



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

**Практикум**  
по дисциплинам  
«Сопротивление материалов» и «Техническая  
механика»

Методические указания по выполнению  
расчетно-графической работы на тему

**«Построение эпюр внутренних  
силовых факторов в балках и  
плоских рамах»**

Автор  
Еремин В.Д.

Ростов-на-Дону, 2022

## Аннотация

Методические указания содержат индивидуальные данные, расчетные схемы и контрольные вопросы к расчетно-графической работе на тему «Построение эпюр внутренних силовых факторов в балках и плоских рамах» по дисциплинам «Сопротивление материалов» и «Техническая механика».

Предназначены для подготовки бакалавров и специалистов, обучающихся по техническим направлениям подготовки (специальностям).

## Автор

к.т.н., профессор  
кафедры «Сопротивление материалов»  
Еремин В.Д.



## Оглавление

<b>ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В БАЛКАХ И ПЛОСКИХ РАМАХ</b> .....	<b>4</b>
Тема 1. Основные теоретические положения .....	4
1.1. Основные типы опор и балок .....	4
1.2. Основные виды внешних нагрузок, вызывающих изгиб балок .....	6
1.3. Определение опорных реакций в балках и рамах .....	6
1.4. Внутренние силовые факторы при изгибе. Основные определения и правила знаков .....	9
1.5. Эпюры внутренних силовых факторов. Правила их построения.....	12
1.6. Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для балок.....	13
1.7. Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для рам .....	14
Тема 2. Примеры построения эпюр внутренних силовых факторов в статически определимых балках и рамах .....	15
2.1. Задача 1. Построение эпюр внутренних силовых факторов в статически определимой консольной балке.....	15
2.2. Задача 2. Построение эпюр внутренних силовых факторов в статически определимой балке на двух опорах .....	20
2.3. Задача 3. Построение эпюр внутренних силовых факторов в статически определимой балке с промежуточным шарниром .....	26
2.4. Задача 4. Построение эпюр внутренних силовых факторов в статически определимой плоской раме.....	34
2.5. Задача №5. Обратная задача.....	47
<b>Рекомендуемая литература</b> .....	<b>58</b>
<b>Приложение 1</b> .....	<b>59</b>

## ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В БАЛКАХ И ПЛОСКИХ РАМАХ

### Тема 1. Основные теоретические положения

В строительных конструкциях широко применяются элементы, работающие на изгиб. Характерным признаком изгиба является изменение кривизны продольной оси бруса.

Прямой брус (стержень), работающий на изгиб, называется балкой.

*Сечения, которые расположены в плоскостях, перпендикулярных к геометрической оси стержня, называются поперечными сечениями.*

При изгибе балки продольные волокна, находящиеся на выпуклой части, растягиваются, а находящиеся на вогнутой части – сжимаются. Слой промежуточных волокон, которые, искривляясь, не изменяют своей длины, называется *нейтральным слоем*.

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной линией* или *нейтральной осью* (нулевой линией).

При действии на балку системы внешних сил, расположенных в плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции каждого поперечного сечения балки, и перпендикулярных к ее продольной оси, в каждом ее сечении могут возникать две внутренние силы – изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ . Эта плоскость называется *силовой плоскостью*.

Если в поперечных сечениях балки возникают одновременно изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ , то такой вид деформации называется *плоским поперечным изгибом*, если только изгибающий момент  $M$  – *чистым изгибом*. В условиях чистого изгиба может находиться вся балка или отдельные ее участки.

Рамой называется геометрически неизменяемая стержневая система, стержни которой (стойки и ригели) во всех или в некоторых узлах жестко соединены между собой. Некоторые узлы могут быть шарнирными или, в общем случае, упруго – податливыми. В жестких узлах взаимный поворот примыкающих стержней исключается как до деформаций, так и после деформаций. Вертикальные элементы рамы называются *стойками*, а горизонтальные или близкие к горизонтальному расположению элементы рамы называются *ригелями*. Точки соединения стоек и ригелей рамы называются *узлами*. Различают рамы пространственные и плоские. У *плоской* рамы все геометрические оси ее элементов лежат в одной плоскости, которая совпадает с плоскостью нагрузки и является главной плоскостью для всех элементов рамы.

#### 1.1. Основные типы опор и балок

Для того чтобы балка (рама) могла воспринимать внешнюю нагрузку и передавать ее на основание, она должна быть соединена с ним опорными связями (опорами). Существует несколько основных типов опор:

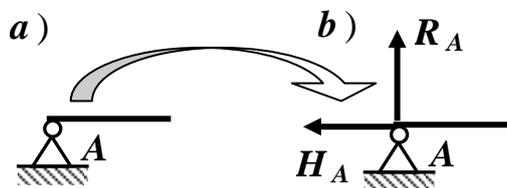
- **Защемление или заделка** (рис. 1.1, а)



**Рис. 1.1. Защемление или заделка**

Защемленный конец балки (рамы) **A** не может смещаться ни поступательно (в горизонтальном и вертикальном направлениях), ни поворачиваться. В такой опоре возникает реакция, составляющими которой являются вертикальная сила  **$R_A$** , препятствующая вертикальному смещению, горизонтальная сила  **$H_A$** , исключаяющая горизонтальное смещение, и момент  **$M_A$** , препятствующий повороту (рис. 1.1, б).

- **Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора** (рис. 1.2, а)

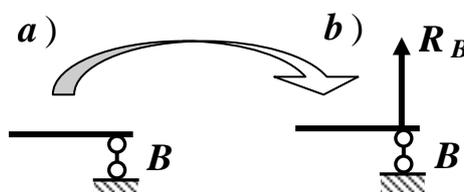


**Рис. 1.2. Шарнирно-неподвижная опора**

Эта опора не позволяет сечению балки (рамы) в точке **A** иметь поступательные перемещения в горизонтальном и вертикальном направлениях, но при этом возможен поворот сечения в одной плоскости относительно оси цилиндрического шарнира. В такой опоре возникает реакция, составляющими которой являются вертикальная сила  **$R_A$** , препятствующая вертикальному смещению, и горизонтальная сила  **$H_A$** , исключаяющая горизонтальное смещение (рис. 1.2, б).

- **Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора** (рис. 1.3, а)

Эта опора позволяет сечению балки (рамы) в точке **B** поворачиваться вокруг шарнира и перемещаться в горизонтальном направлении, но не позволяет перемещаться по вертикали. В такой опоре возникает только реакция  **$R_B$** , препятствующая вертикальному смещению (рис. 1.3, б).



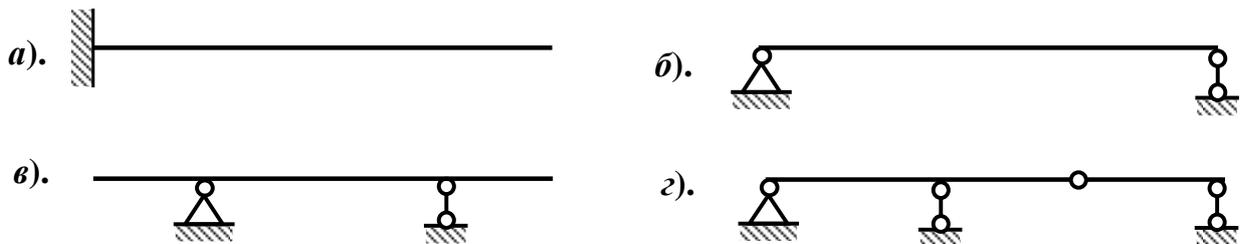
**Рис. 1.3. Шарнирно-подвижная опора**

Для обеспечения неподвижности балки (рамы), то есть, чтобы она могла сопротивляться приложенным внешним силам, необходимо зафиксировать один ее конец или в одном ее сечении устроить шарнирно – неподвижную опору, а в другом – шарнирно – подвижную опору.

Таким образом, наименьшее число связей, не позволяющих балке (раме) перемещаться в плоскости действия нагрузок, равно трем.

Рассмотрим различные типы простейших балок, в зависимости от способа их закрепления (рис. 1.4):

- а). Консольная или жестко заземленная балка;
- б). Однопролетная шарнирно – опертая балка /балка на двух опорах/;
- в). Консольная шарнирно – опертая балка;
- г). Многопролетная балка (балка с промежуточным шарниром).



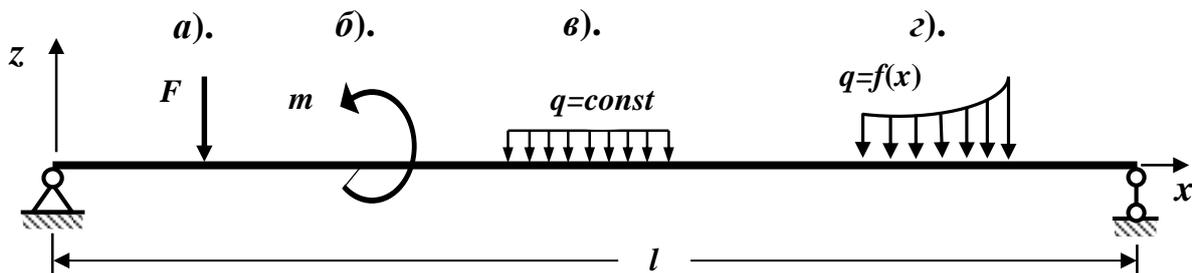
**Рис. 1.4. Основные типы простейших балок**

Балки с промежуточным шарниром представляют собой сложную систему, состоящую из нескольких брусков, соединенных между собой связями, позволяющими поворот сечений брусков в соединении (в шарнире).

Поэтому, в промежуточном шарнире возникают только вертикальные и горизонтальные реактивные силы, а момент равен нулю.

### 1.2. Основные виды внешних нагрузок, вызывающих изгиб балок

На рис. 1.5 показаны различные виды внешних нагрузок, вызывающих изгиб: а – сосредоточенная сила; б – сосредоточенная пара сил с моментом  $m$  (кратко – сосредоточенный момент); в – равномерно – распределенная нагрузка; г – неравномерно – распределенная нагрузка.



**Рис. 1.5. Основные виды внешних нагрузок**

### 1.3. Определение опорных реакций в балках и рамах

Для определения внутренних усилий и напряжений, возникающих в элементах любой конструкции, необходимо найти все действующие на нее нагрузки, а, следовательно, и все неизвестные опорные реакции.

Для определения опорных реакций для плоской системы сил можно, в общем случае, составить три уравнения равновесия (статики) в любых удобных

комбинациях:

а). *Первая комбинация*

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \mathbf{0} - \text{Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось } \mathbf{x} \text{ равна нулю;} \\ \Sigma F_z &= \mathbf{0} - \text{Сумма проекций всех сил на вертикальную ось } \mathbf{z} \text{ равна нулю;} \\ \Sigma M_A &= \mathbf{0} - \text{Сумма моментов всех сил относительно точки } \mathbf{A} \text{ равна нулю.} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнение  $\Sigma M_B = \mathbf{0}$  (Сумма моментов всех сил относительно точки  $\mathbf{B}$  равна нулю)

используется для проверки правильности полученных результатов.

б). *Вторая комбинация*

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \mathbf{0} - \text{Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось } \mathbf{x} \text{ равна нулю;} \\ \Sigma M_A &= \mathbf{0} - \text{Сумма моментов всех сил относительно точки } \mathbf{A} \text{ равна нулю;} \\ \Sigma M_B &= \mathbf{0} - \text{Сумма моментов всех сил относительно точки } \mathbf{B} \text{ равна нулю.} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Уравнение  $\Sigma F_z = \mathbf{0}$  (Сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $\mathbf{z}$  равна нулю)

используется для проверки правильности полученных результатов.

Уравнения равновесия нужно составлять так, чтобы в каждое уравнение, по возможности, входила только одна неизвестная опорная реакция. Это облегчит нахождение опорных реакций.

Все неизвестные опорные реакции в многопролетных балках, имеющих промежуточный шарнир, можно определить двумя способами:

1). *Метод моментной точки (способ, учитывающий свойство промежуточного шарнира).*

В этом случае необходимо записать три уравнения равновесия для всей балки и к ним добавить дополнительные уравнения, отражающие свойство промежуточного шарнира, то есть, сумма моментов всех сил, расположенных слева (справа) от промежуточных шарниров, относительно шарнира равна нулю (рис. 1.6):

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \mathbf{0} - \text{Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось } \mathbf{x} \text{ равна нулю;} \\ \Sigma M_A &= \mathbf{0} - \text{Сумма моментов всех сил относительно опоры } \mathbf{A} \text{ равна нулю;} \\ \Sigma M_D &= \mathbf{0} - \text{Сумма моментов всех сил относительно опоры } \mathbf{D} \text{ равна нулю;} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$\Sigma M_C^{\text{левых сил}} = \mathbf{0}$  или  $\Sigma M_C^{\text{правых сил}} = \mathbf{0}$  – Сумма моментов всех сил, расположенных слева (справа) от промежуточных шарниров, относительно шарнира равна нулю.

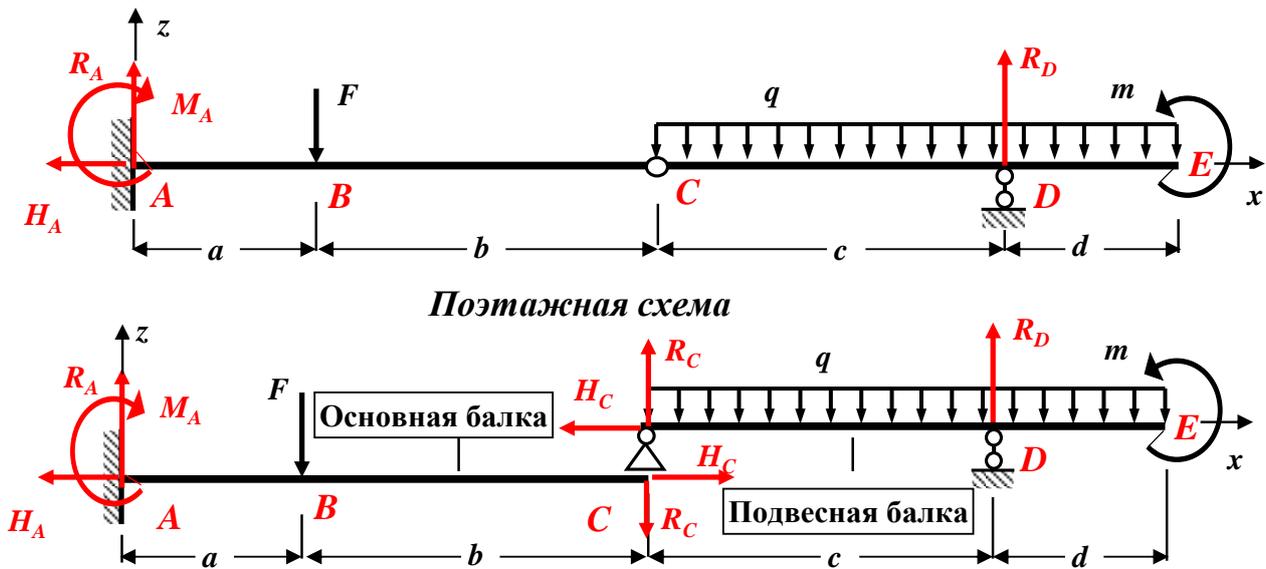
Уравнение  $\Sigma F_z = \mathbf{0}$  (Сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $\mathbf{z}$  равна нулю)

используется для проверки правильности полученных результатов.

2). *Метод построения «поэтажной» схемы балки.*

Для удобства расчета и наглядности представления о характере работы отдельных частей многопролетной балки строится ее «поэтажная» схема.

В этом случае заданную балку мысленно разрезают по промежуточному шарниру (промежуточным шарнирам) и выделяют основную балку (их может быть одна или несколько) и подвесные балки (рис. 1.6).



**Рис. 1.6. Заданная балка и ее «поэтажная» схема**

При этом вначале выделяют основные балки, то есть те, которые способны самостоятельно нести нагрузку, а затем вспомогательные, которые имеют только одну опору или не имеют их вовсе. Недостающими опорами для них служат соединительные шарниры.

Таким образом, основными или главными является те балки, которые могут самостоятельно сопротивляться приложенным внешним силам (нести внешнюю нагрузку) после разрезания заданной балки по промежуточным шарнирам, так как они имеют три кинематические связи (балка ABC на рис. 1.6).

Остальные балки являются подвесными или второстепенными (балка CDE на рис. 1.6).

После построения «поэтажной» схемы, заданную балку с промежуточными шарнирами, можно рассматривать как состоящую из ряда простых балок.

Затем рассчитывают каждую простую балку в отдельности.

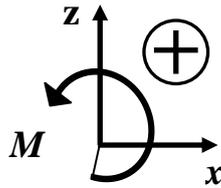
Расчет простых балок производят, начиная с самых верхних подвесных и последовательно переходя к ниже лежащим балкам.

Расчет простых балок сводится к определению опорных реакций и построению эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

При расчете ниже лежащих балок необходимо учитывать не только заданную внешнюю нагрузку, которая к ним приложена, но и силы, равные по величине опорным реакциям выше лежащих подвесных балок и противоположно направленные (рис. 1.6).

Таким образом, передача нагрузки с верхних подвесных балок на ниже лежащие осуществляется с помощью условных сосредоточенных сил в промежуточных шарнирах. Эти силы численно равны соответствующим условным опорным реакциям в подвесных балках (рис. 1.6).

Составляя уравнения равновесия (статики), обычно используют правило знаков, показанное на рис. 1.7, т.е. горизонтальные и вертикальные силы положительны, если их направления совпадают с направлениями осей  $x$  и  $z$ . Положительное направление моментов – против хода часовой стрелки.



**Рис. 1.7. Правила знаков**

*Балки (рамы), у которых все опорные реакции могут быть определены только из уравнений равновесия (статики), называются статически определимыми.*

#### **1.4. Внутренние силовые факторы при изгибе. Основные определения и правила знаков**

При действии на балку внешней нагрузки, перпендикулярной к геометрической оси балки и расположенной в одной из главных плоскостей инерции каждого поперечного сечения балки, в ее сечениях, в общем случае, возникают изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ .

Внутренние силы, возникающие в любом поперечном сечении стержня плоской рамы, в общем случае приводятся к трем внутренним силовым факторам: продольной силе  $N$ , поперечной силе  $Q$  и изгибающему моменту  $M$ .

Внутренние силовые факторы определяются через внешние силы, действующие на балку /раму/, с помощью метода сечений, применение которого позволяет сформулировать общие правила для нахождения указанных внутренних усилий на каждом участке балки (рамы).

Участком называется часть балки (рамы), в пределах которой закон (уравнение) изменения данного внутреннего усилия постоянен.

Границами участка являются точки приложения сосредоточенных сил, сосредоточенных моментов, точки начала и конца распределенной нагрузки.

Суть метода сечений сводится к следующему:

1. Мысленно проводим поперечное сечение, которое разбивает балку /раму/ на две части.

2. Выбираем ту часть балки /рамы/, на которую действуют известные нагрузки (наименьшее число известных нагрузок).

3. Составляем выражения для изгибающего момента  $M$ , поперечной силы  $Q$  и продольной силы  $N$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

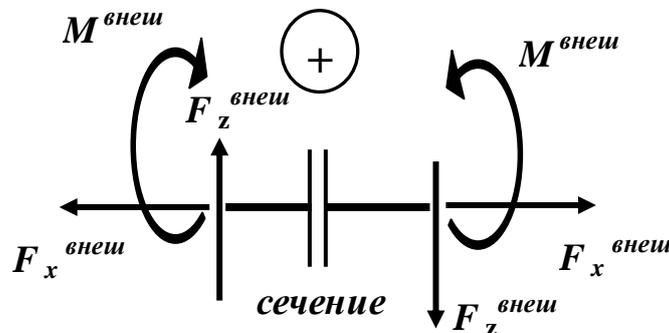
Определение. Изгибающий момент  $M$  в произвольном поперечном сечении балки /рамы/ численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от проведенного сечения, относительно нейтральной оси этого поперечного сечения (или относительно той точки продольной оси балки /рамы/, через которую проходит рассматриваемое сечение).

**Определение.** Поперечная сила  $Q$  в произвольном поперечном сечении балки /рамы/ численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от проведенного сечения, на ось, перпендикулярную к геометрической оси балки /рамы/.

**Определение.** Продольная сила  $N$  в произвольном поперечном сечении балки /рамы/ численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от проведенного сечения, на геометрическую ось рассматриваемого элемента балки /рамы/.

### Правила знаков внутренних силовых факторов для балок

**Правило знаков.** Изгибающий момент  $M$  в поперечном сечении балки положителен ( $M = + M^{\text{внеш}}$ ), если момент внешней силы ( $M^{\text{внеш}}$ ) направлен по ходу часовой стрелки – от сечения слева, и против хода часовой стрелки – от сечения справа (рис. 1.8), или изгибающий момент  $M$  считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки (рис. 1.9).



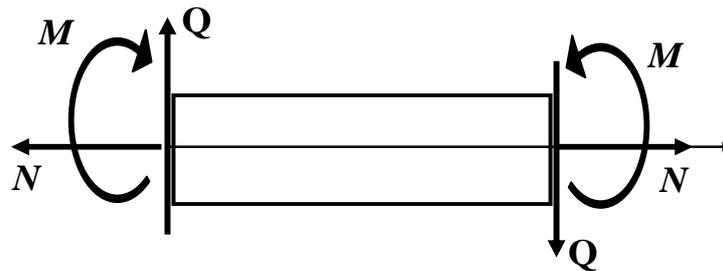
**Рис. 1.8. Правила знаков**

**Правило знаков.** Поперечная сила  $Q$  в поперечном сечении балки положительная ( $Q = + F_z^{\text{внеш}}$ ), если внешняя сила ( $F_z^{\text{внеш}}$ ) направлена вверх – от сечения слева и вниз – от сечения справа (рис. 1.8), или поперечная сила  $Q$  считается положительной, если внешние силы стремятся вращать рассматриваемую часть балки относительно центра тяжести проведенного сечения по ходу часовой стрелки (рис. 1.9).

**Правило знаков.** Продольная сила  $N$  в поперечном сечении балки положительная ( $N = + F_x^{\text{внеш}}$ ), если внешняя сила ( $F_x^{\text{внеш}}$ ) направлена влево – от сечения слева и вправо – от сечения справа (рис. 1.8), или продольная сила  $N$  считается положительной, если она вызывает растяжение (удлинение) рассматриваемой части балки (рис. 1.9).

**Вывод.** Изгибающий момент  $M$  в поперечном сечении балки считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки, поперечная сила  $Q$  считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки, продольная сила  $N$  считается положительной, если она вызывает растяжение рассматриваемой части балки.

Положительные направления этих силовых факторов показаны на рис. 1.9.



**Рис. 1.9. Положительные направления внутренних силовых факторов для балок**

Изгибающий момент, поперечная и продольная силы для балок отрицательны, если направления этих силовых факторов противоположны направлениям, указанным на рис. 1.9.

### Правила знаков внутренних силовых факторов для рам

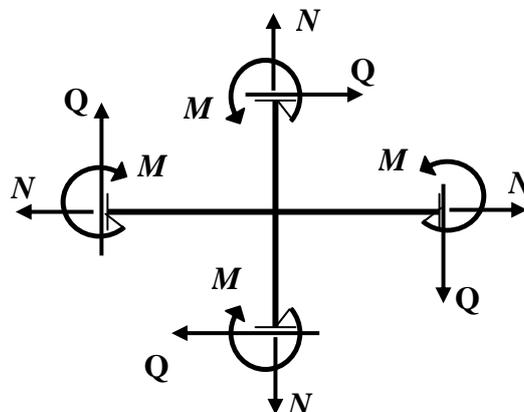
Правила знаков внутренних силовых факторов (продольной силы  $N$ , поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ ) для горизонтальных участков рамы (ригелей) остаются такими же, что и для балок.

Для получения правила знаков внутренних силовых факторов для вертикальных участков рамы (стоек) сведем их к горизонтальным путем условного поворота рамы (стоек) по ходу часовой стрелки.

Таким образом, при определении внутренних силовых факторов в стойках и ригелях рамы будем пользоваться следующими правилами знаков:

- изгибающий момент  $M$  считается положительным, если он вызывает растяжение *нижних* волокон ригелей рамы и *правых* волокон стоек рамы;
- поперечная сила  $Q$  считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемую часть рамы (стойки и ригели) по ходу часовой стрелки;
- продольная сила  $N$  считается положительной, если она вызывает растяжение рассматриваемой части рамы (стоек и ригелей).

Положительные направления внутренних силовых факторов для элементов рамы (узла в виде креста) показаны на рис. 1.10.



**Рис. 1.10. Правила знаков внутренних силовых факторов для рам**

Изгибающий момент, поперечная и продольная силы для рам отрицательны, если направления этих силовых факторов противоположны направлениям, указанным на рис. 1.10.

### 1.5. Эпюры внутренних силовых факторов. Правила их построения

Для исследования напряженного состояния балки необходимо знать, как изменяются внутренние усилия ( $Q$  и  $M$ ) по длине балки.

Чтобы иметь наглядное представление об изменении  $Q$  и  $M$  по длине балки, строят эпюры этих внутренних усилий.

Аналитический расчет плоской рамы также заключается в определении внутренних усилий ( $N$ ,  $Q$  и  $M$ ) от заданных внешних воздействий и в построении соответствующих эпюр на геометрической схеме рамы по осям стоек и ригелей.

Графики, изображающие законы изменения  $N$ ,  $Q$  и  $M$  вдоль геометрической оси балки (рамы), называются соответственно *эпюрой продольных сил*, *эпюрой поперечных сил* и *эпюрой изгибающих моментов*.

Ординаты этих эпюр представляют собой численные значения  $N$ ,  $Q$  и  $M$  в соответствующих сечениях балки (рамы).

При построении эпюр  $N$ ,  $Q$  и  $M$  в статически определимых системах рекомендуется следующий общий порядок действий:

1. Определяем опорные реакции из уравнений равновесия (статики).
2. Разбиваем расчетную схему балки (рамы) на участки.
3. Применяя метод сечений, мысленно проводим поперечное сечение в пределах рассматриваемого участка, которое разбивает балку (раму) на две части.

Выбираем ту часть балки /рамы/, на которую действует наименьшее число известных нагрузок. Для определения внутренних усилий в сечении совершенно безразлично, какую часть балки (рамы) рассматривать. Величины внутренних усилий будут одни и те же.

4. Составляем выражения (уравнения), показывающие закон изменения в пределах рассматриваемого участка продольной силы  $N$ , поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

5. По этим выражениям вычисляем численные значения продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях участка (на его границах). Если функциональная зависимость указанных силовых факторов нелинейная, вычисление производим еще и в промежуточной точке, например,

в середине участка или в сечении, где функция достигает экстремального значения.

6. По полученным численным значениям продольных сил  $N$ , поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  строим эпюры (графики) этих внутренних усилий.

Эпюра каждого внутреннего усилия строится на отдельной линии (базисной прямой), параллельной геометрической оси балки (рамы). Для балок эпюры располагаются непосредственно под ней.

В проектных строительных организациях при построении эпюр для балок положительные значения продольных сил  $N$  и поперечных сил  $Q$  откладываются вверх от базисной прямой, а отрицательные значения – вниз. Положительные значения изгибающих моментов  $M$  откладываются со стороны «растянутых» волокон, то есть вниз от базисной прямой, а отрицательные значения – со стороны «сжатых» волокон, то есть вверх.

Таким образом, *эпюра изгибающих моментов  $M$  строится на «растянутом» волокне.*

На поле эпюры между графиком и базисной прямой ставится знак внутреннего усилия и проводятся ординаты.

7. Делаем проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов.

8. Отмечаем опасные сечения балки, где действуют максимальные (наибольшие) по абсолютной величине значения внутренних силовых факторов.

*Правила построения эпюр внутренних силовых факторов (внутренних усилий) в рамах такие же, как и в балках.*

### 1.6. Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для балок

Дифференциальные зависимости Д.И. Журавского между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью внешней распределенной нагрузки определяют связь между эпюрами  $M$  и  $Q$ , построенными от любой внешней нагрузки. Эта взаимная связь имеет важное практическое значение для контроля правильности выполненного построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо.*

- «Скачки» на эпюре  $Q$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре  $Q$  имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз имеется «скачок» вниз.

- «Скачки» на эпюре  $M$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вверх.

- На участках балки, на которых поперечная сила  $Q$  положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила  $Q$  отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на участках балки, где поперечная сила  $Q$  равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ( $M = const$ ).

- Изгибающий момент  $M$  достигает  $\max$  или  $\min$  ( $M_{экстр}$ ) в тех сечениях балки, где поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).

- На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов  $M$  на этом участке ограничена кривой.
- На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  отсутствует, поперечная сила  $Q$  постоянная ( $Q = const$ ), а эпюра изгибающих моментов  $M$  изменяется по линейному закону.

### 1.7. Контроль (проверки) правильности построения эпюр внутренних силовых факторов для рам

Построенные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в раме проверяются по правилам контроля для прямолинейных балок.

Кроме этого в раме необходимо проверить равновесие всех узлов.

Эта проверка состоит в том, что вырезанный узел под действием приложенных к нему всех внешних сосредоточенных нагрузок (сосредоточенных сил и моментов), а также внутренних силовых факторов (поперечных сил, продольных сил и изгибающих моментов) должен находиться в равновесии.

Для этого вырезают узел и прикладывают к нему внешние сосредоточенные нагрузки (сосредоточенные силы и сосредоточенные моменты, если они приложены к узлу), а также внутренние силовые факторы (поперечные силы  $Q$ , продольные силы  $N$  и изгибающие моменты  $M$ ), которые выражают действие отброшенных частей рамы на узел (с помощью эпюр  $Q$ ,  $N$  и  $M$ ).

Составляют три уравнения равновесия (статики), которые должны быть равны нулю

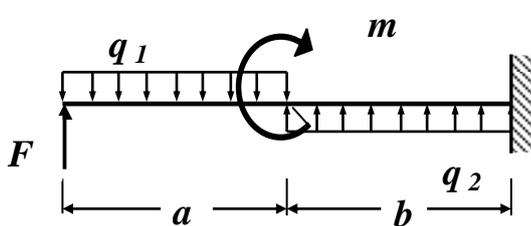
$\Sigma F_x = 0$  – Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю;

$\Sigma F_z = 0$  – Сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  равна нулю;

$\Sigma M_A = 0$  – Сумма моментов всех сил относительно узла равна нулю.

## Тема 2. Примеры построения эпюр внутренних силовых факторов в статически определимых балках и рамах

### 2.1. Задача 1. Построение эпюр внутренних силовых факторов в статически определимой консольной балке



Исходные данные:

$$a = 2 \text{ м}; \quad b = 3 \text{ м};$$

$$F = 4 \text{ кН}; \quad q_1 = 6 \text{ кН/м};$$

$$q_2 = 5 \text{ кН/м}; \quad m = 9 \text{ кНм}.$$

Рис. 1.11. Схема консольной балки

Для заданной схемы консольной балки (рис. 1.11) требуется:

1. Определить опорные реакции.
2. Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .
3. Сделать проверки правильности построенных эпюр.

**Решение**

#### Определение опорных реакций

Заменяем действие жесткой заделки в сечении  $A$  следующими опорными реакциями: вертикальной силой  $R_A$ , горизонтальной силой  $H_A$  и моментом  $M_A$  (рис. 1.12).

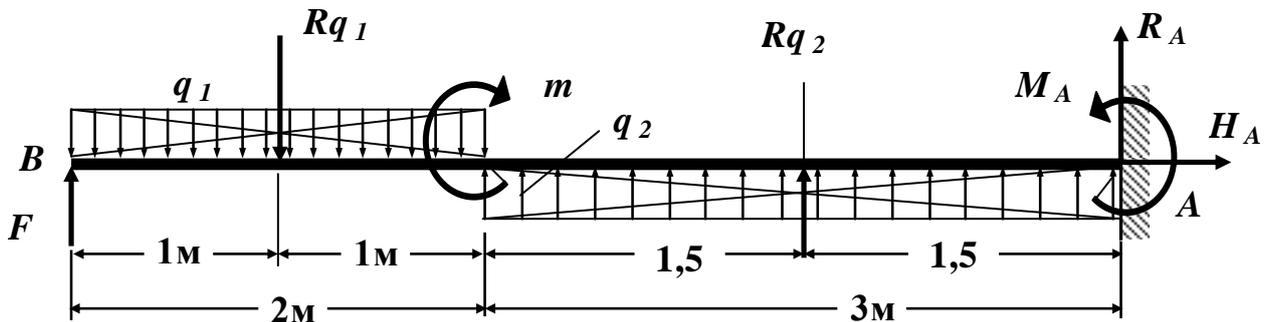


Рис. 1.12. Схема заданной консольной балки

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

Действие распределенных нагрузок  $q_1$  и  $q_2$  заменяем их равнодействующими, приложенными в центре тяжести прямоугольников

$$R_{q_1} = q_1 \cdot 2\text{ м} = 6\text{ кН/м} \cdot 2\text{ м} = \mathbf{12 \text{ кН}}; \quad R_{q_2} = q_2 \cdot 3\text{ м} = 5\text{ кН/м} \cdot 3\text{ м} = \mathbf{15 \text{ кН}}.$$

Составляем три уравнения равновесия (статики) с учетом правила знаков:

1. Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю

$$\Sigma F_x = 0: \rightarrow H_A = 0.$$

2. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $A$  равна нулю

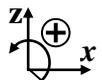
$$\Sigma M_A = 0: -F \cdot 5\text{ м} + R_{q_1} (1\text{ м} + 3\text{ м}) - m - R_{q_2} \cdot 1,5\text{ м} + M_A = 0;$$

$$-4\text{ кН} \cdot 5\text{ м} + 12\text{ кН} \cdot 4\text{ м} - 9\text{ кНм} - 15\text{ кН} \cdot 1,5\text{ м} + M_A = 0;$$

$$-3,5\text{ кНм} + M_A = 0; \rightarrow \mathbf{M_A = 3,5 \text{ кНм}}.$$

3. Сумма моментов всех сил относительно точки  $B$  равна нулю

$$\Sigma M_B = 0: -R_{q_1} \cdot 1\text{ м} - m + R_{q_2} (2\text{ м} + 1,5\text{ м}) + M_A + R_A (2\text{ м} + 3\text{ м}) = 0;$$



$$-12\text{кН} \cdot 1\text{м} - 9\text{кНм} + 15\text{кН} \cdot 3,5\text{м} + 3,5\text{кНм} + R_A \cdot 5\text{м} = 0;$$

$$\frac{35\text{кНм}}{-5\text{м}} =$$

$$35\text{кНм} + R_A \cdot 5\text{м} = 0; \rightarrow R_A = \frac{35\text{кНм}}{-5\text{м}} = -7\text{кН}; \rightarrow R_A = -7\text{кН}.$$

Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна 0)

$$\Sigma F_z = 0: F - R_{q_1} + R_{q_2} + R_A = 4\text{кН} - 12\text{кН} + 15\text{кН} + (-7\text{кН}) = 19\text{кН} - 19\text{кН} = 0 (\pm 5\%).$$

### Построение эпюр поперечных сил $Q$ и изгибающих моментов $M$

Расчетная схема балки имеет два участка ( $BC$  и  $CA$ ), которые пронумеруем слева направо (рис. 1.13).

**I участок  $BC$ :**  $0 \leq x_1 \leq 2$  м (начало отсчета на левом конце балки).

Проводим поперечное сечение в пределах первого рассматриваемого участка  $BC$ , которое разбивает балку на две части. Рассматриваем левую от проведенного сечения часть балки (рис. 1.13), так как справа от сечения сил приложено больше, чем слева.

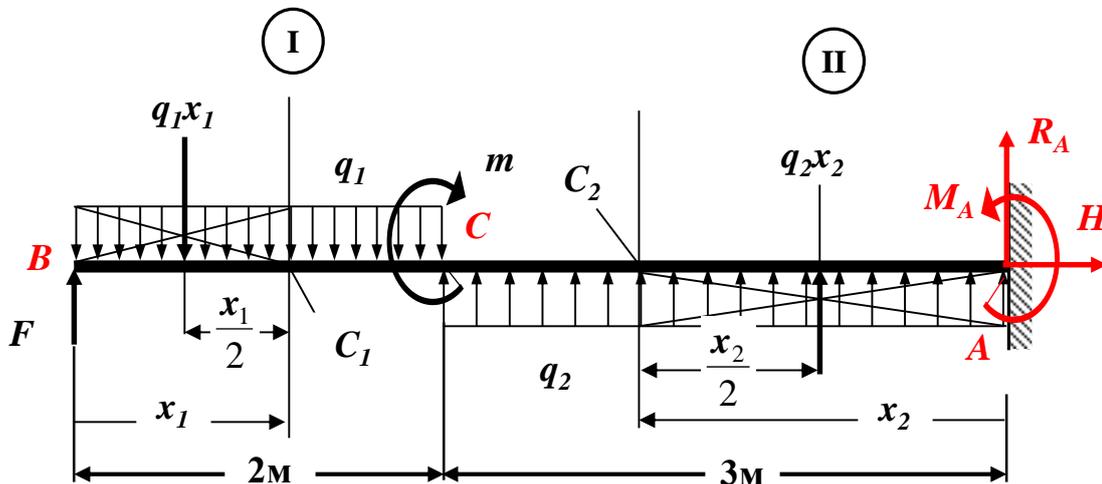


Рис. 1.13. Расчетная схема заданной консольной балки

Составляем выражения для поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на первом участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки, с учетом правила знаков.

Слева от сечения сила  $F$  направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки), поэтому она положительная, а сила  $q_1 \cdot x_1$  – равнодействующая распределенной нагрузки на участке длиной  $x_1$ , направлена вниз (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки против хода часовой стрелки), поэтому она отрицательная

$$Q(x_1) = F - q_1 \cdot x_1 = 4\text{кН} - 6\text{кН/м} \cdot x_1.$$

Поперечная сила  $Q$  на первом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = 4 \text{ кН} - 6 \text{ кН/м} \cdot 0 = +4 \text{ кН (значение на левой границе участка);}$$

$$Q(2 \text{ м}) = 4 \text{ кН} - 6 \text{ кН/м} \cdot 2 \text{ м} = -8 \text{ кН (значение на правой границе участка).}$$

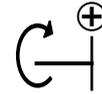
Поскольку поперечная сила  $Q$  меняет знак в пределах  $I$  участка, определяем координату сечения  $x_0$ , в котором она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент  $M$  принимает экстремальное значение)

$$Q(x_0) = 4 \text{ кН} - 6 \text{ кН/м} \cdot x_0 = 0; \quad x_0 = \frac{4 \text{ кН}}{6 \text{ кН/м}} = 0,66666 \text{ м}; \quad \rightarrow \quad x_0 = 0,667 \text{ м.}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на первом участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно точки  $C_1$  (центр тяжести проведенного поперечного сечения, рис. 1.13) с учетом правила знаков.

Момент силы  $F$  (плечо силы –  $x_1$ ) направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он положительный, а момент силы  $q_1 \cdot x_1$  (плечо силы –  $x_1/2$ ) направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение верхних волокон балки), поэтому он отрицательный



$$M(x_1) = F \cdot x_1 - q_1 x_1 \frac{x_1}{2} = 4 \text{ кН} \cdot x_1 - 6 \text{ кН/м} \cdot \frac{x_1^2}{2} = 4 \text{ кН} \cdot x_1 - 3 \text{ кН/м} \cdot x_1^2.$$

Изгибающий момент  $M$  на первом участке является квадратичной функцией координаты  $x_1$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка и в найденной выше точке с координатой  $x_0 = 0,667 \text{ м}$ .

$$M(0) = 4 \text{ кН} \cdot 0 - 3 \text{ кН/м} \cdot 0^2 = 0 \text{ кНм (значение на левой границе участка);}$$

$$M(0,667 \text{ м}) = 4 \text{ кН} \cdot 0,667 \text{ м} - 3 \text{ кН/м} \cdot (0,667 \text{ м})^2 = 1,33 \text{ кНм (значение в сечении } x_0 = 0,667 \text{ м);}$$

$$M(2 \text{ м}) = 4 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м} - 3 \text{ кН/м} \cdot (2 \text{ м})^2 = -4 \text{ кНм (значение на правой границе участка).}$$

**II участок AC:  $0 \leq x_2 \leq 3 \text{ м}$**  (начало отсчета на правой границе участка).

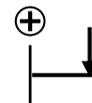
Проводим поперечное сечение в пределах второго рассматриваемого участка  $AC$ , которое разбивает балку на две части. Рассматриваем правую от сечения часть балки (рис. 1.13), так как слева от сечения сил приложено больше, чем справа.

Составляем выражения для поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ .

При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на втором участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки, с учетом правила знаков.



Справа от сечения сила  $R_A$  направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки против хода часовой стрелки), поэтому она отрицательная; сила  $q_2 \cdot x_2$  – равнодействующая распределенной нагрузки на участке длиной  $x_2$ , направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки против хода часовой стрелки), поэтому она также отрицательная

$$Q(x_2) = -R_A - q_2 \cdot x_2 = -(-7 \text{ кН}) - 5 \text{ кН/м} \cdot x_2 = 7 \text{ кН} - 5 \text{ кН/м} \cdot x_2.$$

Поперечная сила  $Q$  на втором участке является линейной функцией координаты  $x_2$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах участка

$Q(0) = 7 \text{ кН} - 5 \text{ кН/м} \cdot 0 = + 7 \text{ кН}$  (значение на правой границе участка);

$Q(3\text{м}) = 7 \text{ кН} - 5 \text{ кН/м} \cdot 3\text{м} = - 8 \text{ кН}$  (значение на левой границе участка).

Поскольку поперечная сила  $Q$  меняет знак в пределах участка, определяем координату сечения  $x_0$ , в котором она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент  $M$  принимает экстремальное значение)

$$Q(x_0) = 7 \text{ кН} - 5 \text{ кН/м} \cdot x_0 = 0; \quad x_0 = \frac{7 \text{ кН}}{5 \text{ кН/м}} = 1,4 \text{ м}; \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_0 = 1,4 \text{ м.}}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на втором участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно точки  $C_2$  (центр тяжести проведенного поперечного сечения, рис. 1.13), с учетом правила знаков.

Сосредоточенный момент  $M_A$  направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки),



поэтому он положительный; момент силы  $R_A$  /плечо силы  $-x_2$ / направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он также положительный; момент силы  $q_2 \cdot x_2$  /плечо силы  $-x_2/2$ / направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он положительный

$$M(x_2) = M_A + R_A \cdot x_2 + q_2 x_2 \frac{x_2}{2} = 3,5 \text{ кНм} + (- 7 \text{ кН}) \cdot x_2 + 5 \text{ кН/м} \cdot \frac{x_2^2}{2};$$

$$M(x_2) = 3,5 \text{ кНм} - 7 \text{ кН} \cdot x_2 + 2,5 \text{ кН/м} \cdot x_2^2.$$

Изгибающий момент  $M$  на втором участке является квадратичной функцией координаты  $x_2$ .

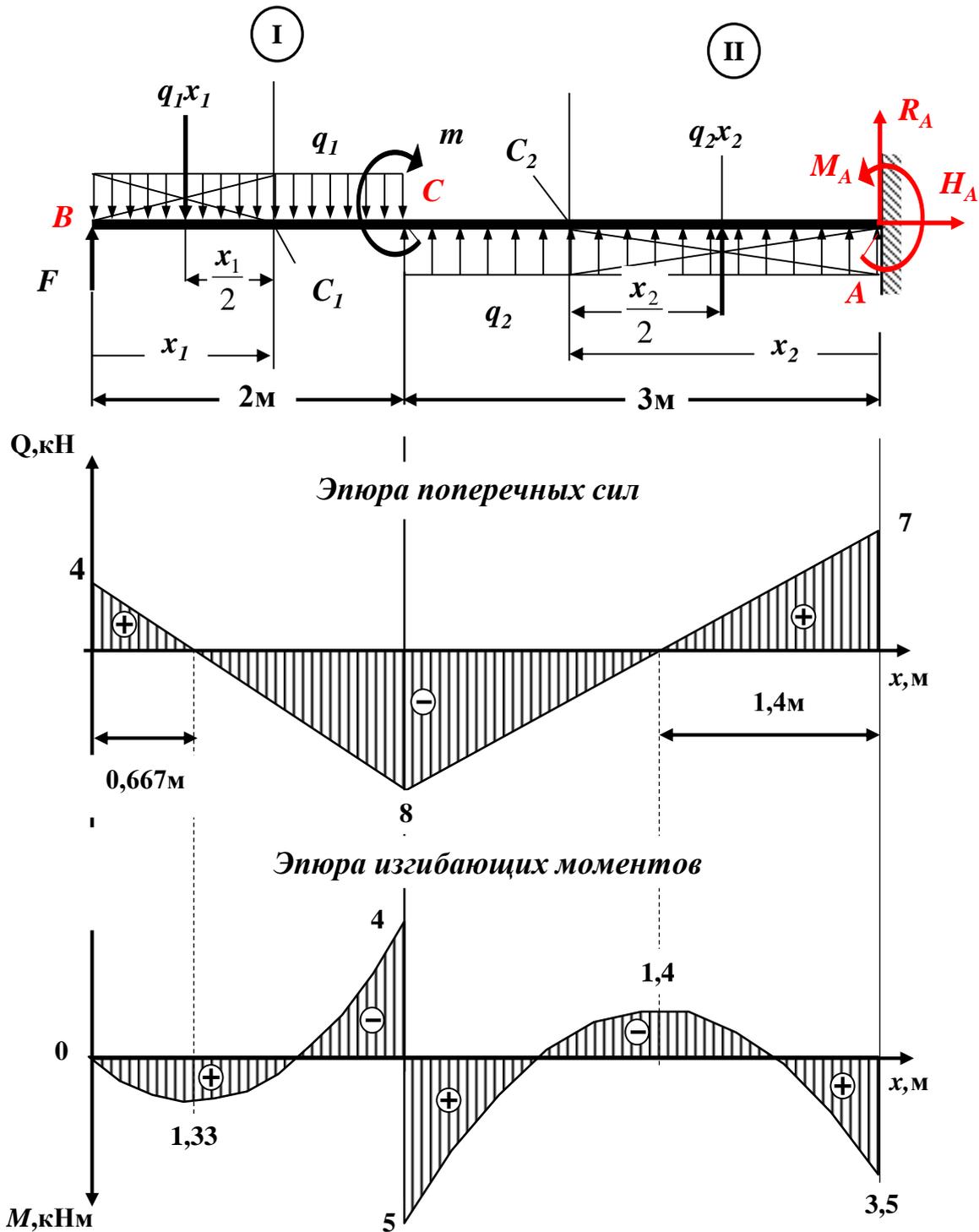
Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка и в найденной выше точке  $x_0 = 1,4 \text{ м}$ .

$M(0) = 3,5 \text{ кНм} - 7 \text{ кН} \cdot 0 + 2,5 \text{ кН/м} \cdot 0^2 = + 3,5 \text{ кНм}$  (значение на правой границе участка);

$M(1,4\text{м}) = 3,5 \text{ кНм} - 7 \text{ кН} \cdot 1,4\text{м} + 2,5 \text{ кН/м} \cdot (1,4\text{м})^2 = - 1,4 \text{ кНм}$  (значение в сечении  $x_0 = 1,4 \text{ м}$ );

$M(3\text{м}) = 3,5 \text{ кНм} - 7 \text{ кН} \cdot 3\text{м} + 2,5 \text{ кН/м} \cdot (3\text{м})^2 = + 5 \text{ кНм}$  (значение на левой границе участка).

По полученным численным значениям  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях балки строим в масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, как показано на рис. 1.14.



**Рис. 1.14. Эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$**

Длину балки, а также эпюры поперечной силы и изгибающего момента необходимо вычертить в масштабе. Приведем один из возможных вариантов масштаба: масштаб длины балки – 1 см: 0,5 м; масштаб оси  $Q$  – 1 см: 4 кН; масштаб оси  $M$  – 1 см : 3 кНм.

В проектных строительных организациях эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне, т.е. положительные значения изгибающих моментов откладываются вниз от базисной прямой.

### Контроль (проверки) правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо*.

- «Скачки» на эпюре  $Q$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре  $Q$  имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз имеется «скачок» вниз.

- «Скачки» на эпюре  $M$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вверх.

- На участках балки, на которых поперечная сила  $Q$  положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила  $Q$  отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на *участках* балки, где поперечная сила  $Q$  равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ( $M = const$ ).

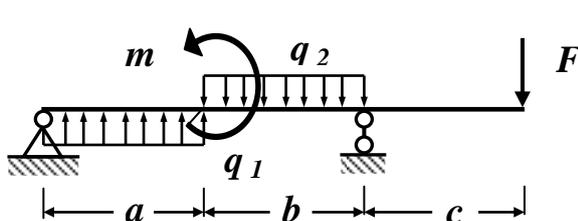
- Изгибающий момент  $M$  достигает  $\max$  или  $\min$  ( $M_{экстр.}$ ) в тех *сечениях* балки, где поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).

- На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов  $M$  на этом участке ограничена кривой.

- На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  отсутствует, поперечная сила  $Q$  постоянная ( $Q = const$ ), а эпюра изгибающих моментов  $M$  изменяется по линейному закону.

*В нашей задаче все эти положения выполняются, следовательно, эпюры внутренних силовых факторов построены правильно.*

### 2.2. Задача 2. Построение эпюр внутренних силовых факторов в статически определимой балке на двух опорах



#### Исходные данные:

$a = 2$  м;  $b = 3$  м;  $c = 1$  м;  
 $F = 7$  кН;  $q_1 = 6$  кН/м;  
 $q_2 = 5$  кН/м;  $m = 12$  кНм.

**Рис. 1.15. Схема балки на двух опорах**

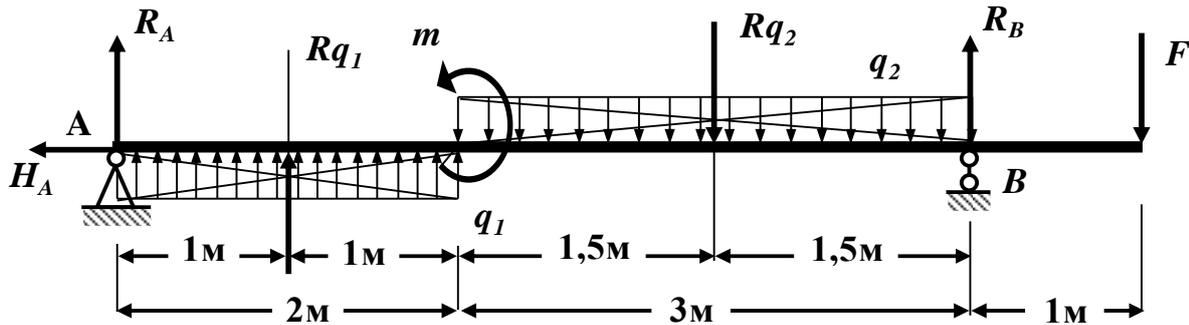
**Для заданной схемы балки на двух опорах (рис. 1.15) требуется:**

1. Определить опорные реакции.
2. Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .
3. Сделать проверки правильности построенных эпюр.

#### Решение

##### Определение опорных реакций

Заменяем действие опор  $A$  и  $B$  опорными реакциями  $H_A$ ,  $R_A$  и  $R_B$  как показано на рис. 1.16.



**Рис. 1.16. Схема заданной балки на двух опорах**

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

Действие распределенных нагрузок  $q_1$  и  $q_2$  заменим их равнодействующими, приложенными в центре тяжести прямоугольников

$$R_{q_1} = q_1 \cdot 2\text{м} = 6\text{кН/м} \cdot 2\text{м} = \mathbf{12\text{кН}}; \quad R_{q_2} = q_2 \cdot 3\text{м} = 5\text{кН/м} \cdot 3\text{м} = \mathbf{15\text{кН}}.$$

Для определения опорных реакций составляем три уравнения равновесия (статики) с учетом правила знаков:

1. Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю

$$\Sigma F_x = 0: \rightarrow H_A = 0.$$

2. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $A$  равна нулю

$$\Sigma M_A = 0: R_{q_1} \cdot 1\text{м} + m - R_{q_2} \cdot (2\text{м} + 1,5\text{м}) + R_B \cdot (2\text{м} + 3\text{м}) - F \cdot 6\text{м} = 0;$$

$$+ 12\text{кН} \cdot 1\text{м} + 12\text{кНм} - 15\text{кН} \cdot 3,5\text{м} + R_B \cdot 5\text{м} - 7\text{кН} \cdot 6\text{м} = 0;$$

$$- 70,5\text{кНм} + R_B \cdot 5\text{м} = 0; \quad R_B = \frac{70,5\text{кНм}}{5\text{м}} = 14,1\text{кН}, \quad \rightarrow \mathbf{R_B = + 14,1\text{кН}}.$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $B$  равна нулю

$$\Sigma M_B = 0: -R_A (2\text{м} + 3\text{м}) - R_{q_1} (1\text{м} + 3\text{м}) + m + R_{q_2} \cdot 1,5\text{м} - F \cdot 1\text{м} = 0;$$

$$- R_A \cdot 5\text{м} - 12\text{кН} \cdot 4\text{м} + 12\text{кНм} + 15\text{кН} \cdot 1,5\text{м} - 7\text{кН} \cdot 1\text{м} = 0;$$

$$- R_A \cdot 5\text{м} - 20,5\text{кНм} = 0; \quad R_A = -\frac{20,5\text{кНм}}{5\text{м}} = -4,1\text{кН}, \quad \rightarrow \mathbf{R_A = - 4,1\text{кН}}.$$

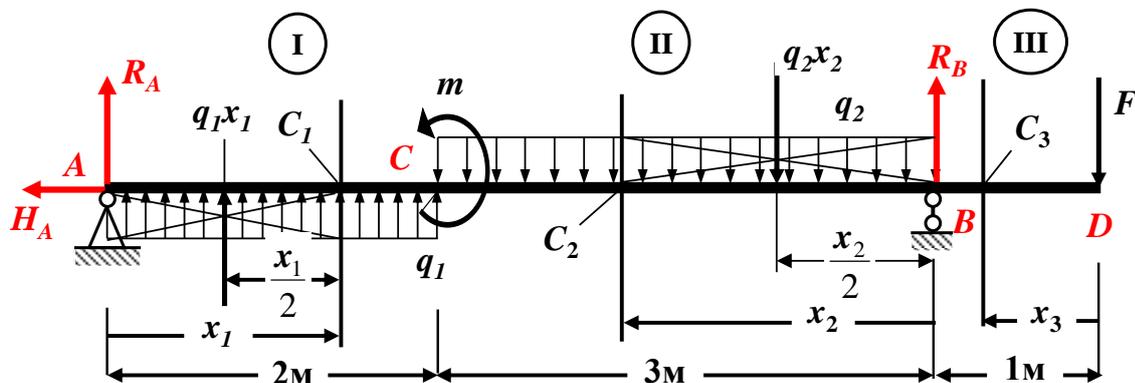


Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна 0)

$$\Sigma F_z = R_A + R_{q_1} - R_{q_2} + R_B - F = (-4,1\text{кН}) + 12\text{кН} - 15\text{кН} + 14,1\text{кН} - 7\text{кН} = 26,1\text{кН} - 26,1\text{кН} = 0 (\pm 5\%).$$

**Построение эпюр поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$**

Расчетная схема балки имеет три участка ( $AC$ ,  $CB$  и  $BD$ ), которые пронумеруем слева направо (рис. 1.17).



**Рис. 1.17. Расчетная схема заданной балки на двух опорах**

**I участок AC:**  $0 \leq x_1 \leq 2$  м (начало отсчета на левом конце балки).

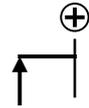
Проводим поперечное сечение в пределах первого рассматриваемого участка **AC**, которое разбивает балку на две части. Рассматриваем левую от проведенного сечения часть балки (рис. 1.17), так как слева от сечения сил приложено меньше, чем справа.

Составляем выражения для поперечной силы **Q** и изгибающего момента **M**. При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы **Q** на первом участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось **z**, перпендикулярную геометрической оси балки, с учетом правила знаков.

Слева от сечения сила **R<sub>A</sub>** направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки),



поэтому она положительная; сила  $q_1 \cdot x_1$  - равнодействующая распределенной нагрузки на участке длиной  $x_1$ , направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки), поэтому она также положительная

$$Q(x_1) = R_A + q_1 \cdot x_1 = -4,1 \text{ кН} + 6 \text{ кН/м} \cdot x_1.$$

Поперечная сила **Q** на первом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = -4,1 \text{ кН} + 6 \text{ кН/м} \cdot 0 = -4,1 \text{ кН (значение на левой границе участка);}$$

$$Q(2 \text{ м}) = -4,1 \text{ кН} + 6 \text{ кН/м} \cdot 2 \text{ м} = +7,9 \text{ кН (значение на правой границе участка).}$$

Поскольку поперечная сила **Q** меняет знак в пределах участка, определяем координату сечения  $x_0$ , в котором она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент **M** принимает экстремальное значение)

$$Q(x_0) = -4,1 \text{ кН} + 6 \text{ кН/м} \cdot x_0 = 0; \quad x_0 = \frac{4,1 \text{ кН}}{6 \text{ кН/м}} = 0,6833 \text{ м}; \quad \rightarrow \quad x_0 = 0,683 \text{ м}.$$

Определяем величину изгибающего момента **M** на первом участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно точки **C<sub>1</sub>** (центр тяжести проведенного поперечного сечения, рис. 1.17), с учетом правила знаков.



Момент силы **R<sub>A</sub>** (плечо силы -  $x_1$ ) направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он положительный; момент силы  $q_1 \cdot x_1$  (плечо силы -  $x_1/2$ ) направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он также положительный

$$M(x_1) = R_A x_1 + q_1 x_1 \frac{x_1}{2} = -4,1 \text{ кН} \cdot x_1 + 6 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot \frac{x_1^2}{2};$$

$$M(x_1) = -4,1 \text{ кН} \cdot x_1 + 3 \text{ кН/м} \cdot x_1^2.$$

Изгибающий момент **M** на первом участке является квадратичной функцией координаты  $x_1$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка и в найденной выше точке  $x_0 = 0,683 \text{ м}$

$$M(0) = -4,1 \text{ кН} \cdot 0 + 3 \text{ кН/м} \cdot 0^2 = 0 \text{ кНм (значение на левой границе участка);}$$

$$M(0,683 \text{ м}) = -4,1 \text{ кН} \cdot 0,683 \text{ м} + 3 \text{ кН/м} \cdot (0,683 \text{ м})^2 = -1,40 \text{ кНм (значение в сечении } x_0 = 0,683 \text{ м);}$$

$$M(2 \text{ м}) = -4,1 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м} + 3 \text{ кН/м} \cdot (2 \text{ м})^2 = +3,8 \text{ кНм (значение на правой границе участка).}$$

**II участок ВС:  $0 \leq x_2 \leq 3\text{ м}$**  (начало отсчета на правой границе участка).

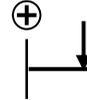
Проводим поперечное сечение в пределах второго рассматриваемого участка **ВС**, которое разбивает балку на две части. Рассматриваем правую от сечения часть балки (рис. 1.17), так как справа от сечения сил приложено меньше, чем слева.

Составляем выражения для поперечной силы **Q** и изгибающего момента **M**.

При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы **Q** на втором участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось **z**, перпендикулярную геометрической оси балки, с учетом правила знаков.



Справа от сечения сила **F** направлена вниз (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки), поэтому она положительная; сила **R<sub>B</sub>** направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки против хода часовой стрелки), поэтому она отрицательная; сила **q<sub>2</sub>·x<sub>2</sub>** – равнодействующая распределенной нагрузки на участке длиной **x<sub>2</sub>**, направлена вниз (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки), поэтому она положительная

$$Q(x_2) = F - R_B + q_2 \cdot x_2 = 7\text{ кН} - 14,1\text{ кН} + 5\text{ кН/м} \cdot x_2 = -7,1\text{ кН} + 5\text{ кН/м} \cdot x_2.$$

Поперечная сила **Q** на втором участке является линейной функцией координаты **x<sub>2</sub>**. Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = -7,1\text{ кН} + 5\text{ кН/м} \cdot 0 = -7,1\text{ кН} \text{ (значение на правой границе участка);}$$

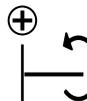
$$Q(3\text{ м}) = -7,1\text{ кН} + 5\text{ кН/м} \cdot 3\text{ м} = +7,9\text{ кН} \text{ (значение на левой границе участка).}$$

Поскольку поперечная сила **Q** меняет знак в пределах участка, определяем координату сечения **x<sub>0</sub>**, в котором она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент **M** принимает экстремальное значение)

$$Q(x_0) = -7,1\text{ кН} + 5\text{ кН/м} \cdot x_0 = 0; \quad x_0 = \frac{7,1\text{ кН}}{5\text{ кН/м}} = 1,42\text{ м}; \quad \rightarrow \quad x_0 = 1,42\text{ м}.$$

Определяем величину изгибающего момента **M** на втором участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно точки **C<sub>2</sub>** (центр тяжести проведенного поперечного сечения, рис. 1.17), с учетом правила знаков.



Момент силы **F** /плечо силы – (x<sub>2</sub>+1)/ направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение верхних волокон балки), поэтому он отрицательный; момент силы **R<sub>B</sub>** /плечо силы – x<sub>2</sub>/ направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он положительный; момент силы **q<sub>2</sub>·x<sub>2</sub>** /плечо силы – x<sub>2</sub>/2/ направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение верхних волокон балки), поэтому он отрицательный

$$M(x_2) = -F \cdot (x_2 + 1\text{ м}) + R_B \cdot x_2 - q_2 x_2 \frac{x_2}{2} = -7\text{ кН} \cdot (x_2 + 1\text{ м}) + 14,1\text{ кН} \cdot x_2 - 5\text{ кН/м} \cdot \frac{x_2^2}{2};$$

$$M(x_2) = -7\text{ кНм} + 7,1\text{ кН} \cdot x_2 - 2,5\text{ кН/м} \cdot x_2^2.$$

Изгибающий момент  $M$  на втором участке является квадратичной функцией координаты  $x_2$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка и в найденной выше точке  $x_0 = 1,42 \text{ м}$

$$M(0) = -7 \text{ кНм} + 7,1 \text{ кН} \cdot 0 - 2,5 \text{ кН/м} \cdot 0^2 = -7 \text{ кНм (значение на правой границе);}$$

$$M(1,42 \text{ м}) = -7 \text{ кНм} + 7,1 \text{ кН} \cdot 1,42 \text{ м} - 2,5 \text{ кН/м} \cdot (1,42 \text{ м})^2 = -1,959 \text{ кНм} = -1,96 \text{ кНм (значение в сечении } x_0 = 1,42 \text{ м);}$$

$M(3 \text{ м}) = -7 \text{ кНм} + 7,1 \text{ кН} \cdot 3 \text{ м} - 2,5 \text{ кН/м} \cdot (3 \text{ м})^2 = -8,2 \text{ кНм}$  (значение на левой границе участка).

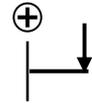
**III участок  $DB$   $0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м}$**  (начало отсчета на правой границе участка);

Проводим поперечное сечение в пределах третьего рассматриваемого участка  $DB$ , которое разбивает балку на две части. Рассматриваем правую от сечения часть балки (рис. 1.17), так как справа от сечения сил приложено меньше, чем слева.

Составляем выражения для поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на третьем участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки (рис. 1.17), с учетом правила знаков.



Справа от сечения сила  $F$  направлена вниз (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки), поэтому она положительная

$$Q(x_3) = F = +7 \text{ кН.}$$

Поперечная сила  $Q$  на третьем участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = F = +7 \text{ кН (значение на правой границе участка);}$$

$$Q(1 \text{ м}) = F = +7 \text{ кН (значение на левой границе участка).}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на третьем участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно точки  $C_3$  (центр тяжести проведенного поперечного сечения, рис. 1.17), с учетом правила знаков.



Момент силы  $F$  / плечо силы  $-x_2$  / направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение верхних волокон балки), поэтому он отрицательный

$$M(x_3) = -F \cdot x_3 = -7 \text{ кНм} \cdot x_3$$

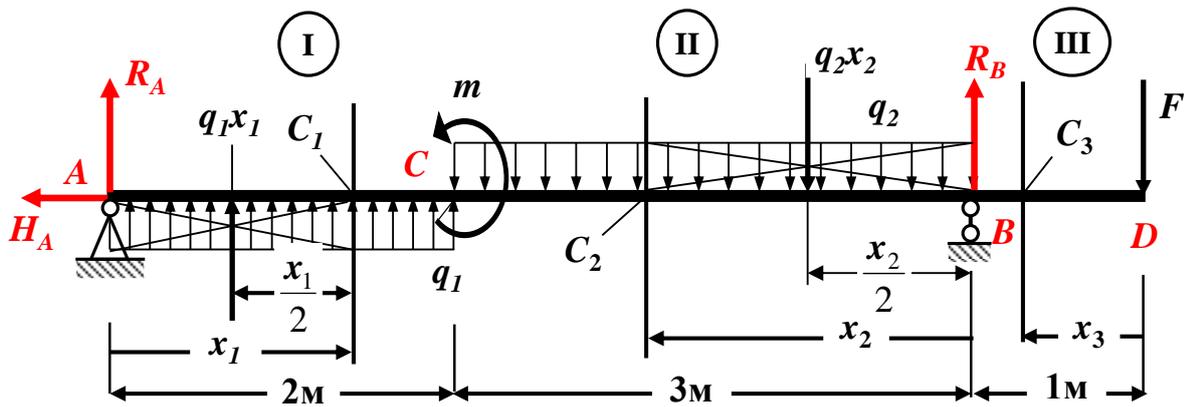
Изгибающий момент  $M$  на третьем участке является линейной функцией координаты  $x_3$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$$M(0) = -7 \text{ кНм} \cdot 0 = 0 \text{ кНм (значение на правой границе участка);}$$

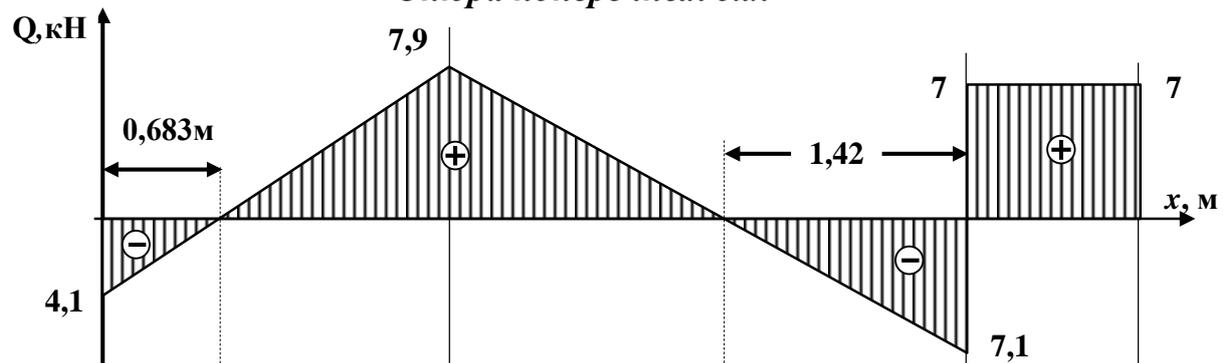
$$M(1 \text{ м}) = -7 \text{ кН} \cdot 1 \text{ м} = -7 \text{ кНм (значение на левой границе участка).}$$

По полученным численным значениям  $Q$  и  $M$  в характерных сечениях балки строим в масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, как показано на рис. 1.18.

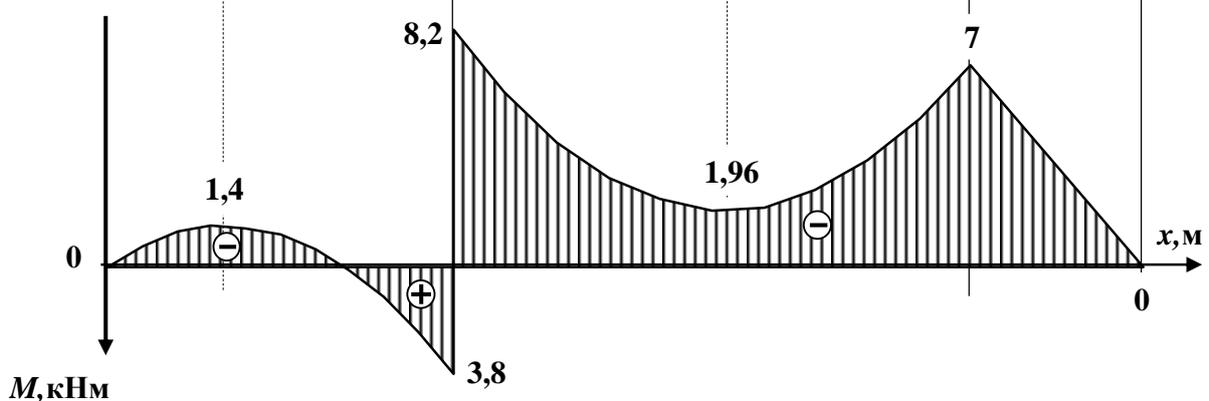
Длину балки, а также эпюры поперечной силы и изгибающего момента необходимо вычертить в масштабе. Приведем один из возможных вариантов масштаба: масштаб длины балки  $- 1 \text{ см}: 0,5 \text{ м}$ ; масштаб оси  $Q - 1 \text{ см}: 4 \text{ кН}$ ; масштаб оси  $M - 1 \text{ см}: 3 \text{ кНм}$ .



Эпюры поперечных сил



Эпюра изгибающих моментов


 Рис. 1.18. Эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ 

В проектных строительных организациях эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне, т.е. положительные значения изгибающих моментов откладываются вниз от базисной прямой.

### Контроль (проверки) правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок делаются слева направо.

- «Скачки» на эпюре  $Q$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре  $Q$  имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз имеется «скачок» вниз.
- «Скачки» на эпюре  $M$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на

эпюре  $M$  имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вверх.

- На участках балки, на которых поперечная сила  $Q$  положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила  $Q$  отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на *участках* балки, где поперечная сила  $Q$  равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ( $M = \text{const}$ ).

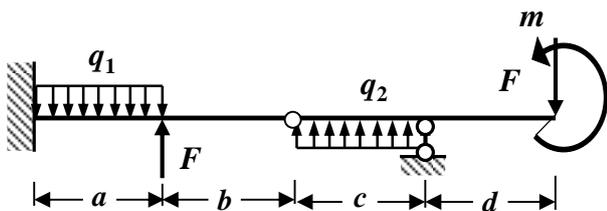
- Изгибающий момент  $M$  достигает max или min ( $M_{\text{экстр.}}$ ) в тех *сечениях* балки, где поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).

- На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов  $M$  на этом участке ограничена кривой.

- На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  отсутствует, поперечная сила  $Q$  постоянная ( $Q = \text{const}$ ), а эпюра изгибающих моментов  $M$  изменяется по линейному закону.

В нашей задаче все эти положения выполняются, следовательно, эпюры внутренних силовых факторов построены правильно.

### 2.3. Задача 3. Построение эпюр внутренних силовых факторов в статически определимой балке с промежуточным шарниром



**Исходные данные:**

$a = 2 \text{ м}; b = 1 \text{ м}; c = 2 \text{ м}; d = 1 \text{ м};$

$F = 5 \text{ кН}; q_1 = 10 \text{ кН/м};$

$q_2 = 10 \text{ кН/м}; m = 20 \text{ кНм}.$

**Рис. 1.19. Схема балки с промежуточным шарниром**

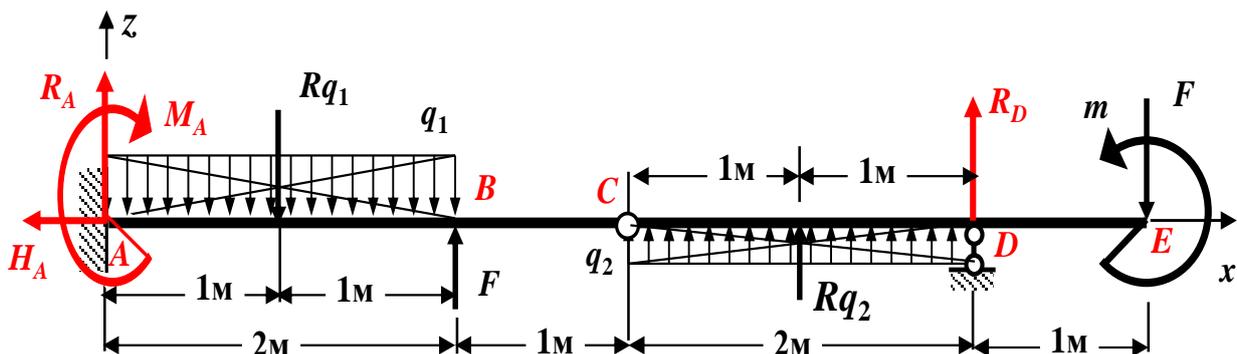
**Для заданной схемы балки с промежуточным шарниром (рис. 1.19) требуется:**

1. Определить опорные реакции.
2. Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .
3. Сделать проверки правильности построенных эпюр.

**Решение**

**Определение опорных реакций**

Заменяем действие опор  $A$  и  $D$  опорными реакциями  $H_A, R_A, M_A$  и  $R_D$  как показано на рис. 1.20



**Рис. 1.20. Схема балки с промежуточным шарниром**

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

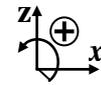
Действие распределенных нагрузок  $q_1$  и  $q_2$  заменим их равнодействующими, приложенными в центре тяжести прямоугольников (рис. 1.20):

$$R_{q_1} = q_1 \cdot 2m = 10 \text{ кН/м} \cdot 2m = \mathbf{20 \text{ кН}}; \quad R_{q_2} = q_2 \cdot 2m = 10 \text{ кН/м} \cdot 2m = \mathbf{20 \text{ кН}}.$$

Для определения опорных реакций применим метод моментной точки (способ, учитывающий свойство промежуточного шарнира).

В этом случае необходимо записать три уравнения равновесия для всей балки и к ним добавить уравнение, отражающее свойство промежуточного шарнира, то есть, сумма моментов всех сил, лежащих по одну сторону от промежуточного шарнира, относительно шарнира  $C$  равна нулю (рис. 1.20).

Составляем три уравнения равновесия (статики) для всей балки с учетом правила знаков:



1. Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю

$$\Sigma F_x = 0: \rightarrow H_A = 0. \quad (1)$$

2. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $A$  равна нулю

$$\Sigma M_A = 0: -M_A - R_{q_1} \cdot 1m + F \cdot 2m + R_{q_2} \cdot (2m + 1m + 1m) + R_D \cdot (2m + 1m + 2m) - F \cdot (2m + 1m + 2m + 1m) + m = 0 \quad (2)$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $D$  равна нулю

$$\Sigma M_D = 0: -M_A - R_A \cdot (2m + 1m + 2m) + R_{q_1} \cdot (2m + 1m + 1m) - F \cdot (2m + 1m) - R_{q_2} \cdot 1m - F \cdot 1m + m = 0 \quad (3)$$

4. Сумма моментов всех сил, лежащих по правую сторону от промежуточного шарнира, относительно шарнира  $C$  равна нулю

$$\Sigma M_C^{\text{правых сил}} = 0 - F \cdot (2m + 1m) + m + R_D \cdot 2m + R_{q_2} \cdot 1m = 0 \quad (4)$$

Решая систему уравнений **2, 3** и **4**, определим численные значения опорных реакций  $M_A$ ,  $R_A$  и  $R_D$ .

Из уравнения (4)

$$R_D = \frac{F \cdot 3m - m - R_{q_2} \cdot 1m}{2} = \frac{15 - 20 - 20}{2} = -12,5 \text{ кН}; \rightarrow \mathbf{R_D = -12,5 \text{ кН}}.$$

Из уравнения (2)

$$M_A = -R_{q_1} \cdot 1m + F \cdot 2m + R_{q_2} \cdot 4 + R_D \cdot 5 - F \cdot 6 + m = -20 + 10 + 80 + +(-12,5) \cdot 5 - 30 + 20 = -2,5 \text{ кНм}; \rightarrow \mathbf{M_A = -2,5 \text{ кНм}}.$$

Из уравнения (3)

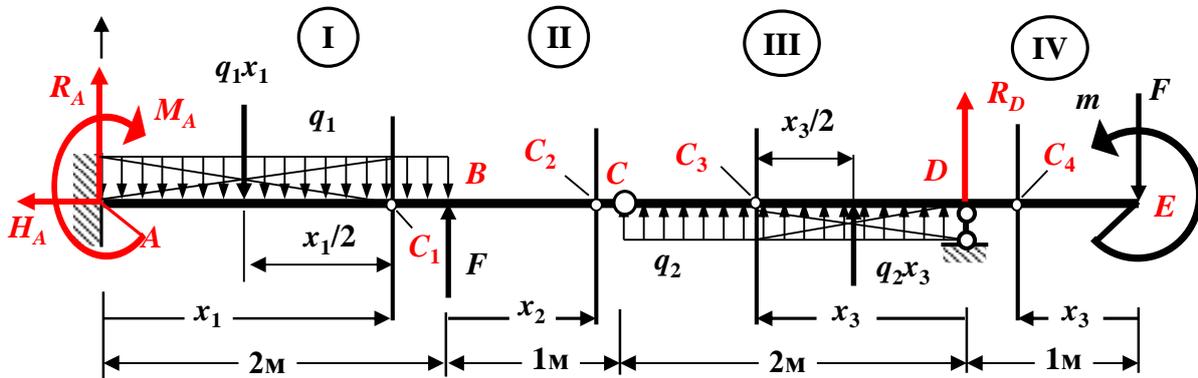
$$R_A = \frac{-M_A + R_{q_1} \cdot 4 - F \cdot 3 - R_{q_2} \cdot 1 - F \cdot 1 + m}{5} = \frac{-(-2,5) + 80 - 15 - 20 - 5 + 20}{5} = +12,5 \text{ кН}; \rightarrow \mathbf{R_A = +12,5 \text{ кН}}.$$

Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна  $0$ )

$$\Sigma F_z = R_A - R_{q_1} + F + R_{q_2} + R_D - F = (+12,5 \text{ кН}) - 20 \text{ кН} + 5 \text{ кН} + 20 \text{ кН} + (-12,5 \text{ кН}) - 5 \text{ кН} = 0 (\pm 5 \%).$$

**Построение эпюр поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$** 

Расчетная схема балки имеет четыре участка (**AB**, **BC**, **CD** и **DE**), которые пронумеруем слева направо (рис. 1.21).



**Рис. 1.21. Расчетная схема балки**

**I участок AB:**  $0 \leq x_1 \leq 2$  м (начало отсчета на левом конце балки).

Проводим поперечное сечение в пределах первого рассматриваемого участка **AB**, которое разбивает балку на две части. Рассматриваем левую от проведенного сечения часть балки (рис. 1.21), так как слева от сечения сил приложено меньше, чем справа.

Составляем выражения для поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ .

При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на первом участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки (рис. 1.21), с учетом правила знаков.

Слева от сечения сила  $R_A$  направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки), поэтому она положительная; сила  $q_1 \cdot x_1$  - равнодействующая распределенной нагрузки на участке длиной  $x_1$ , направлена вниз (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки против хода часовой стрелки), поэтому она отрицательная

$$Q(x_1) = R_A - q_1 \cdot x_1 = 12,5 \text{ кН} - 10 \text{ кН/м} \cdot x_1.$$

Поперечная сила  $Q$  на первом участке является линейной функцией координаты  $x_1$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = +12,5 \text{ кН} - 10 \text{ кН/м} \cdot 0 = +12,5 \text{ кН (значение на левой границе участка);}$$

$$Q(2\text{ м}) = 12,5 \text{ кН} - 10 \text{ кН/м} \cdot 2\text{ м} = -7,5 \text{ кН (значение на правой границе участка).}$$

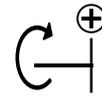
Поскольку поперечная сила  $Q$  меняет знак в пределах участка, определяем координату сечения  $x_0$ , в котором она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент  $M$  принимает экстремальное значение)

$$Q(x_0) = 12,5 \text{ кН} - 10 \text{ кН/м} \cdot x_0 = 0; \quad x_0 = \frac{12,5}{10} = 1,25 \text{ м}; \quad \rightarrow \quad x_0 = 1,25 \text{ м.}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на первом участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно точки  $C_1$  (центр тяжести проведенного поперечного сечения, рис. 1.21), с учетом правила знаков.

Сосредоточенный момент  $M_A$  направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он положительный; момент силы  $R_A$  (плечо силы –  $x_1$ ) направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он также положительный; момент силы  $q_1 \cdot x_1$  (плечо силы –  $x_1/2$ ) направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение верхних волокон балки), поэтому он отрицательный



$$M(x_1) = +M_A + R_A \cdot x_1 - q_1 x_1 \frac{x_1}{2} = -2,5 \text{ кНм} + 12,5 \text{ кН} \cdot x_1 - 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot \frac{x_1^2}{2};$$

$$M(x_1) = -2,5 \text{ кНм} + 12,5 \text{ кН} \cdot x_1 - 5 \text{ кН/м} \cdot x_1^2.$$

Изгибающий момент  $M$  на первом участке является квадратичной функцией координаты  $x_1$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка и в найденной выше точке  $x_0 = 1,25 \text{ м}$

$M(0) = -2,5 \text{ кНм} + 12,5 \text{ кН} \cdot 0 - 5 \text{ кН/м} \cdot 0^2 = -2,5 \text{ кНм}$  (значение на левой границе участка);

$M_{\text{экстр}} = M(1,25 \text{ м}) = -2,5 \text{ кНм} + 12,5 \text{ кН} \cdot 1,25 \text{ м} - 5 \text{ кН/м} \cdot (1,25 \text{ м})^2 = +5,31 \text{ кНм}$  (значение в сечении  $x_0 = 1,25 \text{ м}$ );

$M(2 \text{ м}) = -2,5 \text{ кНм} + 12,5 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м} - 5 \text{ кН/м} \cdot (2 \text{ м})^2 = +2,5 \text{ кНм}$  (значение на правой границе участка).

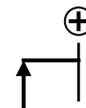
**II участок ВС:  $0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м}$**  (начало отсчета на левой границе участка).

Проводим поперечное сечение в пределах второго рассматриваемого участка **BC**, которое разбивает балку на две части. Рассматриваем левую от сечения часть балки (рис. 1.21).

Составляем выражения для поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на втором участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки (рис. 1.21), с учетом правила знаков.



Слева от сечения сила  $R_A$  направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки), поэтому она положительная; сила  $q_1 \cdot 2$  – равнодействующая распределенной нагрузки на участке длиной 2 м, направлена вниз (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки против хода часовой стрелки), поэтому она отрицательная; сила  $F$  направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки), поэтому она положительная

$$Q(x_2) = R_A - q_1 \cdot 2 + F = +12,5 \text{ кН} - 20 \text{ кН} + 5 \text{ кН} = -2,5 \text{ кН}.$$

Поперечная сила  $Q$  на втором участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика

определяем значение поперечной силы на границах этого участка

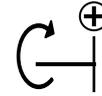
$Q(0) = -2,5 \text{ кН}$  (значение на левой границе участка);

$Q(1 \text{ м}) = -2,5 \text{ кН}$  (значение на правой границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на втором участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно точки  $C_2$  (центр тяжести проведенного поперечного сечения, рис. 1.21), с учетом правила знаков.

Сосредоточенный момент  $M_A$  направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он положительный; момент силы  $R_A$  /плечо силы –  $(x_2 + 2)$ / направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому



он также положительный; момент силы  $q_1 \cdot 2$  /плечо силы –  $(x_2 + 1)$ / направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение верхних волокон балки), поэтому он отрицательный; момент силы  $F$  /плечо силы –  $x_2$ / направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он положительный

$$M(x_2) = + M_A + R_A \cdot (x_2 + 2) - q_1 \cdot 2 \cdot (x_2 + 1) + F \cdot x_2 = - 2,5 \text{ кНм} +$$

$$= 12,5 \text{ кН} \cdot (x_2 + 2\text{м}) - 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot 2\text{м} \cdot (x_2 + 1\text{м}) + 5 \text{ кН} \cdot x_2;$$

$$M(x_2) = - 2,5 \text{ кНм} + 12,5 \text{ кН} \cdot (x_2 + 2\text{м}) - 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot 2\text{м} \cdot (x_2 + 1\text{м}) + 5 \text{ кН} \cdot x_2.$$

Изгибающий момент  $M$  на втором участке является линейной функцией координаты  $x_2$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка.

$$M(0) = - 2,5 \text{ кНм} + 12,5 \text{ кН} \cdot (0 + 2\text{м}) - 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot 2\text{м} \cdot (0 + 1\text{м}) + 5 \text{ кН} \cdot 0 =$$

$$+ 2,5 \text{ кНм (значение на левой границе);}$$

$$M(1\text{м}) = - 2,5 \text{ кНм} + 12,5 \text{ кН} \cdot (1\text{м} + 2\text{м}) - 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot 2\text{м} \cdot (1\text{м} + 1\text{м}) + 5 \text{ кН} \cdot 1\text{м} = 0$$

кНм (значение на правой границе участка).

**III участок DC:  $0 \leq x_3 \leq 2\text{м}$**  (начало отсчета на правой границе участка).

Проводим поперечное сечение в пределах третьего рассматриваемого участка **DC**, которое разбивает балку на две части. Рассматриваем правую от сечения часть балки (рис. 1.21), так как справа от сечения сил приложено меньше, чем слева.

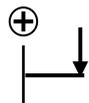
Составляем выражения для поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ .

При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на третьем участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки (рис.1.21), с учетом правила знаков.

Справа от сечения сила  $F$  направлена вниз (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки), поэтому она положительная; сила  $R_D$  направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки против хода часовой стрелки), поэтому она отрицательная; сила  $q_2 \cdot x_3$  – равнодействующая распределенной нагрузки на участке длиной  $x_3$ , направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки против хода часовой стрелки), поэтому она также отрицательная



$$Q(x_3) = F - R_D - q_2 \cdot x_3 = 5 \text{ кН} - (- 12,5 \text{ кН}) - 10 \text{ кН/м} \cdot x_3 =$$

$$= + 17,5 \text{ кН} - 10 \text{ кН/м} \cdot x_3.$$

Поперечная сила  $Q$  на втором участке является линейной функцией координаты  $x_3$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = +17,5 \text{ кН} - 10 \text{ кН/м} \cdot 0 = +17,5 \text{ кН (значение на правой границе участка);}$$

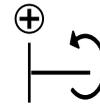
$$Q(2 \text{ м}) = +17,5 \text{ кН} - 10 \text{ кН/м} \cdot 2 \text{ м} = -2,5 \text{ кН (значение на левой границе участка).}$$

Поскольку поперечная сила  $Q$  меняет знак в пределах участка, определяем координату сечения  $x_0$ , в котором она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент  $M$  принимает экстремальное значение)

$$Q(x_0) = +17,5 \text{ кН} - 10 \text{ кН/м} \cdot x_0 = 0; \quad x_0 = \frac{17,5}{10} = 1,75 \text{ м}; \quad \rightarrow \quad x_0 = 1,75 \text{ м.}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на третьем участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно точки  $C_3$  (центр тяжести проведенного поперечного сечения, рис. 1.21), с учетом правила знаков.



Сосредоточенный момент  $m$  направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он положительный; момент силы  $F$  /плечо силы  $-(x_3+1)$  направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение верхних волокон балки), поэтому он отрицательный; момент силы  $R_D$  /плечо силы  $-x_3$  направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он положительный; момент силы  $q_2 \cdot x_3$  /плечо силы  $-x_3/2$  направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение верхних волокон балки), поэтому он отрицательный

$$M(x_3) = +m - F \cdot (x_3 + 1) + R_D \cdot x_3 + q_2 \cdot x_3 \cdot \frac{x_3}{2} = +20 - 5 \text{ кН} \cdot (x_3 + 1) +$$

$$+ (-12,5) \text{ кН} \cdot x_3 + 10 \text{ кН/м} \cdot \frac{x_3^2}{2};$$

$$M(x_3) = +20 \text{ кНм} - 5 \text{ кН} \cdot (x_3 + 1) + (-12,5) \text{ кН} \cdot x_3 + 5 \text{ кН/м} \cdot x_3^2.$$

Изгибающий момент  $M$  на третьем участке является квадратичной функцией координаты  $x_3$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка и в найденной выше точке  $x_0 = 1,75 \text{ м}$

$M(0) = +20 \text{ кНм} - 5 \text{ кН} \cdot (0 + 1) + (-12,5) \text{ кН} \cdot 0 + 5 \text{ кН/м} \cdot 0^2 = +15 \text{ кНм}$  (значение на правой границе);

$$M_{\text{экстр}} = M(1,75 \text{ м}) = +20 \text{ кНм} - 5 \text{ кН} \cdot (1,75 \text{ м} + 1) + (-12,5) \text{ кН} \cdot 1,75 \text{ м} +$$

$$+ 5 \text{ кН/м} \cdot (1,75 \text{ м})^2 = -0,31 \text{ кНм (значение в сечении } x_0 = 1,75 \text{ м);}$$

$$M(2 \text{ м}) = +20 \text{ кНм} - 5 \text{ кН} \cdot (2 \text{ м} + 1) + (-12,5) \text{ кН} \cdot 2 \text{ м} + 5 \text{ кН/м} \cdot (2 \text{ м})^2 =$$

$$= 0 \text{ кНм (значение на левой границе участка).}$$

**IV участок ED:  $0 \leq x_4 \leq 1 \text{ м}$**  (начало отсчета на правой границе участка).

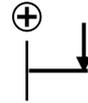
Проводим поперечное сечение в пределах четвертого рассматриваемого участка **ED**, которое разбивает балку на две части. Рассматриваем правую от сечения часть балки (рис. 1.21), так как справа от сечения сил приложено меньше, чем слева.

Составляем выражения для поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на четвертом участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки (рис. 1.21), с учетом правила знаков.

Справа от сечения сила  $F$  направлена вниз (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки), поэтому она положительная



$$Q(x_4) = +F = +5 \text{ кН.}$$

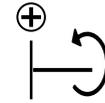
Поперечная сила  $Q$  на втором участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = +5 \text{ кН (значение на правой границе участка);}$$

$$Q(1\text{ м}) = +5 \text{ кН (значение на левой границе участка).}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на четвертом участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно точки  $C_4$  (центр тяжести проведенного поперечного сечения, рис. 1.21), с учетом правила знаков.



Сосредоточенный момент  $m$  направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он положительный. Момент силы  $F$  /плечо силы  $-x_4$ / направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение верхних волокон балки), поэтому он отрицательный

$$M(x_4) = +m - F \cdot x_4 = +20 \text{ кНм} - 5 \text{ кН} \cdot x_4.$$

Изгибающий момент  $M$  на четвертом участке является линейной функцией координаты  $x_4$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка

$$M(0) = +m - F \cdot 0 = +20 \text{ кНм} - 5 \text{ кН} \cdot 0 = +20 \text{ кНм (значение на правой границе);}$$

$$M(1\text{ м}) = +m - F \cdot 1\text{ м} = +20 \text{ кНм} - 5 \text{ кН} \cdot 1\text{ м} = +15 \text{ кНм (значение на левой границе участка).}$$

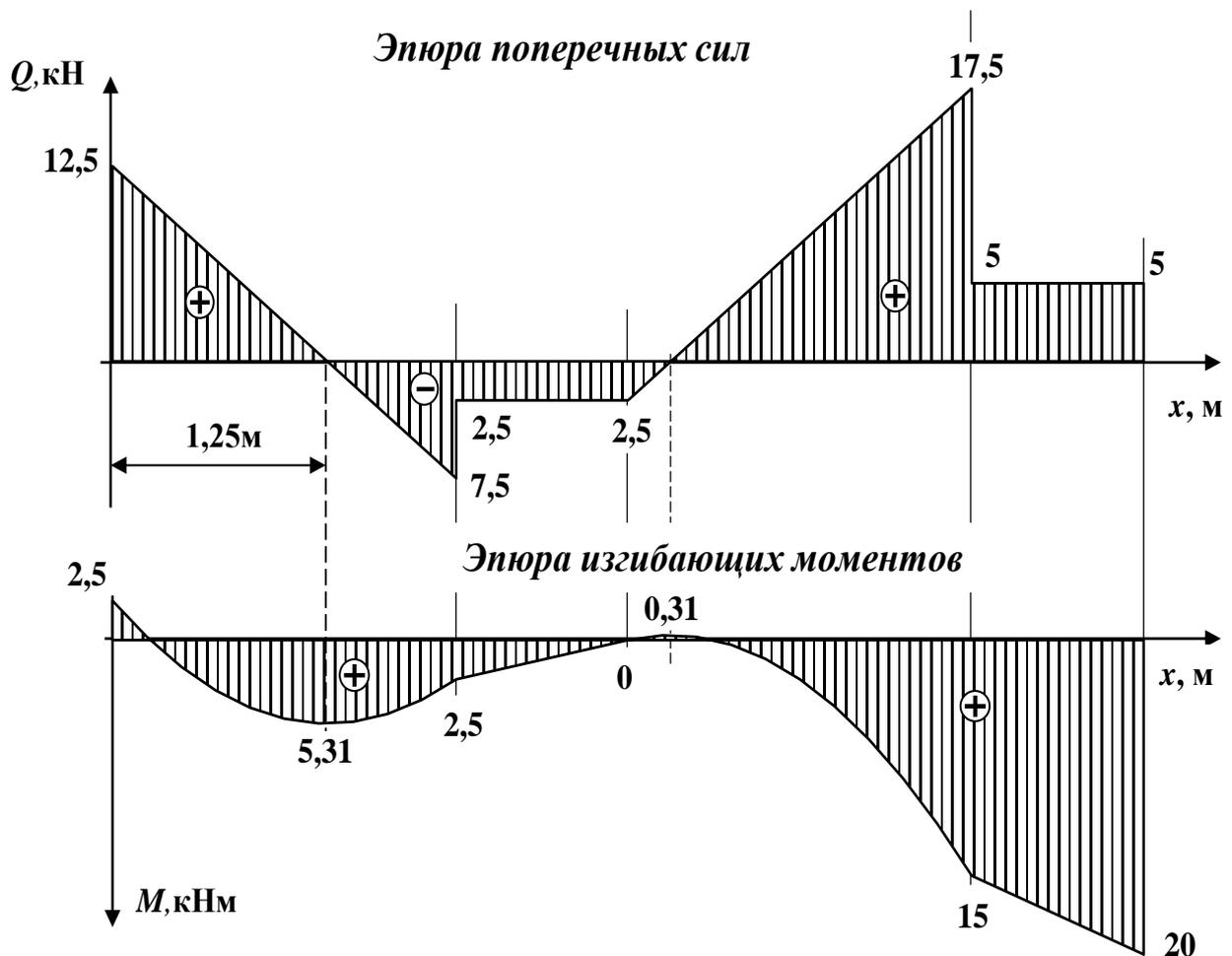
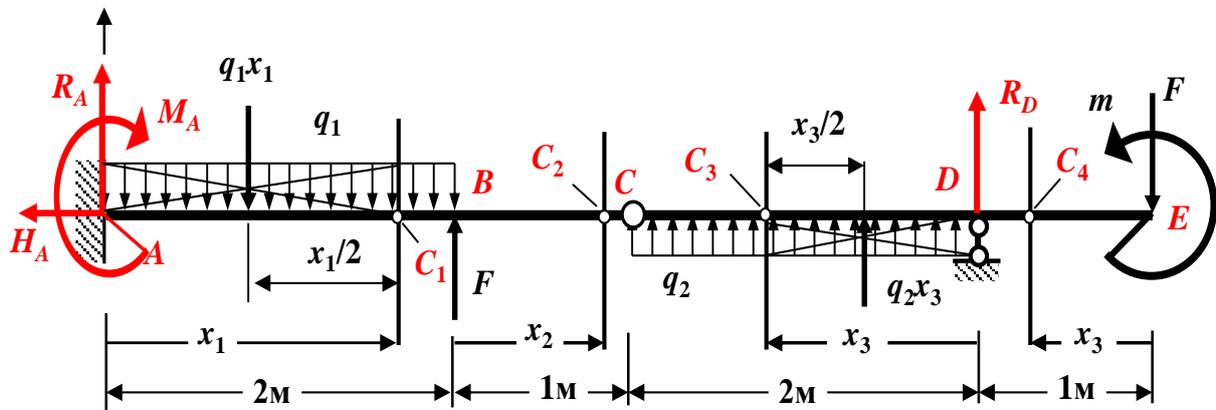
По полученным численным значениям  $M$  и  $Q$  в характерных сечениях балки строим в масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, как показано на рис. 1.22.

Длину балки, а также эпюры поперечной силы и изгибающего момента необходимо вычертить в масштабе. Приведем один из возможных вариантов масштаба: масштаб длины балки – 1 см: 0,5 м; масштаб оси  $Q$  – 1 см: 4 кН; масштаб оси  $M$  – 1 см: 3 кНм.

В проектных строительных организациях эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне, т.е. положительные значения изгибающих моментов откладываются вниз от базисной прямой.

### Контроль (проверки) правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов

Все проверки правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок *делаются слева направо*.



**Рис. 1.22. Эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$**

«Скачки» на эпюре  $Q$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние силы, перпендикулярные к геометрической оси. По величине этот «скачок» равен этой силе. Если эта внешняя сила направлена вверх, то на эпюре  $Q$  имеется «скачок» вверх, а когда сила направлена вниз имеется «скачок» вниз.

- «Скачки» на эпюре  $M$  возможны только в тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные внешние моменты. По величине этот «скачок» равен этому моменту. Если сосредоточенный внешний момент действует по ходу часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вниз, а когда сосредоточенный внешний момент действует против хода часовой стрелки, то на эпюре  $M$  имеется «скачок» вверх.

- На участках балки, на которых поперечная сила  $Q$  положительная, эпюра изгибающих моментов возрастает, на участках балки, где поперечная сила  $Q$  отрицательная, эпюра изгибающих моментов убывает, а на *участках* балки, где поперечная сила  $Q$  равна нулю, эпюра изгибающих моментов постоянная ( $M = \text{const}$ ).

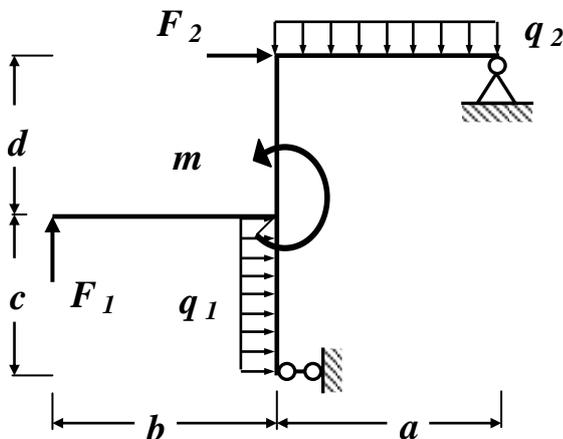
- Изгибающий момент  $M$  достигает  $\max$  или  $\min$  ( $M_{\text{экстр}}$ ) в тех *сечениях* балки, где поперечная сила равна нулю ( $Q = 0$ ).

- На участках балки, где действует внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , поперечная сила  $Q$  изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов  $M$  на этом участке ограничена кривой.

- На участках балки, где внешняя распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  отсутствует, поперечная сила  $Q$  постоянная ( $Q = \text{const}$ ), а эпюра изгибающих моментов  $M$  изменяется по линейному закону.

*В нашей задаче все эти положения выполняются, следовательно, эпюры внутренних силовых факторов построены правильно.*

#### 2.4. Задача 4. Построение эпюр внутренних силовых факторов в статически определимой плоской раме



**Исходные данные:**

$a = 2 \text{ м}; b = 1 \text{ м}; c = 2 \text{ м}; d = 1 \text{ м};$   
 $F_1 = 6 \text{ кН}; F_2 = 5 \text{ кН}; m = 8 \text{ кНм};$   
 $q_1 = 3 \text{ кН/м}; q_2 = 4 \text{ кН/м}.$

**Рис. 1.23. Схема рамы**

**Для заданной схемы статически определимой плоской рамы (рис. 1.23) требуется:**

1. Определить опорные реакции.
2. Построить эпюры продольных сил  $N$ , поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .
3. Сделать проверки правильности построенных эпюр.

#### Решение

##### Определение опорных реакций

Заменяем действие опор опорными реакциями  $H_A$ ,  $R_A$  и  $H_B$  как показано на рис. 1.24.

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

Действие распределенных нагрузок  $q_1$  и  $q_2$  заменим их равнодействующими, приложенными в центре тяжести прямоугольников

$$R_{q_1} = q_1 \cdot 2m = 3 \text{ кН/м} \cdot 2m = \mathbf{6 \text{ кН}}; \quad R_{q_2} = q_2 \cdot 2m = 4 \text{ кН/м} \cdot 2m = \mathbf{8 \text{ кН}}.$$

Для определения опорных реакций составляем три уравнения равновесия (статики) с учетом правила знаков (рис. 1.25):

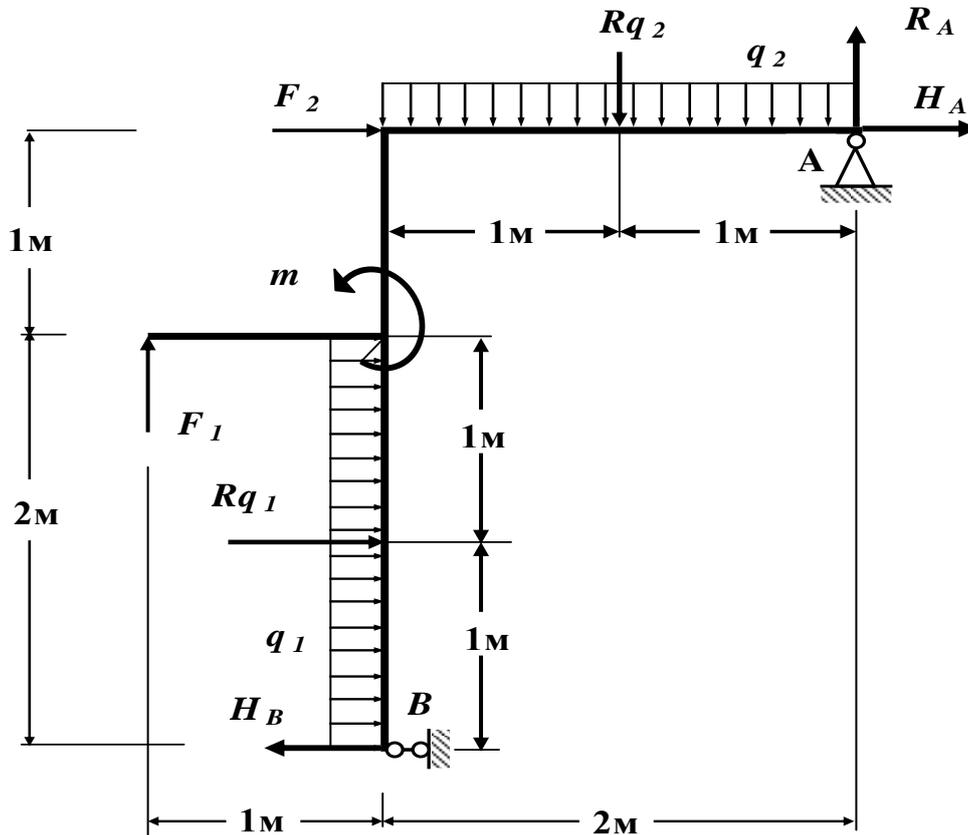
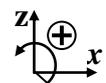


Рис. 1.24. Схема рамы

1. Сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  равна нулю  
 $\Sigma F_z = 0: -R_{q_2} + R_A + F_1 = 0; -8 \text{ кН} + R_A + 6 \text{ кН} = 0;$



$$-8 \text{ кН} + R_A + 6 \text{ кН} = 0; \quad -2 \text{ кН} + R_A = 0; \quad \rightarrow \quad \mathbf{R_A = 2 \text{ кН}}.$$

Рис. 1.25

2. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $A$  равна нулю

$$\Sigma M_A = 0: -H_B \cdot (2m + 1m) + R_{q_1} \cdot (1m + 1m) + m + R_{q_2} \cdot 1m - F_1 \cdot (1m + 2m) = 0;$$

$$-H_B \cdot 3m + 6 \text{ кН} \cdot 2m + 8 \text{ кНм} + 8 \text{ кН} \cdot 1m - 6 \text{ кН} \cdot 3m = 0;$$

$$\frac{10 \text{ кНм}}{3m} =$$

$$-H_B \cdot 3m + 10 \text{ кНм} = 0; \quad \rightarrow \quad H_B = \frac{10 \text{ кНм}}{3m} = \mathbf{3,333 \text{ кН}}; \quad \rightarrow \quad \mathbf{H_B = 3,33 \text{ кН}}.$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $B$  равна нулю

$$\Sigma M_B = 0: -R_{q_1} \cdot 1m + m - F_2 \cdot (1m + 2m) - R_{q_2} \cdot 1m + R_A \cdot 2m - H_A \cdot (1m + 2m) - F_1 \cdot 1m = 0;$$

$$-6 \text{ кН} \cdot 1m + 8 \text{ кНм} - 5 \text{ кН} \cdot 3m - 8 \text{ кН} \cdot 1m + 2 \text{ кН} \cdot 2m - H_A \cdot 3m - 6 \text{ кН} \cdot 1m = 0;$$

$$-\frac{23\text{кНм}}{3\text{м}} =$$

$$-23\text{кНм} - N_A \cdot 3\text{м} = 0; \quad N_A = -\frac{23\text{кНм}}{3\text{м}} = -7,6666\text{ кН}; \quad \rightarrow \quad N_A = -7,67\text{ кН}.$$

Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  должна быть равна 0)

$$\Sigma F_x = 0: \quad -N_B + Rq_1 + F_2 + N_A = (-3,33\text{кН}) + 6\text{кН} + 5\text{кН} + (-7,67\text{кН}) = 11\text{ кН} - 11\text{ кН} = 0 (\pm 5 \%).$$

### Построение эпюр продольных, поперечных сил и изгибающих моментов

При воздействии на раму внешних нагрузок, в их поперечных сечениях возникают внутренние силовые факторы: продольная сила  $N$ , поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ .

Правила построения эпюр этих внутренних усилий в рамах такие же, как и в балках.

В нашем примере расчетная схема рамы имеет четыре участка ( $BK$ ,  $CK$ ,  $DK$  и  $AD$ ), как показано на рис. 1.26.

**I участок BK:**  $0 \leq z_1 \leq 2\text{м}$  (начало отсчета на нижнем конце участка);

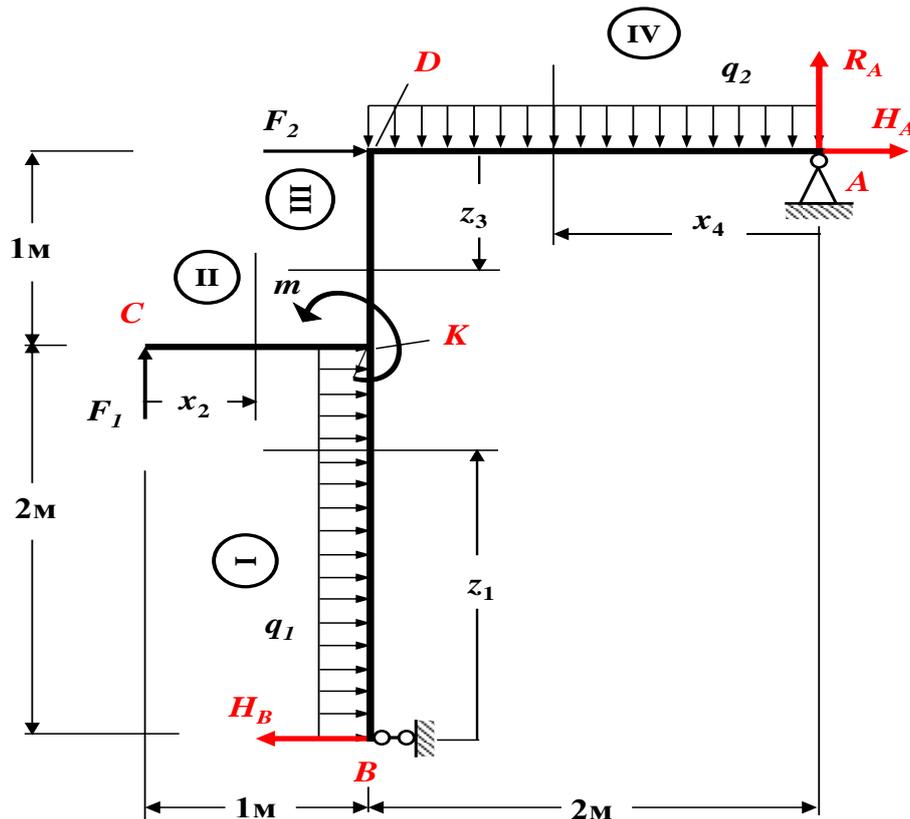
Проводим поперечное сечение в пределах первого рассматриваемого участка  $BK$ , которое разбивает раму на две части (рис. 1.26).

Рассматриваем нижнюю от проведенного сечения часть балки, так как вверх от сечения сил приложено больше, чем вниз.

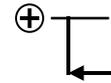
Составляем выражения для поперечной силы  $Q$ , изгибающего момента  $M$  и продольной силы  $N$ . При этом руководствуемся определением этих внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на первом участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные внизу от проведенного сечения, на ось  $x$ , перпендикулярную геометрической оси стойки (рис. 1.26), с учетом правила знаков.


**Рис. 1.26. Расчетная схема заданной рамы**

Внизу от сечения сила  $H_B$  направлена влево (она стремится повернуть рассматриваемую часть рамы по ходу часовой стрелки), поэтому она **положительная**, а сила  $q_1 \cdot z_1$  – равнодействующая распределенной нагрузки на участке длиной  $z_1$ , направлена вправо (она стремится повернуть рассматриваемую часть рамы против хода часовой стрелки), поэтому она **отрицательная**



$$Q(z_1) = + H_B - q_1 \cdot z_1 = + 3,33 \text{ кН} - 3 \text{ кН/м} \cdot z_1.$$

Поперечная сила  $Q$  на первом участке является линейной функцией координаты  $z_1$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = + 3,33 \text{ кН} - 3 \text{ кН/м} \cdot 0 = + 3,33 \text{ кН} \text{ (значение на нижней границе участка);}$$

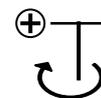
$$Q(2\text{ м}) = + 3,33 \text{ кН} - 3 \text{ кН/м} \cdot 2\text{ м} = - 2,67 \text{ кН} \text{ (значение на верхней границе участка).}$$

Поскольку поперечная сила  $Q$  меняет знак в пределах участка, определяем координату сечения  $z_0$ , в котором она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент  $M$  принимает экстремальное значение)

$$Q(z_0) = + 3,33 \text{ кН} - 3 \text{ кН/м} \cdot z_0 = 0; \quad z_0 = \frac{3,33 \text{ кН}}{3 \text{ кН/м}} = 1,11 \text{ м}; \quad \rightarrow \quad \mathbf{z_0 = 1,11 \text{ м.}}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на первом участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных внизу от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.26), с учетом правила знаков.



Момент силы  $H_B$  (плечо силы –  $z_1$ ) направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение правых волокон), поэтому он **положительный**, а момент силы  $q_1 \cdot z_1$  (плечо силы –  $z_1/2$ ) направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение левых волокон), поэтому он **отрицательный**

$$M(z_1) = + H_B \cdot z_1 - q_1 \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2} = + 3,33 \text{ кН} \cdot z_1 - 3 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot \frac{z_1^2}{2} = + 3,33 \text{ кН} \cdot z_1 -$$

$$- 1,5 \text{ кН/м} \cdot z_1^2.$$

Изгибающий момент  $M$  на первом участке является квадратичной функцией координаты  $z_1$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка и в найденной выше точке  $z_0 = 1,11 \text{ м}$

$$M(0) = 3,33 \text{ кН} \cdot 0 - 1,5 \text{ кН/м} \cdot 0^2 = 0 \text{ кНм (значение на нижней границе участка);}$$

$$M(1,11 \text{ м}) = 3,33 \text{ кН} \cdot 1,11 \text{ м} - 1,5 \text{ кН/м} \cdot (1,11 \text{ м})^2 = 1,84815 \text{ кНм} =$$

$$= 1,85 \text{ кНм (значение в сечении } z_0 = 1,11 \text{ м);}$$

$$M(2 \text{ м}) = 3,33 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м} - 1,5 \text{ кН/м} \cdot (2 \text{ м})^2 = 0,66 \text{ кНм (значение на верхней границе участка).}$$

Определяем величину продольной силы  $N$  на первом участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные внизу от проведенного сечения, на геометрическую ось стойки  $z$  (рис. 1.26), с учетом правила знаков. Внизу от сечения отсутствуют силы, действующие параллельно геометрической оси стойки, следовательно,

$$N(z_1) = 0 \text{ кН.}$$

Продольная сила  $N$  на первом участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная геометрической оси стойки  $z$ . Для построения ее графика определяем значение продольной силы на границах этого участка

$$N(0) = 0 \text{ кН (значение на нижней границе участка);}$$

$$N(2 \text{ м}) = 0 \text{ кН (значение на верхней границе участка).}$$

**II участок СК:**  $0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м}$  (начало отсчета на левой границе участка).

Проводим поперечное сечение в пределах второго рассматриваемого участка **СК**, которое разбивает раму на две части. Рассматриваем левую от проведенного сечения часть рамы (рис. 1.26), так как слева от сечения сил приложено меньше, чем справа.

Составляем выражения для поперечной силы  $Q$ , изгибающего момента  $M$  и продольной силы  $N$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на втором участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси ригеля (рис. 1.26), с учетом правила знаков.

Слева от сечения сила  $F_1$  направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть рамы по ходу часовой стрелки), поэтому она положительная

$$Q(x_2) = + F_1 = + 6 \text{ кН.}$$

Поперечная сила  $Q$  на втором участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка.

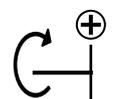
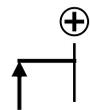
$$Q(0) = F_1 = + 6 \text{ кН (значение на левой границе участка);}$$

$$Q(1 \text{ м}) = F_1 = + 6 \text{ кН (значение на правой границе участка).}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на втором участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.26), с учетом правила знаков.

Момент силы  $F_1$  / плечо силы –  $x_2$  / направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон рамы), поэтому он положительный



$$M(x_2) = + F \cdot x_2 = + 6 \text{ кНм} \cdot x_2.$$

Изгибающий момент  $M$  на втором участке является линейной функцией координаты  $x_2$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$$M(0) = + 6 \text{ кНм} \cdot 0 = 0 \text{ кНм (значение на левой границе участка);}$$

$$M(1\text{м}) = + 6 \text{ кН} \cdot 1\text{м} = + 6 \text{ кНм (значение на правой границе участка).}$$

Определяем величину продольной силы  $N$  на втором участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на геометрическую ось стойки  $x$  (рис. 1.26), с учетом правила знаков. Слева от сечения отсутствуют силы, действующие параллельно геометрической оси стойки, следовательно,

$$N(x_2) = 0 \text{ кН.}$$

Продольная сила  $N$  на втором участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная геометрической оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение продольной силы на границах этого участка

$$N(0) = 0 \text{ кН (значение на левой границе участка);}$$

$$N(1\text{м}) = 0 \text{ кН (значение на правой границе участка).}$$

**III участок DK:**  $0 \leq z_3 \leq 1\text{м}$  (начало отсчета на верхней границе участка).

Проводим поперечное сечение в пределах третьего рассматриваемого участка **DK**, которое разбивает раму на две части. Рассматриваем верхнюю от проведенного сечения часть рамы (рис. 1.26).

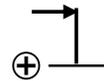
Составляем выражения для поперечной силы  $Q$ , изгибающего момента  $M$  и продольной силы  $N$ . При этом руководствуемся определением этих внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на третьем участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные сверху от проведенного сечения, на ось  $x$ , перпендикулярную геометрической оси стойки (рис. 1.26), с учетом правила знаков.

Вверху от сечения сила  $F_2$  направлена вправо (она стремится повернуть рассматриваемую часть рамы по ходу часовой стрелки), поэтому она *положительная*; сила  $H_A$  направлена вправо (она стремится повернуть рассматриваемую часть рамы по ходу часовой стрелки), поэтому она также *положительная*

$$Q(z_3) = + F_2 + H_A = + 5 \text{ кН} + (- 7,67 \text{ кН}) = - 2,67 \text{ кН.}$$



Поперечная сила  $Q$  на третьем участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $z$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

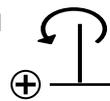
$$Q(0) = - 2,67 \text{ кН (значение на верхней границе участка);}$$

$$Q(1\text{м}) = - 2,67 \text{ кН (значение на нижней границе участка).}$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на третьем участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных сверху от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.26), с учетом правила знаков.

Момент силы  $F_2$  /плечо силы –  $z_3$ / направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение левых волокон рамы), поэтому он *отрицательный*; момент силы  $Rq_2 = q_2 \cdot 2$  /плечо силы –  $1\text{м}$ / направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение левых волокон рамы), поэтому он *отрицательный*; момент силы  $R_A$  /плечо силы –  $2\text{м}$  / направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение правых волокон рамы), поэтому он *положительный*; момент силы  $H_A$  /плечо силы –  $z_3$  / направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение левых волокон рамы), поэтому он *отрицательный*



$$\begin{aligned}
 M(z_3) &= -F_2 \cdot z_3 - Rq_2 \cdot 1\text{м} + R_A \cdot 2\text{м} - H_A \cdot z_3 = \\
 &= -5\text{кН} \cdot z_3 - 8\text{кН} \cdot 1\text{м} + 2\text{кН} \cdot 2\text{м} - (-7,67\text{кН}) \cdot z_3; \\
 M(z_3) &= +2,67\text{кН} \cdot z_3 - 4\text{кНм}.
 \end{aligned}$$

Изгибающий момент  $M$  на третьем участке рамы является линейной функцией координаты  $z_3$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

$$M(0) = 2,67\text{кН} \cdot 0 - 4\text{кНм} = -4\text{кНм} \text{ (значение на верхней границе участка);}$$

$$M(1\text{м}) = 2,67\text{кН} \cdot 1\text{м} - 4\text{кНм} = -1,33\text{кНм} \text{ (значение на нижней границе участка).}$$

Определяем величину продольной силы  $N$  на третьем участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные сверху от проведенного сечения, на геометрическую ось стойки  $z$  (рис. 1.26), с учетом правила знаков.

Вверху от проведенного сечения сила  $R_A$  направлена от сечения вверх (она вызывает растяжение рассматриваемой части рамы), поэтому она положительная; сила  $Rq_2 = q_2 \cdot 2$  направлена от сечения вниз (она вызывает сжатие рассматриваемой части рамы), поэтому она отрицательная

$$N(z_3) = R_A - Rq_2 = 2\text{кН} - 8\text{кН} = -6\text{кН}.$$

Продольная сила  $N$  на третьем участке рамы является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $z$ . Для построения ее графика определяем значение продольной силы на границах этого участка

$$N(0) = -6\text{кН} \text{ (значение на верхней границе участка);}$$

$$N(1\text{м}) = -6\text{кН} \text{ (значение на нижней границе участка).}$$

**IV участок AD:**  $0 \leq x_4 \leq 2\text{м}$  (начало отсчета на правой границе участка).

Проводим поперечное сечение в пределах четвертого рассматриваемого участка  $AD$ , которое разбивает раму на две части. Рассматриваем правую от проведенного сечения часть рамы (рис. 1.26), так как справа от сечения сил приложено меньше, чем слева.

Составляем выражения для поперечной силы  $Q$ , изгибающего момента  $M$  и продольной силы  $N$ . При этом руководствуемся определением внутренних силовых факторов и правилом знаков.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на четвертом участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$  (рис. 1.26), перпендикулярную геометрической оси ригеля, с учетом правила знаков.

Справа от сечения сила  $R_A$  направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть рамы против хода часовой стрелки), поэтому она отрицательная; сила  $q_2 \cdot x_4$  – равнодействующая распределенной нагрузки на участке длиной  $x_4$ , направлена вниз (она стремится повернуть рассматриваемую часть рамы по ходу часовой стрелки), поэтому она положительная

$$Q(x_4) = -R_A + q_2 \cdot x_4 = -2\text{кН} + 4\text{кН/м} \cdot x_4.$$

Поперечная сила  $Q$  на четвертом участке является линейной функцией координаты  $x_4$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = -2\text{кН} + 4\text{кН/м} \cdot 0 = -2\text{кН} \text{ (значение на правой границе участка);}$$

$$Q(2\text{м}) = -2\text{кН} + 4\text{кН/м} \cdot 2\text{м} = +6\text{кН} \text{ (значение на левой границе участка).}$$

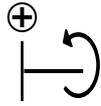
Поскольку поперечная сила  $Q$  меняет знак в пределах участка, определяем координату сечения  $x_0$ , в котором она обращается в нуль (в этом сечении изгибающий момент  $M$  принимает экстремальное значение)

$$Q(x_0) = -2\text{кН} + 4\text{кН/м} \cdot x_0 = 0; \quad \rightarrow \quad x_0 = 0,5\text{м}.$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на четвертом участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения (рис. 1.26), с учетом правила знаков.

Момент силы  $R_A$  (плечо силы –  $x_4$ ) направлен против хода часовой стрелки (она вызывает растяжение нижних волокон), поэтому он *положительный*, а момент силы  $q_2 \cdot x_4$  (плечо силы –  $x_4/2$ ) направлен по ходу часовой стрелки (она вызывает растяжение верхних волокон), поэтому он *отрицательный*



$$M(x_4) = R_A \cdot x_4 - q_2 x_4 \frac{x_4}{2} = 2 \text{ кН} \cdot x_4 - 4 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot \frac{x_4^2}{2};$$

$$M(x_4) = 2 \text{ кН} \cdot x_4 - 2 \text{ кН/м} \cdot x_4^2.$$

Изгибающий момент  $M$  на четвертом участке является квадратичной функцией координаты  $x_4$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка и в найденной выше точке  $x_0 = 0,5 \text{ м}$

$$M(0) = 2 \text{ кН} \cdot 0 - 2 \text{ кН/м} \cdot 0 = 0 \text{ кНм (значение на правой границе участка);}$$

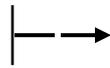
$$M(0,5 \text{ м}) = 2 \text{ кН} \cdot 0,5 \text{ м} - 2 \text{ кН/м} \cdot (0,5 \text{ м})^2 = + 0,5 \text{ кНм (значение в сечении } x_0 = 0,5 \text{ м);}$$

$$M(2 \text{ м}) = 2 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м} - 2 \text{ кН/м} \cdot (2 \text{ м})^2 = - 4 \text{ кНм (значение на левой границе участка).}$$

Определяем величину продольной силы  $N$  на четвертом участке.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на геометрическую ось ригеля  $x$  (рис. 1.26), с учетом правила знаков.

Справа от проведенного сечения сила  $H_A$  направлена от сечения вправо (она вызывает растяжение рассматриваемой части рамы), поэтому она *положительная*



$$N(x_4) = H_A = - 7,67 \text{ кН.}$$

Продольная сила  $N$  на четвертом участке рамы является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение продольной силы на границах этого участка

$$N(0) = - 7,67 \text{ кН (значение на правой границе участка);}$$

$$N(2 \text{ м}) = - 7,67 \text{ кН (значение на левой границе участка).}$$

По полученным численным значениям  $Q$ ,  $M$  и  $N$  в характерных сечениях рамы строим в масштабе эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил, как показано на рис. 1.27.

*В проектных строительных организациях эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне, т.е. положительные значения изгибающих моментов в раме откладываются вниз от базисной прямой для ригеля и вправо от базисной прямой для стойки.*

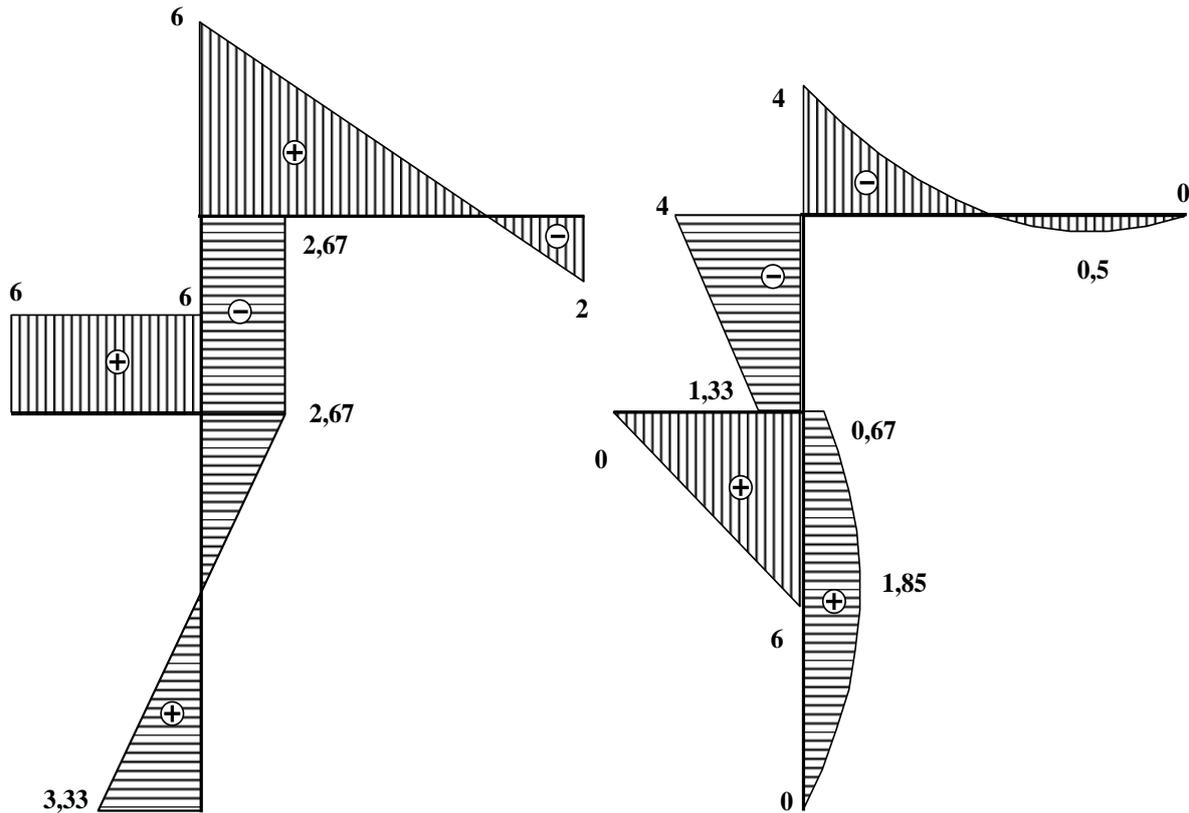
### Контроль (проверки) правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов

Построенные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в раме проверяются по правилам контроля для прямолинейных балок.

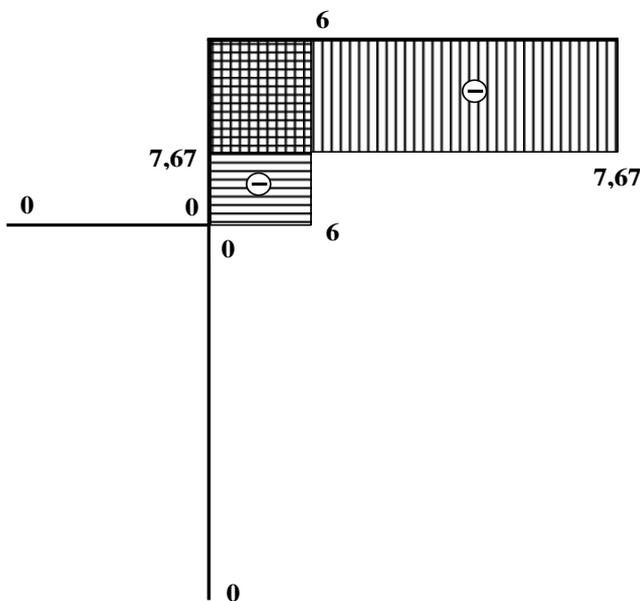
Кроме этого в раме необходимо проверить равновесие узлов.

Эпюра поперечных сил, "Q", кН

Эпюра изгибающих моментов, "M", кНм



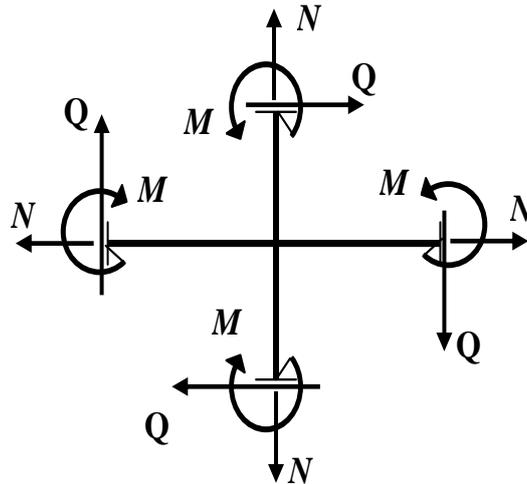
Эпюра продольных сил, "N", кН



**Рис. 1.27. Эпюры поперечных сил  $Q$ , изгибающих моментов  $M$  и продольных сил  $N$  в раме**

В нашей задаче это узел **D** и узел **K** (рис. 1.26). Эта проверка состоит в том, что вырезанный узел под действием приложенных к нему всех внешних сосредоточенных нагрузок (сосредоточенных сил и сосредоточенных моментов), а также внутренних силовых факторов (поперечных сил, продольных сил и изгибающих моментов) должен находиться в равновесии.

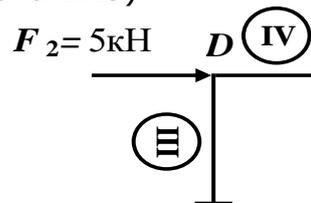
Положительные направления внутренних силовых факторов для узла в виде креста показаны на рис. 1.28.



**Рис. 1.28. Положительные направления внутренних силовых факторов для узла рамы**

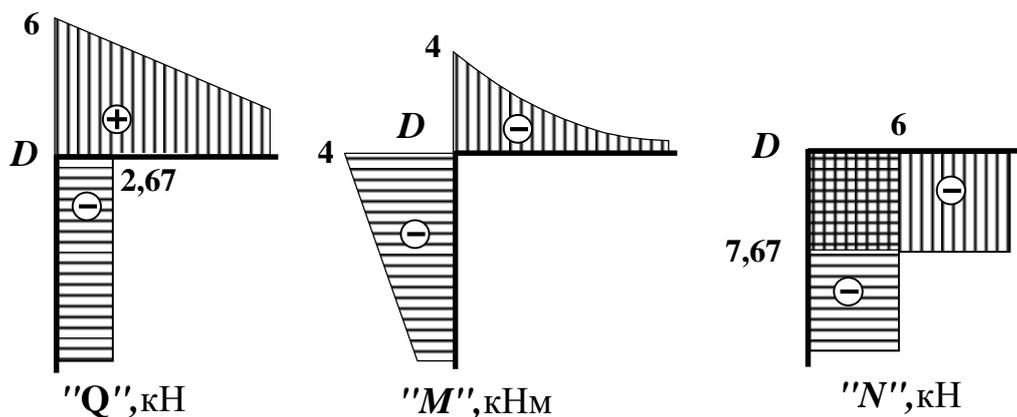
Вырежем узел **D** и проверим его равновесие.

В узле **D** сходятся **III** и **IV** участки, а также приложена внешняя сосредоточенная горизонтальная сила  $F_2 = 5 \text{ кН}$  (рис. 1.29).



**Рис. 1.29. Узел D**

Используя рис. 1.27, приведем фрагменты эпюр поперечных сил **Q**, изгибающих моментов **M** и продольных сил **N** в окрестности узла **D** (рис. 1.30).



**Рис. 1.30. Фрагменты эпюр поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил в окрестности узла D**

В узле **D** внутренние силовые факторы принимают следующие значения (рис. 1.30):

$$Q_D^{\text{III}} = -2,67 \text{ кН} \quad (\text{при подходе к узлу снизу});$$

$$M_D^{IV} = -4 \text{ кНм (при подходе к узлу справа);}$$

$$M_D^{III} = -4 \text{ кНм (при подходе к узлу снизу);}$$

$$N_D^{IV} = -7,67 \text{ кН (при подходе к узлу справа);}$$

$$N_D^{III} = -6 \text{ кН (при подходе к узлу снизу).}$$

С учетом правила знаков (рис. 1.28), показываем истинные направления внутренних усилий, приложенных в окрестности узла **D** (рис. 1.31).

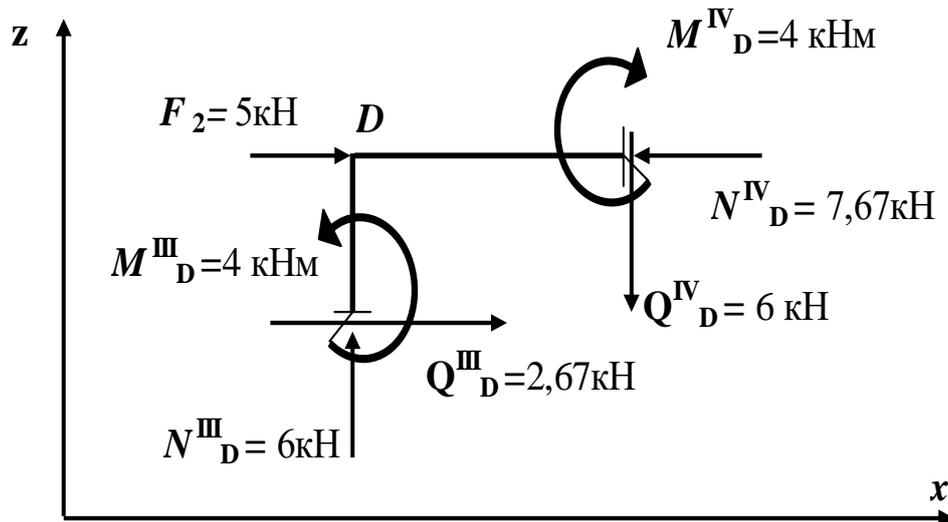
Составляем три уравнения равновесия (статики):

$$\Sigma F_x = 0: Q_D^{III} - N_D^{IV} + F_2 = 2,67 \text{ кН} - 7,67 \text{ кН} + 5 \text{ кН} = 7,67 \text{ кН} - 7,67 \text{ кН} = 0;$$

$$\Sigma F_z = 0: N_D^{III} - Q_D^{IV} = 6 \text{ кН} - 6 \text{ кН} = 0;$$

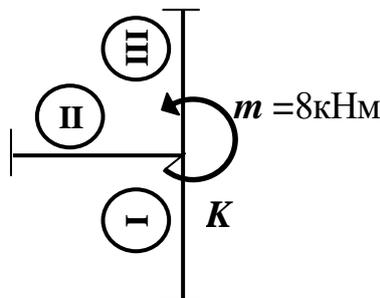
$$\Sigma M_D = 0: M_D^{III} - M_D^{IV} = 4 \text{ кНм} - 4 \text{ кНм} = 0.$$

Узел **D** под действием внешней сосредоточенной силы и внутренних силовых факторов находится в равновесии.



**Рис. 1.31. Истинные направления внутренних усилий в окрестности узла D**

- Вырежем узел **K** и проверим его равновесие. В узле **K** сходятся **I**, **II** и **III** участки, а также приложен внешний сосредоточенный момент  $m = 8 \text{ кНм}$  (рис. 1.32).



**Рис. 1.32. Узел K**

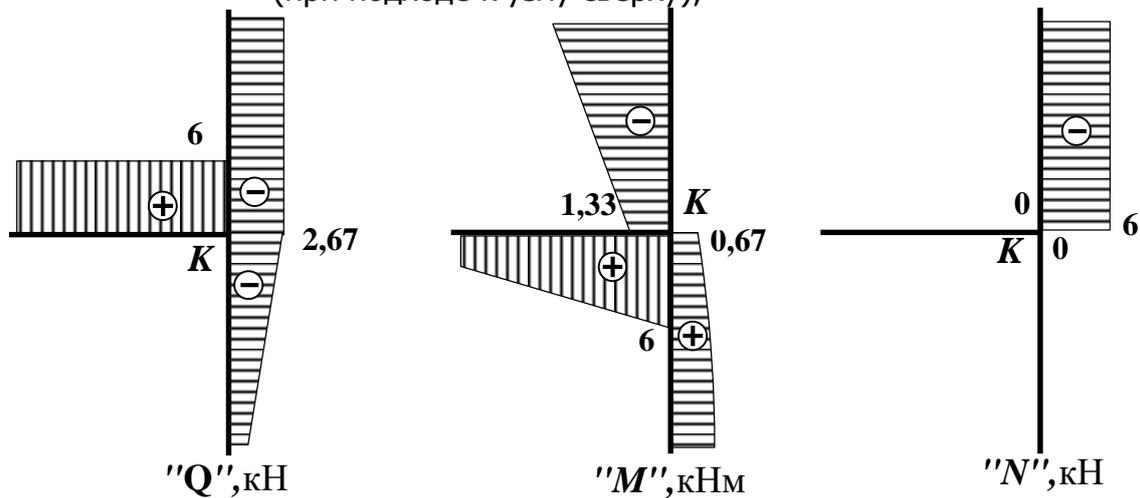
Используя рис. 1.27, приведем фрагменты эпюр поперечных, продольных сил и изгибающих моментов в окрестности узла  $K$  (рис. 1.33).

В узле  $K$  внутренние силовые факторы принимают следующие значения (рис. 1.33):

$$Q_K^I = -2,67 \text{ кН} \quad (\text{при подходе к узлу снизу});$$

$$Q_K^II = 6 \text{ кН} \quad (\text{при подходе к узлу слева});$$

$$Q_K^III = -2,67 \text{ кН} \quad (\text{при подходе к узлу сверху});$$



**Рис. 1.33. Фрагменты эпюр поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил в окрестности узла  $K$**

$$M_K^I = 0,67 \text{ кНм} \quad (\text{при подходе к узлу снизу});$$

$$M_K^II = 6 \text{ кНм} \quad (\text{при подходе к узлу слева});$$

$$M_K^III = -1,33 \text{ кНм} \quad (\text{при подходе к узлу сверху});$$

$$N_K^I = 0 \text{ кН} \quad (\text{при подходе к узлу снизу});$$

$$N_K^II = 0 \text{ кН} \quad (\text{при подходе к узлу слева});$$

$$N_K^III = -6 \text{ кН} \quad (\text{при подходе к узлу сверху}).$$

С учетом правила знаков (рис. 1.28), показываем истинные направления внутренних усилий, примененных в окрестности узла  $K$  (рис. 1.34).

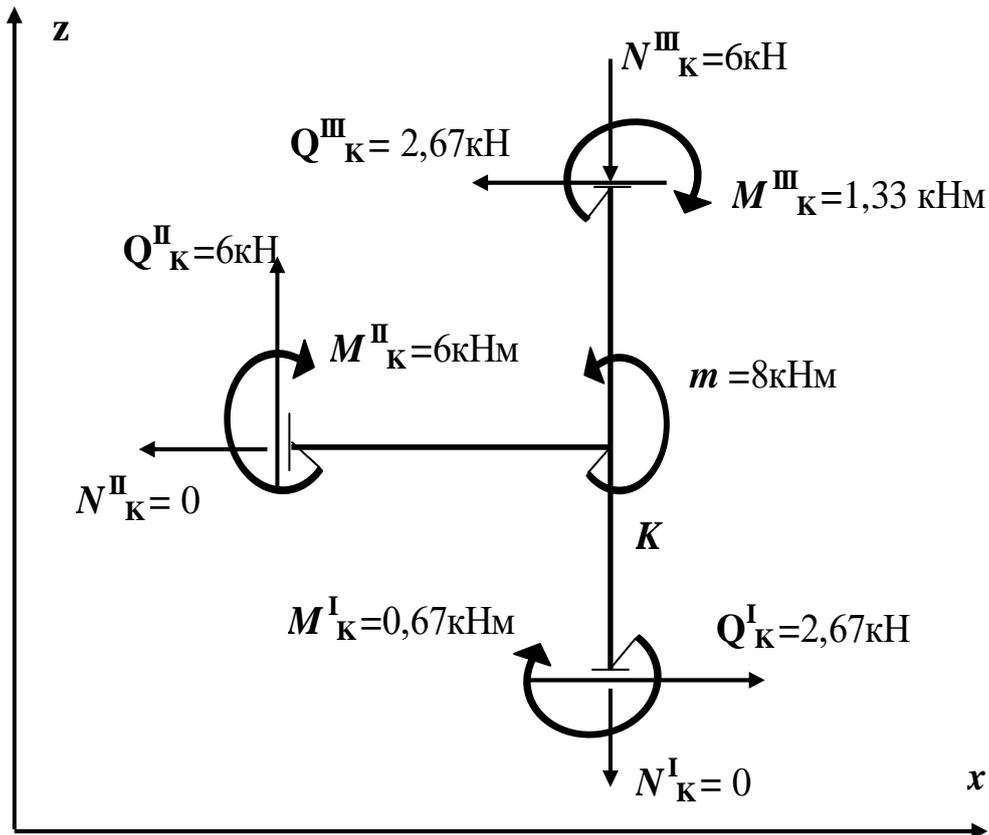
Составляем три уравнения равновесия (статики):

$$\Sigma F_x = 0: \quad Q_K^I - N_K^II - Q_K^III = 2,67 \text{ кН} - 0 \text{ кН} - 2,67 \text{ кН} = 0;$$

$$\Sigma F_z = 0: \quad -N_K^I + Q_K^II - N_K^III = 0 \text{ кН} + 6 \text{ кН} - 6 \text{ кН} = 0;$$

$$\Sigma M_K = 0: \quad -M_K^I - M_K^II - M_K^III + m = -0,67 \text{ кНм} - 6 \text{ кНм} - 1,33 \text{ кНм} + 8 \text{ кНм} = -8 \text{ кНм} + 8 \text{ кНм} = 0.$$

Узел  $K$  под действием внешнего сосредоточенного момента и внутренних силовых факторов находится в равновесии.



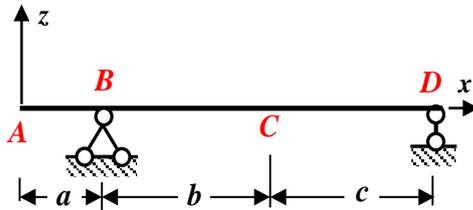
**Рис. 1.34. Истинные направления внутренних усилий в окрестности узла  $K$**

**В нашей задаче все проверки выполняются, следовательно, эпюры изгибающих моментов  $M$ , поперечных сил  $Q$  и продольных сил  $N$  в раме построены правильно.**

### 2.5. Задача №5. Обратная задача.

По заданной схеме статически определимой балки и одной из эпюр (изгибающих моментов  $M$  или поперечных сил  $Q$ ) определение внешней нагрузки, действующей на балку, и построение недостающей эпюры ( $Q$  или  $M$ )

а). Задана схема балки и эпюра изгибающих моментов  $M$



Исходные данные:

$$a = 1 \text{ м}; \quad b = 2 \text{ м}; \quad c = 2 \text{ м}.$$

Эпюра изгибающих моментов

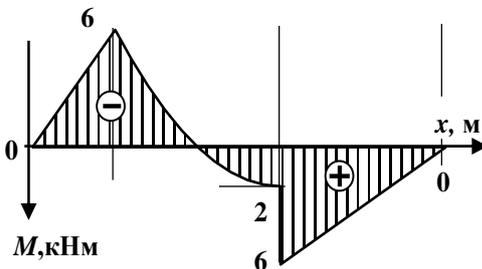


Рис. 1.35 Схема балки и эпюра изгибающих моментов  $M$

По заданной схеме балки и эпюре изгибающих моментов  $M$  (рис. 1.35) требуется:

1. Определить внешнюю нагрузку, действующую на статически определимую балку.
2. Построить недостающую эпюру поперечных сил  $Q$ .

#### Решение

**Определение внешней нагрузки, действующей на статически определимую балку**

- Учитывая, что эпюра изгибающих моментов  $M$  построена на «растянутых» волокнах, и анализируя заданную эпюру  $M$  (рис. 1.35) на основании проверок правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок, имеем:
  - в сечении  $C$  имеется «скачок» вниз, равный  $4 \text{ кНм}$ , следовательно, в сечении  $C$  балки приложен внешний сосредоточенный момент  $m = 4 \text{ кНм}$ , действующий по ходу часовой стрелки;
  - на участке  $AB$  наклонная вверх прямая, следовательно, в сечении  $A$  балки приложена внешняя сосредоточенная сила  $F_1$ , направленная вниз (растянуты верхние волокна балки);
  - на участке  $BC$  парабола, направленная выпуклостью вниз, следовательно, на участке  $BC$  балки приложена внешняя равномерно-распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , направленная вниз;
  - на участке  $CD$  наклонная вверх прямая, следовательно, в сечении  $D$  балки приложена внешняя сосредоточенная сила (опорная реакция)  $R_D$ , направленная вверх (растянуты нижние волокна балки);

- в сечениях **B** и **C** имеется перелом касательных к эпюре, следовательно, приложены внешние сосредоточенные силы (в сечении **B** опорная реакция  $R_B$ , направленная вверх, т.к. перелом касательных вверх, а в сечении **C** сила  $F_2$ , направленная вниз, т.к. перелом касательных вниз).

Показываем всю внешнюю нагрузку ( $H_B$ ,  $F_1$ ,  $R_B$ ,  $q$ ,  $F_2$ ,  $m$  и  $R_D$ ) на расчетной схеме балки (рис. 1.36).

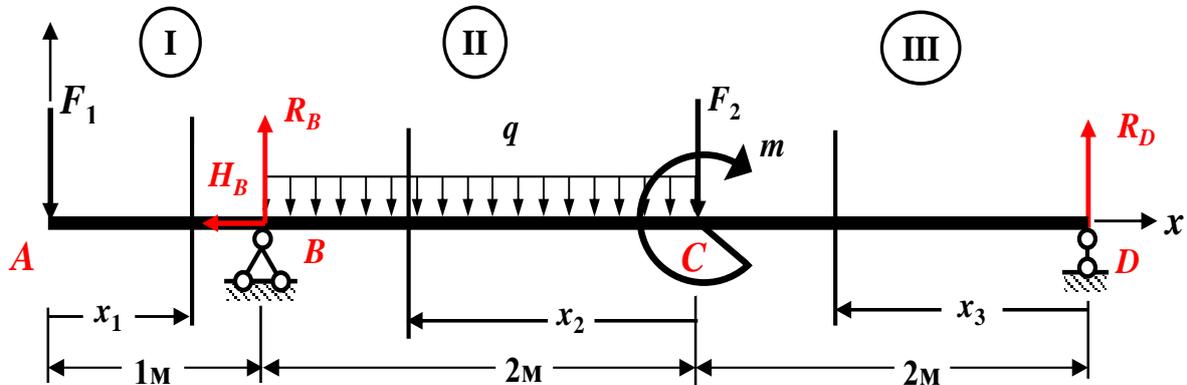
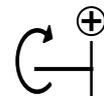


Рис. 1.36. Расчетная схема балки

• Для определения численных значений  $F_1$ ,  $q$ ,  $F_2$  и  $R_D$  составим выражения изгибающих моментов для каждого участка балки.

**I участок AB:**  $0 \leq x_1 \leq 1$  м (начало отсчета на левой границе участка, рис. 1.36). Определяем величину изгибающего момента  $M$  на первом участке.

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.



Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_1) = -F_1 \cdot x_1.$$

Из эпюры  $M$  видно, что в сечении **B** (при  $x_1 = 1$  м)

$$M_B = M(1\text{м}) = -6 \text{ кНм}.$$

Следовательно,

$$M(1\text{м}) = -F_1 \text{кН} \cdot 1\text{м} = -6 \text{ кНм}, \text{ т.е. } F_1 = +6 \text{ кН}.$$

(Знак  $+$  показывает, что на рис. 1.36 верно указано направление силы  $F_2$ ).

**III участок DC:**  $0 \leq x_3 \leq 2$  м (начало отсчета на правой границе участка, рис. 1.36).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на третьем участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента

$$M(x_3) = +R_D \cdot x_3.$$

Из эпюры  $M$  видно, что в сечении **C** (при  $x_3 = 2$  м)

$$M_C = M(2\text{м}) = +6 \text{ кНм}.$$

Следовательно,

$$M(2\text{м}) = +R_D \text{кН} \cdot 2\text{м} = +6 \text{ кНм}, \text{ т.е. } R_D = +3 \text{ кН}.$$

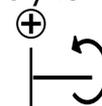
(Знак  $+$  показывает, что на рис. 1.36 верно указано направление силы  $R_D$ ).

**II участок CB:**  $0 \leq x_2 \leq 2$  м (начало отсчета на правой границе участка, рис. 1.36).

Из эпюры  $M$  видно, что в сечении **C** (при  $x_2 = 0$  м)

$$M_C = M(0\text{м}) = M_{\text{экстр.}} = +2 \text{ кНм}.$$

Следовательно, в этом сечении **C** (при  $x_2 = 0$  м) поперечная сила  $Q(0) = 0$ .



Определяем величину поперечной силы  $Q$  на втором участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы (рис. 1.36)

$$Q(x_2) = -R_D + F_2 + q \cdot x_2.$$

Следовательно,

$$Q(0) = -R_D \text{ кН} + F_2 \text{ кН} + q \text{ кН/м} \cdot 0 \text{ м} = 0, \text{ т.е. } F_2 = +R_D \text{ кН} = +3 \text{ кН}.$$

(Знак  $+$  показывает, что на рис. 1.36 верно указано направление силы  $F_2$ ).

Из эпюры  $M$  видно, что в сечении  $B$  (при  $x_2 = 2\text{ м}$ )

$$M_B = M(2\text{ м}) = -6 \text{ кНм}.$$

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на втором участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от проведенного сечения, относительно центра тяжести проведенного поперечного сечения с учетом правила знаков.

Составляем выражение для изгибающего момента (рис. 1.36)

$$M(x_2) = +R_D \text{ кН} \cdot (x_2 + 2\text{ м}) - m \text{ кНм} - F_2 \text{ кН} \cdot x_2 - q \text{ кН/м} \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2}.$$

Следовательно,

$$M_B = M(2\text{ м}) = +R_D \text{ кН} \cdot (2\text{ м} + 2\text{ м}) - m \text{ кНм} - F_2 \text{ кН} \cdot 2\text{ м} - q \text{ кН/м} \cdot 2\text{ м} \cdot \frac{2\text{ м}}{2} =$$

$$= -6 \text{ кНм};$$

или

$$+3 \text{ кН} \cdot 4\text{ м} - 4 \text{ кНм} - 3 \text{ кН} \cdot 2\text{ м} - q \text{ кН/м} \cdot \frac{(2\text{ м})^2}{2} = -6 \text{ кНм},$$

то есть

$$q = \frac{12 - 4 - 6 + 6}{2} = +4 \text{ кН/м}; \rightarrow q = +4 \text{ кН/м}.$$

(Знак  $+$  показывает, что на рис. 1.36 верно указано направление нагрузки  $q$ ).

• Для определения численного значения опорной реакции  $R_B$  составим для балки уравнение равновесия (статики) в виде:

Сумма моментов всех сил относительно опоры  $D$  равна нулю

$$\Sigma M_D = 0: +F_1 \cdot 5\text{ м} - R_B \cdot 4\text{ м} + q \cdot 2\text{ м} \cdot 3\text{ м} - m + F_2 \cdot 2\text{ м} = 0;$$

$$+6 \text{ кН} \cdot 5\text{ м} - R_B \text{ кН} \cdot 4\text{ м} + 4 \text{ кН/м} \cdot 6\text{ м}^2 - 4 \text{ кНм} + 3 \text{ кН} \cdot 2\text{ м} = 0;$$

$$R_B = \frac{30 + 24 - 4 + 6}{4} = +14 \text{ кН}; \rightarrow R_B = +14 \text{ кН}.$$

(Знак  $+$  показывает, что на рис. 1.36 верно указано направление силы  $R_B$ ).

• Для определения численного значения опорной реакции  $H_B$  составим для балки уравнение равновесия (статики) в виде:

Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю

$$\Sigma F_x = 0: H_B = 0.$$

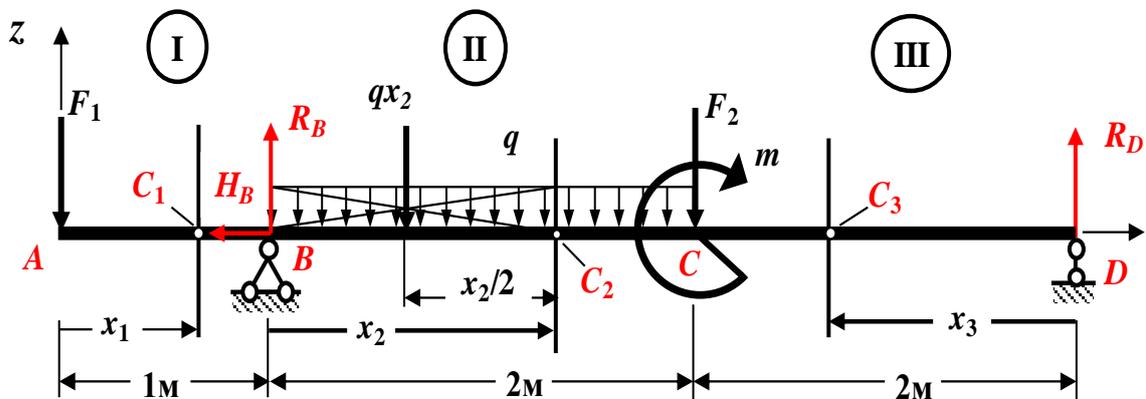
Проверяем правильность вычисления внешней нагрузки (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна 0)

$$\Sigma F_z = 0: -F_1 + R_B - q \cdot 2 - F_2 + R_D = 0$$

$$-6 \text{ кН} + 14 \text{ кН} - 8 \text{ кН} - 3 \text{ кН} + 3 \text{ кН} = 0 (\pm 5 \%).$$

**Построение недостающей эпюры поперечных сил  $Q$** 

Расчетная схема балки имеет три участка (**AB**, **BC** и **CD**), которые пронумеруем слева направо (рис. 1.37).



**Рис. 1.37. Расчетная схема балки**

**I участок AB:**  $0 \leq x_1 \leq 1\text{ м}$  (начало отсчета на левой границе участка).

Проводим поперечное сечение в пределах первого рассматриваемого участка **AB**, которое разбивает балку на две части. Рассматриваем левую от проведенного сечения часть балки (рис. 1.37), так как справа от сечения сил приложено больше, чем слева.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на первом участке. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки

(рис. 1.37), с учетом правила знаков.

Слева от сечения сила  $F_1$  направлена вниз (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки против хода часовой стрелки), поэтому она отрицательная

$$Q(x_1) = -F_1 = -6 \text{ кН.}$$

Поперечная сила  $Q$  на первом участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка.

$$Q(0) = -F_1 = -6 \text{ кН (значение на левой границе участка);}$$

$$Q(1\text{ м}) = -F_1 = -6 \text{ кН (значение на правой границе участка).}$$

**II участок BC:**  $0 \leq x_2 \leq 2\text{ м}$  (начало отсчета на левой границе участка).

Проводим поперечное сечение в пределах второго рассматриваемого участка **BC**, которое разбивает балку на две части. Рассматриваем левую от проведенного сечения часть балки (рис. 1.37), так как справа от сечения сил приложено больше, чем слева.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на втором участке. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки (рис. 1.37), с учетом правила знаков.

Слева от сечения сила  $F_1$  направлена вниз (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки против хода часовой стрелки), поэтому она отрицательная; сила  $R_B$  направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки), поэтому она положительная; сила  $q \cdot x_2$  –

равнодействующая распределенной нагрузки на участке длиной  $x_2$ , направлена вниз (она стремится повернуть рассматриваемую часть рамы против хода часовой стрелки), поэтому она отрицательная

$$Q(x_1) = -F_1 + R_B - q \cdot x_2.$$

Поперечная сила  $Q$  на втором участке является линейной функцией координаты  $x_2$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка

$$Q(0) = -6 \text{ кН} + 14 \text{ кН} - 4 \text{ кН/м} \cdot 0 = +8 \text{ кН} \text{ (значение на левой границе участка);}$$

$$Q(2 \text{ м}) = -6 \text{ кН} + 14 \text{ кН} - 4 \text{ кН/м} \cdot 2 \text{ м} = 0 \text{ кН} \text{ (значение на правой границе участка).}$$

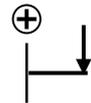
**III участок DC:**  $0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$  (начало отсчета на правой границе участка).

Проводим поперечное сечение в пределах третьего рассматриваемого участка **DC**, которое разбивает балку на две части. Рассматриваем правую от проведенного сечения часть балки (рис. 1.37), так как слева от сечения сил приложено больше, чем справа.

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на третьем участке. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки (рис. 1.37), с учетом правила знаков.

Справа от сечения сила  $R_D$  направлена вверх (она стремится повернуть рассматриваемую часть балки против хода часовой стрелки), поэтому она отрицательная



$$Q(x_3) = -R_D = -3 \text{ кН}.$$

Поперечная сила  $Q$  на третьем участке является постоянной, графиком такой функции служит прямая, параллельная оси  $x$ . Для построения ее графика определяем значение поперечной силы на границах этого участка.

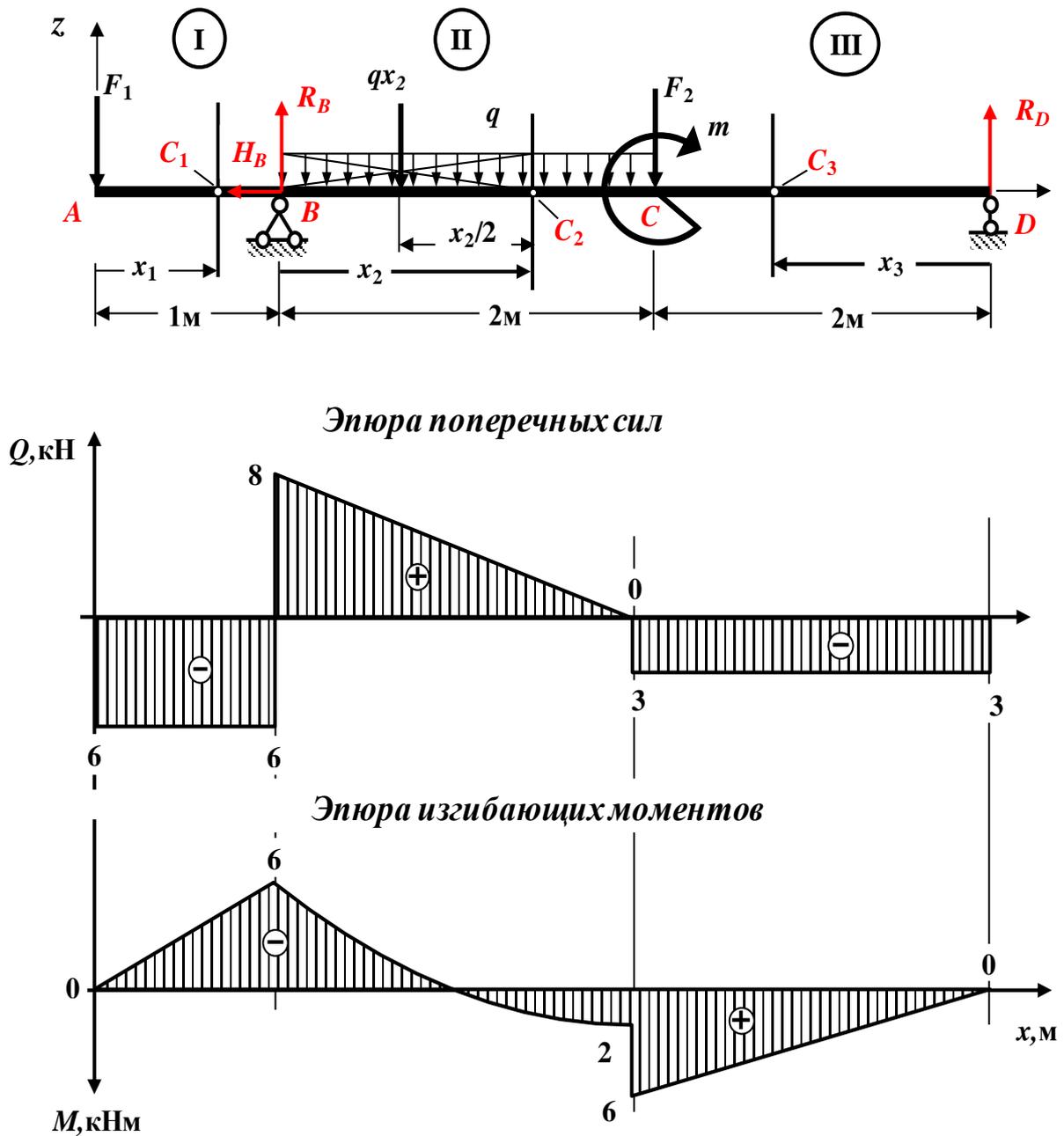
$$Q(0) = -R_D = -3 \text{ кН} \text{ (значение на правой границе участка);}$$

$$Q(2 \text{ м}) = -R_D = -3 \text{ кН} \text{ (значение на левой границе участка).}$$

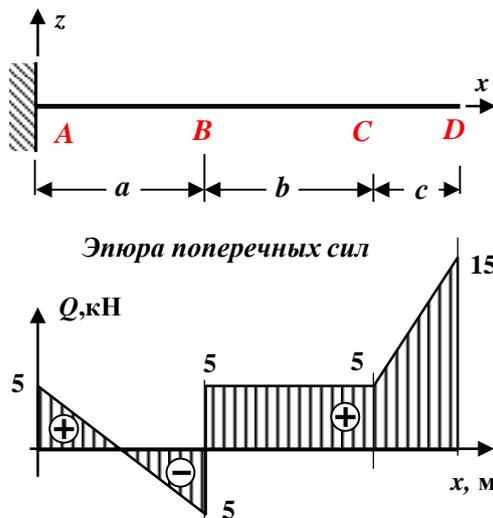
По полученным численным значениям  $Q$  в характерных сечениях балки строим в масштабе эпюру поперечных сил, как показано на рис. 1.38.

Делаем проверки соответствия построенной эпюры  $Q$  заданной эпюре  $M$ .

**В нашей задаче все проверки выполняются, следовательно, внешняя нагрузка, действующая на балку, и эпюра  $Q$  соответствуют заданной эпюре  $M$ .**



**Рис. 1.38. Эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$**

**б). Задана схема балки и эпюра поперечных сил  $Q$** 

**Исходные данные:**

$$a = 2 \text{ м}; \quad b = 2 \text{ м}; \quad c = 1 \text{ м}.$$

**Рис. 1.39. Схема балки и эпюра поперечных сил  $Q$** 
**По заданной схеме балки и эпюре поперечных сил  $Q$  (рис. 1.39) требуется:**

1. Определить внешнюю нагрузку, действующую на статически определимую балку.
2. Построить недостающую эпюру изгибающих моментов  $M$ .

**Решение**
**Определение внешней нагрузки, действующей на статически определимую балку**

- Анализируя заданную эпюру поперечных сил  $Q$  (рис. 1.39) на основании проверок правильности построенных эпюр внутренних силовых факторов для балок, имеем:

- в сечении **A** имеется «скачок» вверх, равный **5 кН**, следовательно, в сечении **A** балки приложена внешняя сосредоточенная сила  **$R_A = 5 \text{ кН}$** , направленная вверх;

- на участке **AB** наклонная вниз прямая, следовательно, на этом участке балки действует внешняя равномерно-распределенная нагрузка интенсивностью  **$q_1$** , направленная вниз, а эпюра изгибающих моментов на этом участке имеет вид параболы, выпуклостью вниз;

- посередине участка **AB** поперечная сила  **$Q = 0$** , следовательно, в этом сечении балки изгибающий момент принимает экстремальное значение, т.е.  **$M = M_{\text{экстр}}$** ;

- в сечении **B** имеется «скачок» вверх, равный **10 кН**, следовательно, в сечении **B** балки приложена внешняя сосредоточенная сила  **$F_1 = 10 \text{ кН}$** , направленная вверх;

- на участке **BC** прямая, параллельная геометрической оси балки, следовательно, на этом участке балки не действует внешняя равномерно-распределенная нагрузка интенсивностью  **$q$** , а эпюра изгибающих моментов на этом участке имеет вид прямой, наклоненной вниз (т.к. на участке  **$Q > 0$** );

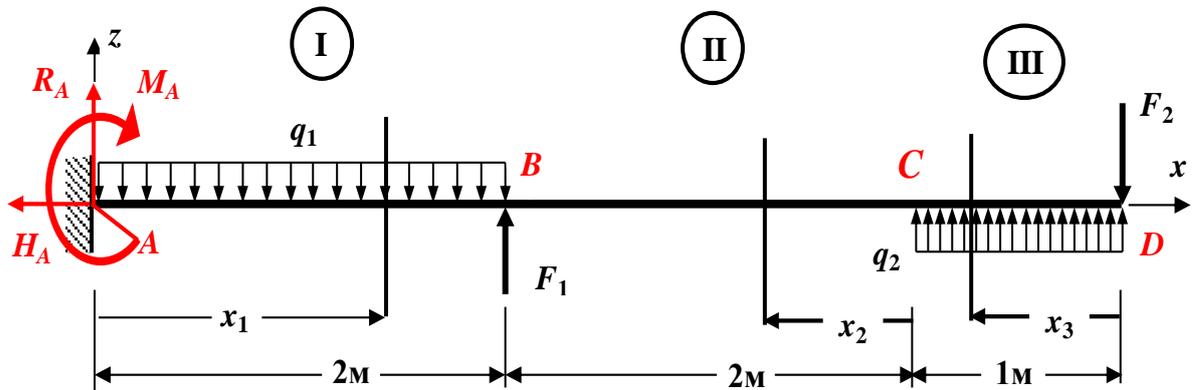
- на участке **CD** наклонная вверх прямая, следовательно, на этом участке балки действует внешняя равномерно-распределенная нагрузка интенсивностью  **$q_2$** , направленная вверх, а эпюра изгибающих моментов на этом участке имеет вид параболы, выпуклостью вверх;

- в сечении **D** имеется «скачок» вниз, равный **15 кН**, следовательно, в сечении **D** балки приложена внешняя сосредоточенная сила  **$F_2 = 15 \text{ кН}$** , направленная вниз;

Показываем всю внешнюю нагрузку ( **$R_A$** ,  **$M_A$** ,  **$q_1$** ,  **$F_1$** ,  **$q_2$**  и  **$F_2$** ) на расчетной схеме балки (рис. 1.40).

- Для определения численных значений  $q_1$  и  $q_2$  составим выражения поперечных сил для участков балки **AB** и **CD**.

**I участок AB:**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{ м}$  (начало отсчета на левой границе участка, рис. 1.40).



**Рис. 1.40. Расчетная схема балки**

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на первом участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные слева от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_1) = R_A - q_1 \cdot x_1.$$

Из эпюры  $Q$  видно, что в сечении **B** (при  $x_1 = 2\text{ м}$ )

$$Q_B = Q(2\text{ м}) = -5\text{ кН}.$$

Следовательно,

$$Q(2\text{ м}) = R_A - q_1 \cdot 2\text{ м} = 5\text{ кН} - q_1 \cdot 2\text{ м} = -5\text{ кН}; \rightarrow q_1 = +5\text{ кН/м}.$$

(Знак  $+$  показывает, что на рис. 1.40 верно указано направление нагрузки интенсивностью  $q_1$ ).

**III участок CD:**  $0 \leq x_3 \leq 1\text{ м}$  (начало отсчета на правой границе участка, рис. 1.40).

Определяем величину поперечной силы  $Q$  на третьем участке. Для этого проектируем все внешние силы, расположенные справа от проведенного сечения, на ось  $z$ , перпендикулярную геометрической оси балки. При этом руководствуемся определением внутреннего силового фактора и правилом знаков.

Составляем выражение для поперечной силы

$$Q(x_3) = F_2 - q_2 \cdot x_3.$$

Из эпюры  $Q$  видно, что в сечении **C** (при  $x_3 = 1\text{ м}$ ):

$$Q_C = Q(1\text{ м}) = +5\text{ кН}.$$

Следовательно,

$$Q(1\text{ м}) = F_2 - q_2 \cdot 1\text{ м} = 15\text{ кН} - q_2 \cdot 1\text{ м} = +5\text{ кН}; \rightarrow q_2 = +10\text{ кН/м}.$$

(Знак  $+$  показывает, что на рис. 1.40 верно указано направление внешней нагрузки интенсивностью  $q_2$ ).

- Для определения численного значения опорного момента  $M_A$  составим для балки уравнение равновесия (статики) в виде:

Сумма моментов всех сил относительно опоры **A** равна нулю

$$\Sigma M_A = 0: -F_2 \cdot 5\text{ м} + q_2 \cdot 1\text{ м} \cdot 4,5\text{ м} + F_1 \cdot 2\text{ м} - q_1 \cdot 2\text{ м} \cdot 1\text{ м} - M_A = 0;$$

$$-15\text{ кН} \cdot 5\text{ м} + 10\text{ кН/м} \cdot 4,5\text{ м}^2 + 10\text{ кН} \cdot 2\text{ м} - 5\text{ кН/м} \cdot (2\text{ м})^2 - M_A = 0;$$

$$M_A = -75 + 45 + 20 - 10 = -20\text{ кНм}; \rightarrow M_A = -20\text{ кНм}.$$

(Знак  $-$  показывает, что на рис. 1.40 неверно указано направление опорного момента  $M_A$ ).

• Для определения численного значения опорной реакции  $H_A$  составим для балки уравнение равновесия (статики) в виде:

Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  равна нулю

$$\Sigma F_x = 0: \rightarrow H_A = 0.$$

Проверяем правильность вычисления внешней нагрузки (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна 0)

$$\Sigma F_z = 0: + R_A - q_1 \cdot 2\text{м} + F_1 + q_2 \cdot 1\text{м} - F_2 = 0$$

$$+ 5 \text{ кН} - 10 \text{ кН} + 10 \text{ кН} + 10 \text{ кН} - 15 \text{ кН} = 0 (\pm 5 \%).$$

### Построение недостающей эпюры изгибающих моментов $M$

Расчетная схема балки имеет три участка ( $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ ), которые пронумеруем слева направо (рис. 1.41).

**I участок  $AB$ :**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{м}$  (начало отсчета на левой границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на первом участке.

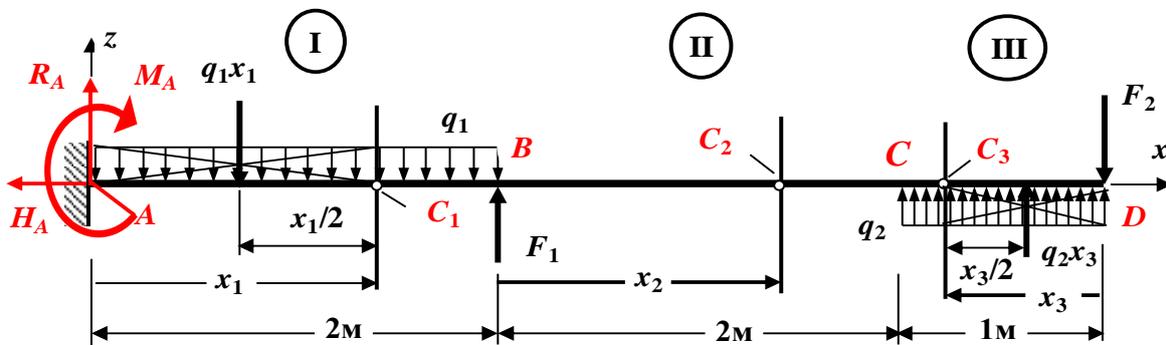


Рис. 1.41. Расчетная схема балки

Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно точки  $C_1$  (центр тяжести проведенного поперечного сечения, рис. 1.41), с учетом правила знаков.

Сосредоточенный момент  $M_A$  направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он положительный; момент силы  $R_A$  / плечо силы  $-x_1$  / направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он также положительный; момент силы  $q_1 \cdot x_1$  / плечо силы  $-\frac{x_1}{2}$  / направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение верхних волокон балки), поэтому он отрицательный

$$M(x_1) = + M_A + R_A \cdot x_1 - q_1 \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = + (-20 \text{ кНм}) + 5 \text{ кН} \cdot x_1 - 5 \text{ кН/м} \cdot \frac{x_1^2}{2};$$

$$M(x_1) = + (-20 \text{ кНм}) + 5 \text{ кН} \cdot x_1 - 2,5 \text{ кН/м} \cdot x_1^2.$$

Изгибающий момент  $M$  на первом участке является квадратичной функцией координаты  $x_1$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка и в точке, где  $Q = 0$ , т.е.  $x_0 = 1,0 \text{ м}$ .

$M(0) = + (-20 \text{ кНм}) + 5 \text{ кН} \cdot 0 - 2,5 \text{ кН/м} \cdot 0^2 = -20 \text{ кНм}$  (значение на левой границе участка);

$M(1\text{м}) = + (-20 \text{ кНм}) + 5 \text{ кН} \cdot 1\text{м} - 2,5 \text{ кН/м} \cdot (1\text{м})^2 = -17,5 \text{ кНм}$  (значение в сечении  $x_0 = 1,0 \text{ м}$ );

$M(2\text{м}) = + (-20 \text{ кНм}) + 5 \text{ кН} \cdot 2\text{м} - 2,5 \text{ кН/м} \cdot (2\text{м})^2 = -20 \text{ кНм}$  (значение на правой границе участка).

**II участок ВС:**  $0 \leq x_2 \leq 2\text{ м}$  (начало отсчета на левой границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на втором участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных слева от проведенного сечения, относительно точки  $C_2$  (центр тяжести проведенного поперечного сечения, рис. 1.41), с учетом правила знаков.

Сосредоточенный момент  $M_A$  направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он **положительный**; момент силы  $R_A$  /плечо силы  $-(x_2 + 2)$ / направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он также **положительный**; момент силы  $q_1 \cdot 2$ /плечо силы  $-(x_2 + 1)$ / направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение верхних волокон балки), поэтому он **отрицательный**; момент силы  $F_1$  /плечо силы  $-x_2$ / направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон балки), поэтому он **положительный**



$$M(x_2) = + M_A + R_A \cdot (x_2 + 2) - q_1 \cdot 2 \cdot (x_2 + 1) + F_1 \cdot x_2;$$

$$M(x_2) = + (-20\text{ кНм}) + 5\text{ кН} \cdot (x_2 + 2) - 10\text{ кН} \cdot (x_2 + 1) + 10\text{ кН} \cdot x_2.$$

Изгибающий момент  $M$  на втором участке балки является линейной функцией координаты  $x_2$ . Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах этого участка

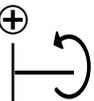
$M(0) = + (-20\text{ кНм}) + 5\text{ кН} \cdot 2\text{ м} - 10\text{ кН} \cdot 1\text{ м} = -20\text{ кНм}$  (значение на левой границе участка);

$M(2\text{ м}) = + (-20\text{ кНм}) + 5\text{ кН} \cdot 4\text{ м} - 10\text{ кН} \cdot 3\text{ м} + 10\text{ кН} \cdot 2\text{ м} = -10\text{ кНм}$  (значение на правой границе участка).

**III участок DC:**  $0 \leq x_3 \leq 1\text{ м}$  (начало отсчета на правой границе участка).

Определяем величину изгибающего момента  $M$  на третьем участке. Для этого вычисляем моменты всех сил, расположенных справа от сечения, относительно точки  $C_3$  /центр тяжести проведенного поперечного сечения, рис. 1.41/ с учетом правила знаков.

Момент силы  $F_2$  (плечо силы  $-x_3$ ) направлен по ходу часовой стрелки (он вызывает растяжение верхних волокон), поэтому он **отрицательный**, а момент силы  $q_2 \cdot x_3$  (плечо силы  $-x_3/2$ ) направлен против хода часовой стрелки (он вызывает растяжение нижних волокон), поэтому он **положительный**



$$M(x_3) = - F_2 \cdot x_3 + q_2 \cdot x_3 \cdot \frac{x_3}{2};$$

$$M(x_3) = - 15\text{ кН} \cdot x_3 + 5\text{ кН/м} \cdot (x_3)^2.$$

Изгибающий момент  $M$  на третьем участке является квадратичной функцией координаты  $x_3$ .

Для построения его графика определяем значение изгибающего момента на границах участка и в его середине ( $x_3 = 0,5\text{ м}$ )

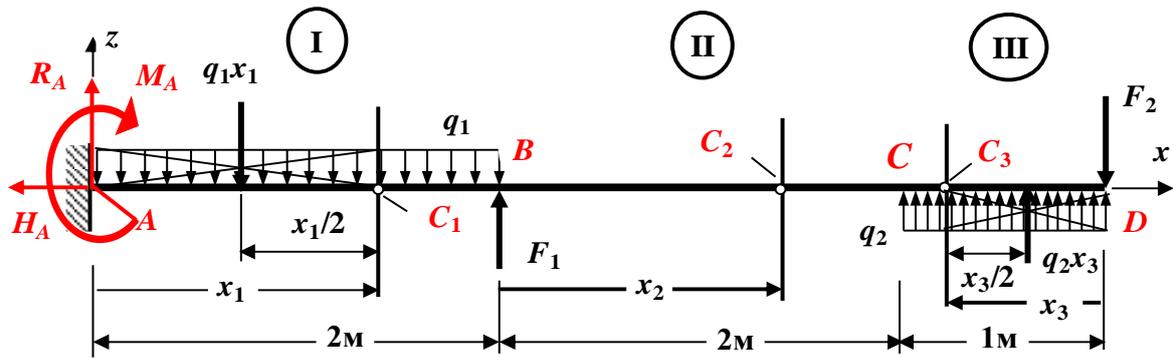
$M(0) = - 15\text{ кН} \cdot 0 + 5\text{ кН/м} \cdot (0)^2 = 0\text{ кНм}$  (значение на правой границе участка);

$M(0,5\text{ м}) = - 15\text{ кН} \cdot 0,5\text{ м} + 5\text{ кН/м} \cdot (0,5\text{ м})^2 = - 6,25\text{ кНм}$  (значение в сечении  $x_3 = 0,5\text{ м}$ );

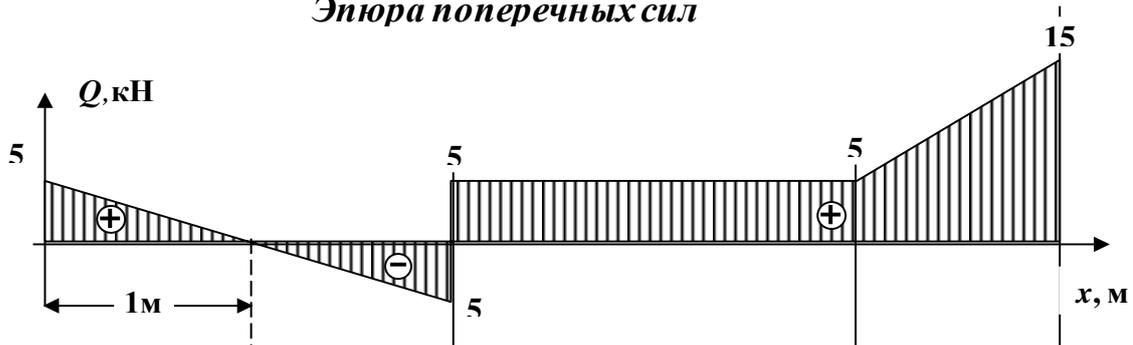
$M(1\text{ м}) = - 15\text{ кН} \cdot 1\text{ м} + 5\text{ кН/м} \cdot (1\text{ м})^2 = - 10,0\text{ кНм}$  (значение на левой границе участка).

По полученным численным значениям  $M$  в характерных сечениях балки строим в масштабе эпюру изгибающих моментов, расположив ее под заданной эпюрой поперечных сил, как показано на рис. 1.42.

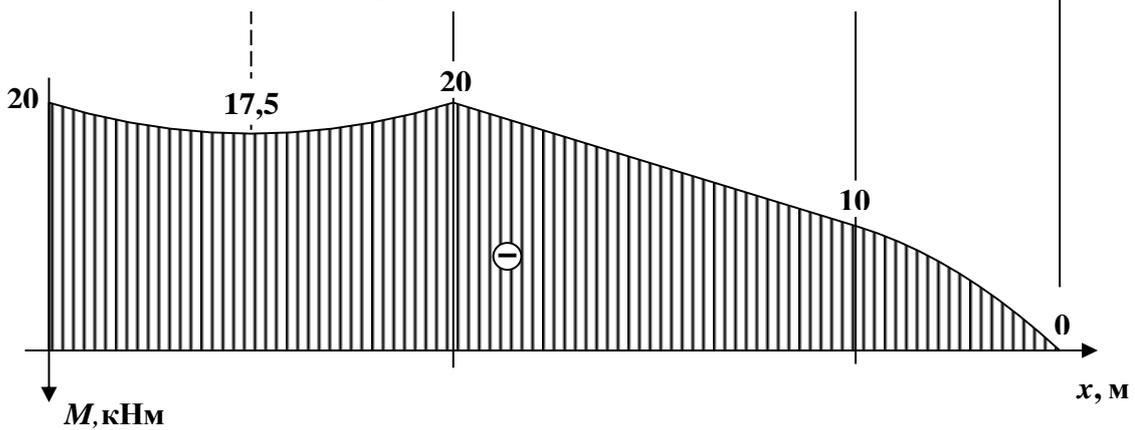
Делаем проверки соответствия построенной эпюры  $M$  заданной эпюре  $Q$ .



*Эпюра поперечных сил*



*Эпюра изгибающих моментов*



**Рис. 1.42. Эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$**

**В нашей задаче все проверки выполняются, следовательно, внешняя нагрузка, действующая на балку, и эпюра  $M$  соответствуют заданной эпюре  $Q$ .**

### РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тимофеев С.И. Сопротивление материалов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2014.
2. Александров А.В., Потапов В.Д. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2011.
3. Варданян Г.С., Атаров Н.М. Сопротивление материалов: С основами строительной механики. – М.: ИНФРА-М, 2011.
4. Степин П.А. Сопротивление материалов. – СПб.: Лань, 2010.
5. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – СПб.: Лань, 2005.
6. Копнов В.А., Кривошапко С.Н. Сопротивление материалов: Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ. – М.: Высшая школа, 2003.



## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

*Образец оформления  
титального листа расчетно - графической работы*

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Кафедра «Сопротивление материалов»**

**РАСЧЕТНО – ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА**  
**по сопротивлению материалов**  
**на тему**  
**«Построение эпюр внутренних силовых факторов**  
**в балках и в плоских рамах»**

**Выполнил студент группы \_\_\_\_\_**

\_\_\_\_\_  
(Ф.И.О.)

**Принял \_\_\_\_\_**

\_\_\_\_\_  
(Ф.И.О.)

**Ростов – на – Дону**  
**2017 год**