрес студента** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
**(Курс, группа)**

\_\_\_\_\_  
**(Ф. И. О.)**

**Шифр** \_\_\_\_\_

**Ростов – на - Дону**

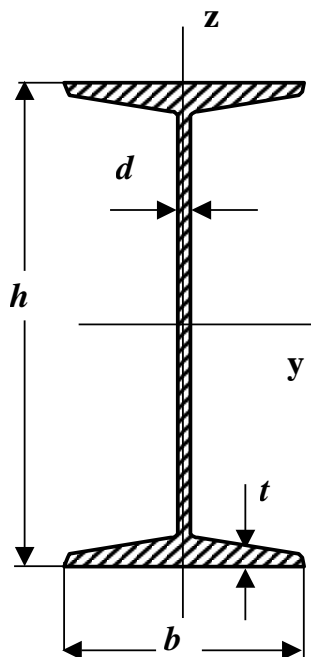
**2018 год**



**ПРИЛОЖЕНИЕ 2**  
**СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ**  
**И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**  
**ПО ДИСЦИПЛИНАМ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»**  
**И «ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»**

### Сортамент прокатной стали Двутавры стальные горячекатаные

ГОСТ 8239-89


**Обозначения:**
*A*- площадь сечения ;

*J*- момент инерции ;

*i*- радиус инерции ;

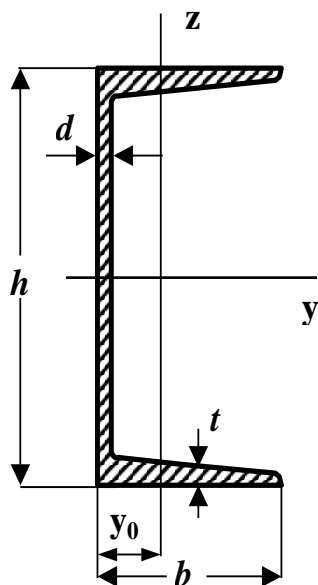
*W*- момент  
сопротивления ;

*S*- статический момент  
полусечения .

№	<i>h</i> мм	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>t</i> мм	<i>A</i> см <sup>2</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> см	<i>S<sub>y</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>J<sub>z</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>z</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>z</sub></i> см	Масса 1 п.м. кг
10	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,2	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,10	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108

## Швеллеры стальные горячекатаные

ГОСТ 8240-89



Обозначения:

*A*- площадь сечения;

*J*- момент инерции;

*i*- радиус инерции;

*W*- момент  
сопротивления;

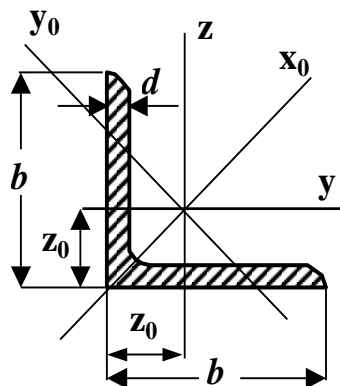
*S*- статический  
момент полусечения.

№	<i>h</i> мм	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>t</i> мм	<i>A</i> см <sup>2</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> см	<i>S<sub>y</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>J<sub>z</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>z</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>z</sub></i> см	<i>y<sub>0</sub></i> см	Масса Ин.М. кг
5	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24	5,9
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,70	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	17	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8	14,2
16a	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,30	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3



## Уголки стальные горячекатные равнополочные

ГОСТ 8509-86

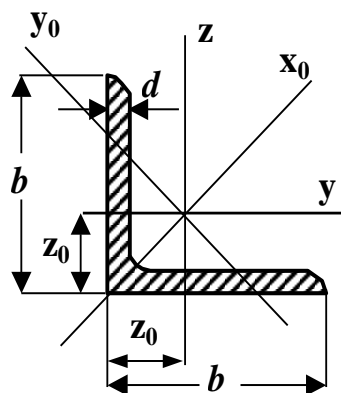

**Обозначения:**
*A* - площадь сечения;

*J* - момент инерции;

*i* - радиус инерции.

№	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>A</i> см <sup>2</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> см	<i>J<sub>xo</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>xo</sub></i> см	<i>J<sub>yo</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>yo</sub></i> см	<i>J<sub>yz</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>z<sub>o</sub></i> см
2	20	3	1,13	0,4	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,6
	20	4	1,46	0,5	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	0,47	0,73
	25	4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	0,59	0,76
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	0,68	0,8
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,3	1,15	0,6	0,59	0,85	0,85
	30	4	2,27	1,84	0,9	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	1,03	0,89
	32	4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	1,32	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69	1,37	0,97
	35	4	2,67	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68	1,75	1,01
	35	5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68	2,1	1,05
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09
	40	4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,9	0,78	2,68	1,13
	40	5	3,79	5,53	1,21	8,75	1,52	2,3	0,78	3,22	1,17
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	3	1,21
	45	4	3,48	6,63	1,38	10,52	1,74	2,74	0,89	3,89	1,26
	45	5	4,29	8,03	1,37	12,74	1,72	3,33	0,88	4,71	1,3

Продолжение



Обозначения:

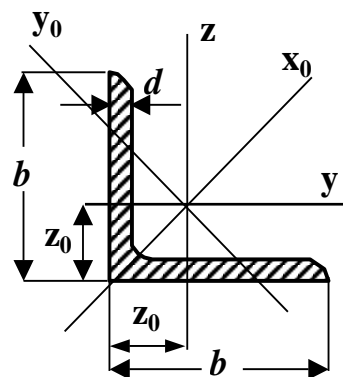
*A*- площадь сечения ;

*J*- момент инерции ;

*i*- радиус инерции .

№	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>A</i> см <sup>2</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> см	<i>J<sub>xo</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>xo</sub></i> см	<i>J<sub>yo</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>yo</sub></i> см	<i>J<sub>yz</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>z<sub>o</sub></i> см
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1,00	4,16	1,33
	50	4	3,89	9,21	1,54	14,63	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
	50	5	4,8	11,2	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
	50	6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,79	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	56	5	5,41	15,97	1,72	25,36	2,16	6,59	1,1	9,41	1,57
6,3	63	4	4,96	18,86	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	63	5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	63	6	7,28	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,9	1,78
7	70	4,5	6,2	29,04	2,16	46,03	2,72	12,04	1,39	17	1,88
	70	5	6,86	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,7	1,9
	70	6	8,15	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,1	1,94
	70	7	9,42	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,2	1,99
	70	8	10,67	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,2	2,02
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,65	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	75	6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,06
	75	7	10,15	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,47	31,2	2,1
	75	8	11,5	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	35	2,15
	75	9	12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	38,6	2,18

Продолжение



Обозначения:

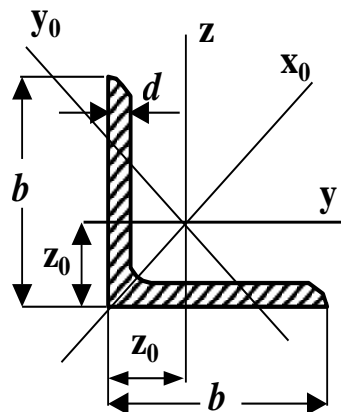
*A*- площадь сечения;

*J*- момент инерции;

*i*- радиус инерции.

№	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>A</i> см <sup>2</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> см	<i>J<sub>xo</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>xo</sub></i> см	<i>J<sub>yo</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>yo</sub></i> см	<i>J<sub>yz</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>z<sub>o</sub></i> см
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	80	6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	80	7	10,85	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	38,3	2,23
	80	8	12,3	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	43	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34,0	1,79	48,1	2,43
	90	7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	90	8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
	90	9	15,6	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	68	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,89	50,7	1,99	71,4	2,68
	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	100	8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	100	10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	110	2,83
	100	12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
	100	14	26,3	237	3	375	3,78	99,3	1,94	138	2,99
	100	16	29,7	264	2,98	416	3,74	112	1,94	152	3,06
11	110	7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	110	8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3

Окончание



Обозначения:

$A$ - площадь сечения;

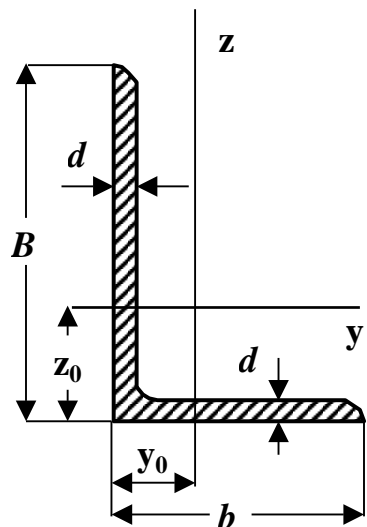
$J$ - момент инерции;

$i$ - радиус инерции.

$N_0$	$b$ мм	$d$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$J_y$ см <sup>4</sup>	$i_y$ см	$J_{x_0}$ см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ см	$J_{y_0}$ см <sup>4</sup>	$i_{y_0}$ см	$J_{yz}$ см <sup>4</sup>	$z_0$ см
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	1073	5,37
	200	13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	1156	5,42
	200	14	54,6	2097	6,2	3333	7,81	861	3,97	1236	5,46
	200	16	62	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	1393	5,54
	200	20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	1689	5,7
	200	25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	2028	5,89
	200	30	111,5	4020	6	6351	7,55	1698	3,89	2332	6,07
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,6	1159	4,38	1655	5,91
	220	16	68,6	3175	6,8	5045	8,58	1306	4,36	1869	6,02
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	2775	6,75
	250	18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	3089	6,83
	250	20	97	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	3395	6,91
	250	22	106,1	6270	7,69	9962	9,69	2579	4,93	3691	7
	250	25	119,7	7006	7,65	11126	9,64	2887	4,91	4119	7,11
	250	28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,9	4527	7,23
	250	30	142	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	4788	7,31

Уголки стальные горячекатаные неравнополочные

ГОСТ 8510-86



Обозначения:

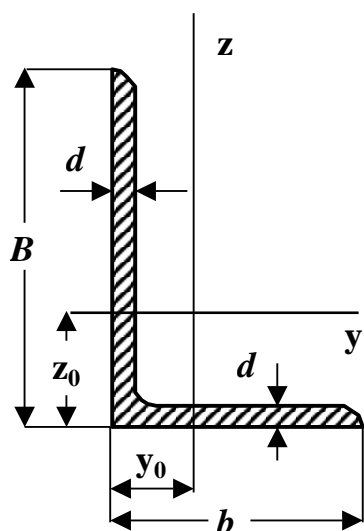
$A$  - площадь сечения ;

$J$  - момент инерции ;

$i$  - радиус инерции .

№	$B$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$A$ см <sup>2</sup>	$J_y$ см <sup>4</sup>	$i_y$ см	$J_z$ см <sup>4</sup>	$i_z$ см	$J_{yz}$ см <sup>4</sup>	$y_0$ см	$z_0$ см
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,7	0,78	0,22	0,44	0,22	0,42	0,86
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	0,47	0,49	1,08
	32	20	4	1,94	1,93	1	0,57	0,54	0,59	0,53	1,12
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	1,27	0,93	0,7	0,96	0,59	1,32
	40	25	4	2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	1,22	0,63	1,37
	40	25	5	3,03	4,73	1,25	1,41	0,68	1,44	0,66	1,41
4,5/28	45	28	3	2,14	4,41	1,48	1,32	0,79	1,38	0,64	1,47
	45	28	4	2,8	5,68	1,42	1,69	0,78	1,77	0,68	1,51
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,6	1,99	0,91	2,01	0,72	1,6
	50	32	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,9	2,59	0,76	1,65
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	1,78	3,7	1,02	3,74	0,84	1,82
	56	36	5	4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	4,5	0,88	1,87
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	5,25	0,91	2,03
	63	40	5	4,98	19,9	2	6,26	1,12	6,41	0,95	2,08
	63	40	6	5,9	23,3	1,99	7,29	1,11	7,44	0,99	2,12
	63	40	8	7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	9,27	1,07	2,2
7/4,5	70	45	5	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	9,12	1,05	2,28
7,5/5	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	12	1,17	2,39
	75	50	6	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	14,1	1,21	2,44
	75	50	8	9,47	52,4	2,35	18,55	1,4	17,8	1,29	2,52

Продолжение



Обозначения:

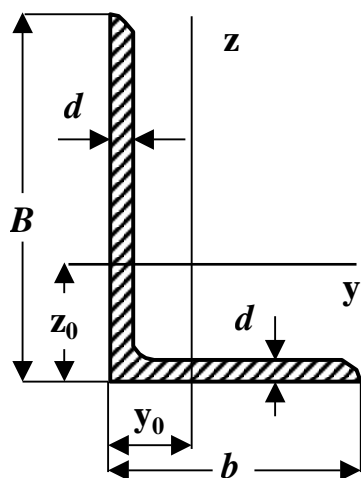
*A* - площадь сечения ;

*J* - момент инерции ;

*i* - радиус инерции .

№	<i>B</i> мм	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>A</i> см <sup>2</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> см	<i>J<sub>z</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>z</sub></i> см	<i>J<sub>yz</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>y<sub>o</sub></i> см	<i>z<sub>o</sub></i> см
8/5	80	50	5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	13,2	1,13	2,6
	80	50	6	7,55	49,0	2,55	14,85	1,4	15,5	1,17	2,65
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	20,54	1,26	2,92
	90	56	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	22,23	1,28	2,95
	90	56	8	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	28,33	1,36	3,04
10/6,3	100	63	6	9,58	98,3	3,2	30,6	1,79	31,5	1,42	3,23
	100	63	7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	36,1	1,46	3,28
	100	63	8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	40,5	1,5	3,32
	100	63	10	15,5	154	3,15	47,2	1,75	48,6	1,58	3,4
11/7	110	70	6,5	11,45	142	3,53	45,6	2	46,8	1,58	3,55
	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	55,9	1,64	3,61
12,5/8	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	74,7	1,8	4,01
	125	80	8	16,0	256	4	83,0	2,28	84,1	1,84	4,05
	125	80	10	19,7	312	3,98	100	2,26	102	1,92	4,14
	125	80	12	23,4	365	3,95	117	2,24	118	2	4,22
14/9	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	121	2,03	4,49
	140	90	10	22,2	444	4,47	146	2,58	147	2,12	4,58
16/10	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	194	2,24	5,19
	160	100	10	25,3	667	5,13	204	2,84	213	2,28	5,23
	160	100	12	30,0	784	5,11	239	2,82	249	2,36	5,32
	160	100	14	34,7	897	5,08	272	2,8	282	2,43	5,4

Окончание



№	<i>B</i> мм	<i>b</i> мм	<i>d</i> мм	<i>A</i> см <sup>2</sup>	<i>J<sub>y</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> см	<i>J<sub>z</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>z</sub></i> см	<i>J<sub>yz</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>y<sub>o</sub></i> см	<i>z<sub>o</sub></i> см
18/11	180	110	10	28,3	952	5,8	276	3,12	295	2,44	5,88
	180	110	12	33,7	1123	5,77	324	3,1	348	2,52	5,97
20/12,5	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	465	2,79	6,5
	200	125	12	37,9	1568	6,43	482	3,57	503	2,83	6,54
	200	125	14	43,9	1801	6,41	551	3,54	575	2,91	6,62
	200	125	16	49,8	2026	6,38	617	3,52	643	2,99	6,71
25/16	250	160	16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	1351	3,69	8,14

*Зависимость между механическими единицами СИ, СГС и внесистемными единицами*

$1 \text{ м} = 10^2 \text{ см}$	$1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$	$1 \text{ Н} = 10^{-3} \text{ кН}$	$1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$	$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$
$1 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ см}^2$	$1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2$	$1 \text{ Н} = 10^{-6} \text{ МН}$	$1 \text{ МН} = 10^3 \text{ кН}$	$1 \text{ кПа} = 1 \text{ кН/м}^2$
$1 \text{ м}^3 = 10^6 \text{ см}^3$	$1 \text{ см}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3$	$1 \text{ кН} = 10^{-3} \text{ МН}$	$1 \text{ МН} = 10^6 \text{ Н}$	$1 \text{ МПа} = 1 \text{ МН/м}^2$
$1 \text{ м}^4 = 10^8 \text{ см}^4$	$1 \text{ см}^4 = 10^{-8} \text{ м}^4$	$1 \text{ т} = 10 \text{ кН}$	$1 \text{ кг} = 10 \text{ Н}$	$1 \text{ МН} = 100 \text{ т}$

$1 \text{ кПа} = 10^3 \text{ Па}$	$1 \text{ кПа} = 10^{-3} \text{ МПа}$	$1 \text{ МПа} = 10^3 \text{ кПа}$	$1 \text{ МПа} = 10 \text{ кг/см}^2$	$1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}$
-----------------------------------	---------------------------------------	------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------

Таблица моментов инерции и моментов сопротивления простейших фигур

$A = bh$	$A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0,785d^2$	$y_0 = \frac{b}{3}$ $z_0 = \frac{h}{3}$	$z_0 = \frac{h}{3}$	$z_0 = \frac{2d}{3\pi} \approx 0,212d$
$J_y = \frac{bh^3}{12}$ $J_z = \frac{b^3h}{12}$	$J_y = J_z = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4$	$A = \frac{bh}{2}$	$A = \frac{bh}{2}$	$A = \frac{\pi d^2}{8} \approx 0,393d^2$
$J_{yz} = 0$	$J_{yz} = 0$	$J_y = \frac{bh^3}{36}$	$J_y = \frac{bh^3}{36}$	$J_y = \frac{d^4}{16} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \approx 0,00687d^4$
$W_y = \frac{bh^2}{6}$	$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$	$J_z = \frac{b^3h}{36}$	$J_z = \frac{b^3h}{48}$	$J_z = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0,0245d^4$
$W_z = \frac{b^2h}{6}$	$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$ $W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$	$J_{yz} = -\frac{b^2h^2}{72}$	$J_{yz} = 0$	$J_{yz} = 0$

**Обозначения:**  $y, z$  – центральные оси;  $A$  – площадь фигуры;  
 $J_y, J_z$  – осевые моменты инерции;  $J_{yz}$  – центробежный момент инерции;  
 $W_y, W_z$  – осевые моменты сопротивления;  
 $J_\rho$  – полярный моменты инерции;  $W_\rho$  – полярный момент сопротивления.



**Таблица коэффициентов продольного изгиба  $\varphi$  центрально сжатых элементов**

Материал	Гибкость $\lambda$															
	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
Ст 2,3 (сталь)	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23
Дерево	0,93	0,87	0,8	0,71	0,61	0,47	0,37	0,30	0,25	0,21	0,18	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09

**Примечание:** Значения  $\varphi$  для дерева определены в соответствии со СН и П II –25-80 по формулам

$$\varphi = 1 - 0,8 \left( \frac{\lambda}{100} \right)^2, \text{ если } \lambda \leq 70 ; \varphi = \frac{3000}{\lambda^2}, \text{ если } \lambda > 70 . \text{ Где } \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} \cdot \text{ гибкость стержня};$$

$\mu$  – коэффициент приведения длины ;  $l$  - длина стержня;  $i_{\min}$  - минимальный радиус инерции.

Значения коэффициентов  $a$  и  $b$  для некоторых материалов, используемых в формуле

Ф.С.Ясинского:  $\sigma_{кр} = a - b\lambda$

Материал	$a$ , МПа	$b$ , МПа	$\lambda_{пред}$
Сталь	310	1,14	100
Дерево	40	0,203	70

$\lambda_{пред}$  – предельная гибкость стержня

### Механические характеристики материалов

Сталь				Медь		Чугун	Дерево
$E$ МПа	$G$ МПа	$\alpha$ 1/град	$\gamma$ кН/м <sup>3</sup>	$E$ МПа	$\alpha$ 1/град	$E$ МПа	$E$ МПа
$2,06 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$	$125 \cdot 10^{-7}$	78	$0,98 \cdot 10^5$	$165 \cdot 10^{-7}$	$1,18 \cdot 10^5$	$0,98 \cdot 10^4$

**Обозначения:**  $E$  -модуль упругости при растяжении;

$G$  - модуль упругости при сдвиге;

$\nu$  –коэффициент Пуассона;

$\gamma$  - объемный вес;

$\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$