



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Сопротивление материалов»

Методические указания
по выполнению расчетно-графической
работы по дисциплине
«Теория расчета пластин и оболочек»

**«Расчет сферического купола
на собственный вес с учетом
краевого эффекта»**

Авторы
Демченко Д.Б.,
Маяцкая И.А.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Методические указания предназначены для проведения практической работы по дисциплине «Теория расчета пластин и оболочек» для обучающихся по техническим направлениям подготовки (специальностям).

Настоящие методические указания включают основные теоретические положения и пример выполнения задания расчетно-графической работы для студентов, изучающих курс «Теория расчета пластин и оболочек».

Авторы

к.т.н., доцент кафедры
«Соппротивление материалов»
Демченко Д.Б.

к.т.н., доцент кафедры
«Соппротивление материалов»
Маяцкая И.А.



Оглавление

Общие положения.	4
1. Некоторые сведения из теории поверхностей.	6
2. ТЕОРИЯ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК. ПУТИ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК.	13
3. БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК.	16
3.1 Безмоментное напряженное состояние.	16
3.2 Основные уравнения безмоментной теории оболочек.	17
3.3 Общие уравнения безмоментной теории оболочек вращения.	18
3.4 Осесимметричная задача оболочек вращения. .	20
4. Расчет оболочки вращения на осесимметричную нагрузку по моментной теории.....	27
4.1 Краевой эффект.	27
4.2 Порядок расчета оболочки вращения при действии осесимметричной нагрузки с учетом краевых эффектов.....	29
4.3 Основные уравнения теории краевого эффекта.	29
4.4 Краевой эффект в сферической оболочке.	31
4.5 Определение произвольных постоянных из граничных условий.	34
5. Пример расчета.....	38
6. Конструктивные мероприятия.....	57
Библиографический список.....	58

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ.

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми (толщина оболочки) мало по сравнению с прочими размерами тела.

Поверхность равноотстоящая от наружного и внутреннего контура оболочки, называется срединной поверхностью.

В основе теории оболочек лежат две гипотезы.

Гипотеза 1. Прямолинейный элемент, нормальный к срединной поверхности оболочки до деформации, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности деформированной оболочки и не изменяет своей длины (гипотеза Кирхгофа–Лява, гипотеза прямых нормалей).

Гипотеза 2. Нормальные напряжения, действующие на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, пренебрежимо малы по сравнению с другими напряжениями (принимаются равными нулю).

Первую гипотезу называют, так же как и в пластинах, *гипотезой прямой нормали*, а вторую гипотезу – гипотезой о *не надавливании слоев оболочки*.

Гипотеза прямой нормали дает возможность выразить деформации в любой точке оболочки через деформации ее срединной поверхности, которые зависят от двух координат α и β , и таким образом свести решение трехмерной задачи теории упругости к двумерной. Деформации же любой поверхности, находящейся на одинаковых расстояниях от срединной поверхности, описываются посредством *параметров деформации* срединной поверхности.

Принятие гипотез намного упрощает расчет по сравнению со строго постановкой в теории сред, в частности, в теории упругости и вместе с тем обеспечивается достаточная точность.

По схеме построения и точности результатов теория оболочек, основанная на использовании принятых гипотез, аналогична *технической теории* стержней в сопротивлении материалов, вследствие чего такую теорию оболочек называют тоже *технической теорией*.

Оболочки, в которых применимы упомянутые гипотезы, называются *тонкими*, а те, в которых эти гипотезы не применимы – *толстыми*.

Граница между тонкими и толстыми оболочками условна и обычно определяется отношением $(h/R)_{\max} \approx 1/20$, где h –

толщина оболочки, R – радиус кривизны срединной поверхности.

Поддавливающее же большинство оболочек имеют параметр h/R намного меньший, чем $1/20$.

В теории тонких оболочек всеми членами, имеющими порядок (h/R) , пренебрегают по сравнению с единицей.

В результате упрощения все функции, характеризующие напряженно-деформированное состояние оболочки, оказываются функциями двух координат точек срединной поверхности.

В большинстве случаев уравнения равновесия допустимо составлять, не учитывая деформации элемента оболочки. В этом случае они будут линейными, а зависимости между перемещениями и параметрами деформаций – линеаризованными. Такой вариант теории оболочек называется *геометрически линейной теорией*.

Одним из признаков допустимости применения геометрически линейной теории оболочек является достаточная малость перемещений.

Материал оболочек подчиняется закону Гука, т. е. имеет место физическая линейность

В теории оболочек используют раздел математики «*Теория кривых и поверхностей*», где изучаются свойства, присущие *вообще кривой* или *поверхности* независимо от их вида, изучается в дифференциальной геометрии.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

Рассматриваются оболочки постоянной толщины h . В этом случае геометрия оболочки будет полностью определена, если заданы форма срединной поверхности, толщина оболочки и граничный контур.

Проведем в некоторой точке M нормаль к поверхности (рис. 1.1). Под словом поверхность будем понимать срединную поверхность оболочки.

Нормальным сечением в некоторой точке M называется сечение плоскостью, содержащей нормаль к поверхности в этой точке. Сечение это является некоторой кривой линией на поверхности оболочки.

В дифференциальной геометрии поверхностей доказано, что в любой точке M поверхности можно указать два ортогональных (взаимно перпендикулярных) направления, для которых нормаль к поверхности, проведенная в соседней точке, пересекает нормаль в точке M . На рис. 1.1 эти направления обозначены цифрами 1 и 2.

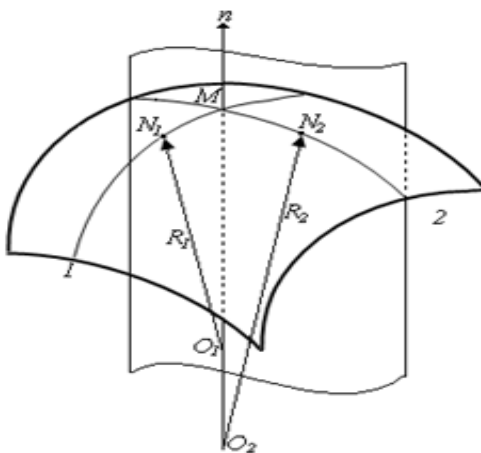


Рис. 1.1

Линии на поверхности, проведенные вдоль этих направлений, представляют собою два семейства ортогональных линий, называемых *линиями кривизны*. Через любую заданную точку M проходит одна кривая каждого семейства.

Рассмотрим некоторую точку M и бесконечно близкую к ней точку N_1 , лежащую на линии кривизны 1. Проведем нормали к поверхности в этих точках. Точка пересечения этих нормалей O_1 называется *центром кривизны* первого главного нормального сечения поверхности в точке M .

Расстояние от центра кривизны до точки M называется *главным радиусом* R_1 кривизны поверхности в точке M вдоль линии 1, а величина, обратная главному радиусу кривизны, называется *главной кривизной* в этой точке.

Рассмотрим снова точку M и бесконечно близкую к ней точку N_2 , лежащую на линии кривизны 2. Проведем нормали к поверхности в этих точках. Точка пересечения этих нормалей O_2 также называется *центром кривизны* второго главного нормального сечения поверхности в точке M . Расстояние от центра кривизны до точки M называется *главным радиусом* R_2 кривизны поверхности в точке M вдоль линии 2, а величина, обратная главному радиусу кривизны, называется *главной кривизной* в этой точке.

В дифференциальной геометрии поверхностей доказываются, что главным направлениям в точке M соответствуют главные кривизны, одна из которых является *максимальной*, а другая – *минимальной* по отношению к кривизнам всех линий, проходящих через данную точку.

Положение произвольной точки на поверхности оболочки может быть определено пересечением двух линий на поверхности – двух криволинейных координат, за которые обычно принимают линии главных кривизн для недеформированной поверхности оболочки.

Положение точки на поверхности определяется двумя характерными параметрами (рис. 1.2).

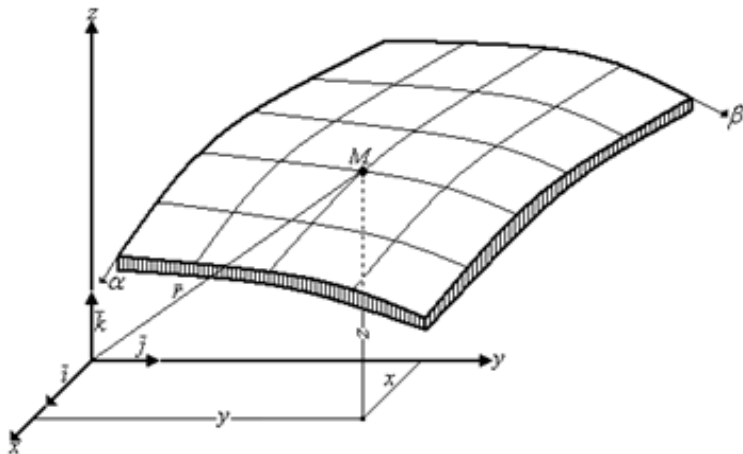


Рис. 1.2

В зависимости от выбора этих параметров, которые обозначим α и β , будем иметь ту или иную систему криволинейных координат.

Уравнение поверхности может быть записано в декартовых координатах тремя соотношениями:

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad z = z(\alpha, \beta), \quad (1.1)$$

или одним *векторным* уравнением

$$\vec{r}(\alpha, \beta) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad (1.2)$$

где: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы неподвижной системы координат (рис.1.2);

$\vec{r}(\alpha, \beta)$ – радиус-вектор точки поверхности.

Для получения общей геометрической характеристики произвольной поверхности, рассмотрим бесконечно малый ее элемент, выделенный около некоторой точки **M** четырьмя координатными линиями (рис. 1.3).

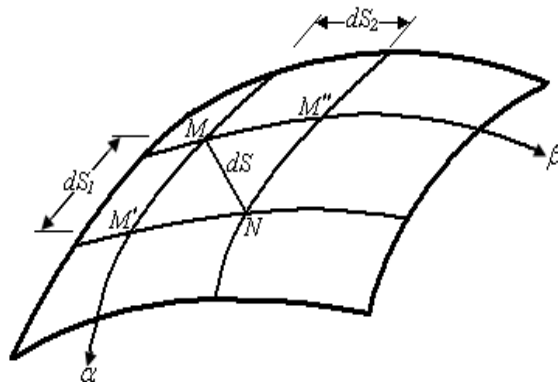


Рис. 1.3

Точка **N** отстоит от заданной точки **M** на бесконечно малом расстоянии dS по поверхности. Этот бесконечно малый отрезок в теории поверхностей называется *линейным элементом*. Линеаризация в малом является обычным методом решения физической задачи с помощью дифференциального исчисления: сложные зависимости принимаются линейными, бесконечно малые отрезки кривых представляются отрезками прямых.

Квадрат линейного бесконечно малого элемента в ортогональной системе координат равен $ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2$, где ds_1 и ds_2 линейные элементы, соответствующие приращениям криволинейных координат α и β . Элементы ds_1 и ds_2 будут при этом пропорциональны дифференциалам независимых переменных $ds_1 = A \cdot d\alpha$; $ds_2 = B \cdot d\beta$. A и B можно рассматривать как некоторые коэффициенты искажения, преобразующие приращения криволинейных координат в линейные отрезки. Выражение для квадрата линейного элемента dS примет вид

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2. \quad (1.3)$$

Выражение (1.3) называется *первой квадратичной формой поверхности* в ортогональных координатах α, β ; A и B – коэффициенты этой формы.

Линейный элемент поверхности можно представить

как приращение вектора \bar{r} при переходе из точки M в точку N .

$$d\bar{r} = ds = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta} d\beta.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат и учитывая, что векторы $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta}$ в каждой точке поверхности являются касательными соответственно к ортогональным линиям α и β (их произведение равно нулю), получим:

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta} \right)^2 d\beta^2. \quad (1.4)$$

Сравнивая (1.4) с (1.3), можно заключить, что $A = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha}$, $B = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta}$.

На основании (1.2) можно записать формулы для определения A и B :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2} \\ B &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right)^2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Эти коэффициенты в общем случае произвольной поверхности являются функциями координат α и β .

Рассмотрим срединную поверхность широко применяемых в технике оболочек, образованную вращением произвольной кривой относительно некоторой оси Oz (рис. 1.4). Главными линиями кривизны являются меридианы и параллели, образующие так называемую географическую сетку. Эти линии принимаются за криволинейные координаты. Следовательно, сеть координатных

линий есть сеть линий главных кривизн. Задать положение этих линий можно различным образом.

Примем за основные параметры $\alpha = z$ – расстояние по вертикали, отсчитываемое от точки O , и $\beta = \theta$ – угол между двумя вертикальными плоскостями, проходящими через ось Oz : начальной – OCD_0 и плоскостью OCD . Каждому значению $z = const$ будет соответствовать некоторая параллель, а углу $\theta = const$ – меридиан. Их пересечение определяет положение точки M . Выбранная система координат (z, α, r) называется *цилиндрической*.

Положение главных линий кривизны в сферической системе координат для тех же оболочек определяется двумя параметрами: углом φ , которому соответствует некоторая параллель, и углом θ , характеризующим положение меридиана (рис. 1.4).

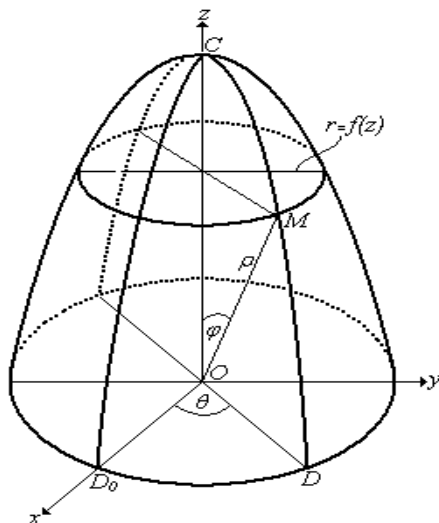


Рис. 1.4

Значения коэффициентов первой квадратичной формы в цилиндрической системе координат для оболочки вращения оказываются равными:

$$A = \sqrt{1 + (dr/dz)^2}, \quad B = r, \quad (1.6)$$

а в сферической системе координат

$$A = r / \sin \varphi, \quad B = r. \quad (1.7)$$

Кривизны координатных линий α и β будем обозначать в дальнейшем k_1 и k_2 , а соответствующие радиусы кривизны – R_1 и R_2 .

Формы оболочек можно квалифицировать по их гауссовой кривизне. *Гауссовой кривизной поверхности оболочки* называется *произведение главных кривизн*:

$$k = k_1 \cdot k_2. \quad (1.8)$$

Первый класс объединяет оболочки нулевой гауссовой кривизны (оболочки у которых кривизна в направлении одной из координат равна нулю) – цилиндрические и конические поверхности.

Ко второму классу относятся разнообразные поверхности двоякой кривизны: положительной гауссовой кривизны (выпуклые); отрицательной гауссовой кривизны (вогнуто-выпуклые).

Оболочки вращения могут быть как положительной, так и отрицательной гауссовой кривизны.

2. ТЕОРИЯ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК. ПУТИ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК.

При исследовании рассматривается равновесие элемента оболочки произвольной формы, заданной в системе координат α, β, z (рис. 2.1).

Внешнюю нагрузку считаем произвольной, непрерывно распределенной по поверхности оболочки. Проекции интенсивности распределенной нагрузки на направления x, y, z , совпадающие с направлениями касательных к координатным линиям α, β, z в точке O (рис. 2.1), обозначим соответственно p_1, p_2 и p_3 . Эти составляющие нагрузки – произвольные непрерывные функции независимых переменных α и β .

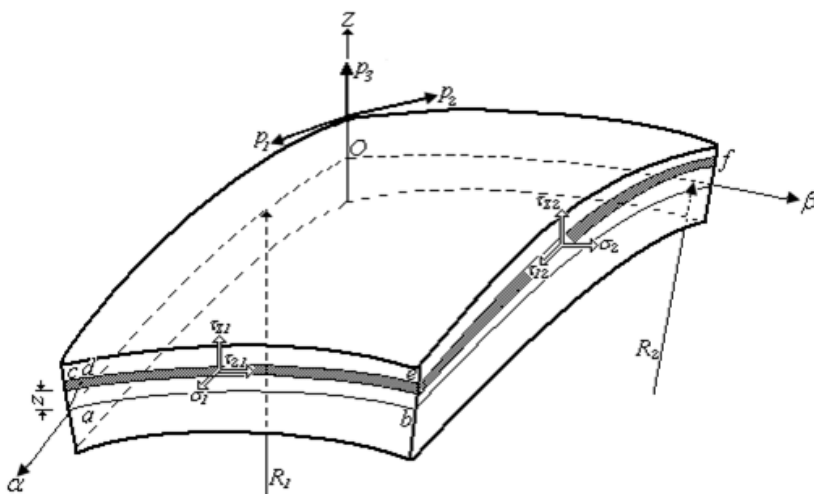


Рис. 2.1

Для исследования распределения внутренних усилий выделяется из оболочки нормальными плоскостями $\alpha = const$, $\alpha + d\alpha = const$, $\beta = const$, $\beta + d\beta = const$ бесконечно малый элемент (рис. 2.1).

Здесь: σ_1 – нормальное напряжение на грани $\alpha = const$,

σ_2 – нормальное напряжение на грани $\beta = const$, $\tau_{12} = \tau_{21}$ – касательные напряжения соответственно на гранях $\beta = const$ и $\alpha = const$, направленные по касательной к линии кривизны, τ_{z1} и τ_{z2} – касательные напряжения, направленные по нормали к поверхности оболочки. Положительные направления напряжений показаны на *рис. 2.1*. Длины сторон выделенного элемента на уровне срединной поверхности, согласно (1.18), равны: $ds_1 = Ad\alpha$ и $ds_2 = Bd\beta$

Главные радиусы кривизны в окрестности точки O равны R_1 и R_2 .

При этом, напряжения на каждой грани могут быть сведены к статически эквивалентным равнодействующим усилиям: силам и моментам (*рис. 2.2*).

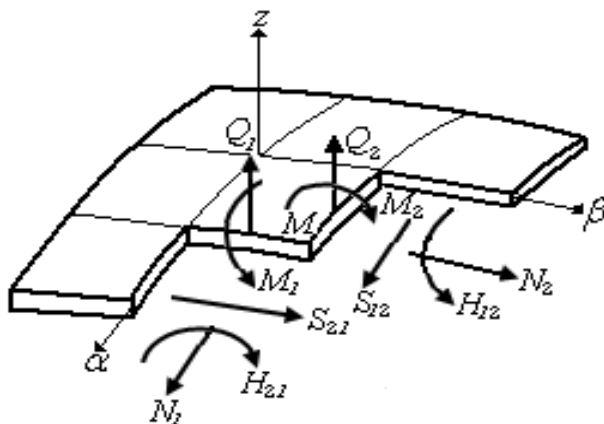


Рис. 2.2

Статические, геометрические и физические соотношения, в совокупности, приводят к системе 17 уравнений, из которых можно вывести системы разрешающих уравнений.

Как и при рассмотрении пространственной задачи теории упругости, имеются два основных пути решения – *решение в усилиях* (в теории упругости – в напряжениях) и *решение в перемещениях*.

Первый классический путь решения проблемы теории оболочек состоит в отыскании в первую очередь усилий и мо-

ментов. Разрешающей системой уравнений в этом случае является система уравнений равновесия и система уравнений совместности деформаций, выраженных через усилия и моменты. *Уравнения совместности деформаций, выраженные через усилия и моменты*, являются аналогом *уравнений Бельтрами – Мичела* в теории упругости. В результате получаем разрешающую систему уравнений, содержащую шесть уравнений относительно шести неизвестных N_1, N_2, M_1, M_2, S и H .

Второй классический путь решения проблемы теории оболочек состоит в отыскании сначала перемещений точек срединной поверхности, т. е. в отыскании функций u, v и w . Разрешающие уравнения в этом случае выражают, и условия равновесия и условия совместности деформаций применительно к оболочке, материал которой подчиняется закону Гука. Они являются аналогом уравнений Ламе в теории упругости.

Разрешающие системы уравнений, полученные в каждом из основных путей решения проблемы теории оболочек, оказываются очень сложными. Этим и объясняется стремление к упрощению уравнений посредством пренебрежения некоторыми величинами. Одним из таких упрощений является безмоментная теория оболочек.

3. БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК.

3.1 Безмоментное напряженное состояние.

Безмоментная теория оболочек представляет собой упрощенный вариант общей теории, в котором пренебрегается влиянием изгибающих и крутящих моментов и связанных с ними поперечных сил (рис. 2.2) на напряженно-деформированное состояние оболочки.

Напряженное состояние, характеризуемое лишь нормальными и сдвигающими силами, действующими в плоскостях, касательных к срединной поверхности оболочки, называется *безмоментным напряженным состоянием* (например, полая сферическая оболочка, находящаяся под действием внутреннего или внешнего равномерных давлений).

Усилия этого напряженного состояния показаны на рис. 3.1.

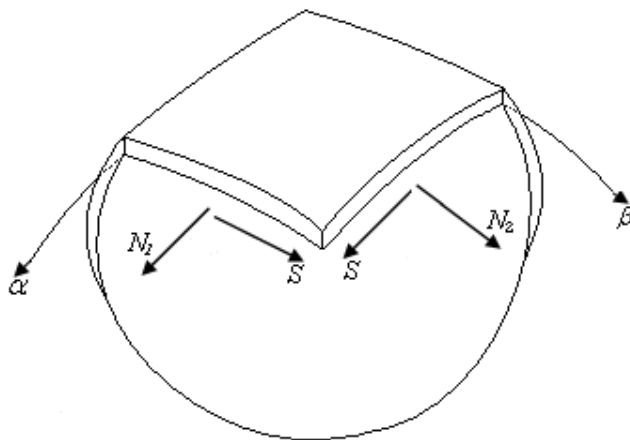


Рис. 3.1

Соответствующая теория носит название *безмоментной теории оболочек*.

В ряде случаев напряженно-деформированное состояние таково, что изгибающие и крутящие моменты локализуются в непосредственной близости от краев оболочки (краевой эффект), а в остальной части оболочки имеет место практически безмоментное напряженное состояние. В этих случаях представляется возможным изображать напряженно-деформированное состояние

в виде суммы двух слагаемых – безмоментного и краевого эффекта.

Краевой эффект – это специфическое явление, обнаруживаемое лишь в тонких оболочках. Он обусловлен двумя факторами – искривленностью срединной поверхности и малостью толщины оболочки.

Условия существования безмоментного напряженного состояния сводятся к следующим требованиям:

а) форма оболочки должна характеризоваться плавностью срединной поверхности, отсутствием в ней изломов, острых вершин, скачкообразных изменений радиусов кривизны. Изменение толщины оболочки должно быть плавным. Оболочка не должна подкрепляться ребрами;

б) условия закрепления краев оболочки должны быть такими, чтобы они имели возможность свободно перемещаться в направлении нормали к поверхности. Граничные закрепления должны обеспечивать жесткость (неизменяемость) формы оболочки;

в) нагрузка прикладываемая к оболочке, должна быть плавной. Не должно быть сосредоточенных сил и скачков в распределенной нагрузке.

К краям оболочки не должны быть приложены изгибающие или крутящие моменты, а также поперечные силы.

3.2 Основные уравнения безмоментной теории оболочек.

При выполнении условий существования безмоментного напряженного состояния, расчет оболочек можно вести, полагая, что моменты и поперечные силы равны нулю:

$$M_1 = M_2 = H = Q_1 = Q_2 = 0. \quad (3.1)$$

Усилия безмоментного напряженного состояния показаны на *рис. 3.1*.

Уравнения равновесия принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_1) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} (A^2 S) + Q_1 k_1 AB + AB p_1 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (AN_2) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B^2 S) + Q_2 k_2 AB + AB p_2 = 0 \quad ; (3.2)$$

$$k_1 N_1 + k_2 N_2 - p_3 = 0. \rightarrow \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - p_3 = 0.$$

Получили три уравнения равновесия с тремя неизвестными функциями N_1 , N_2 и S . Следовательно, безмоментное напряженное состояние является в бесконечно малом статически определимым. Если внешняя нагрузка и находящиеся с ней в равновесии реакции опор известны, то напряженное состояние оболочки однозначно определяется системой уравнений (3.2).

Задача об определении перемещений точек срединной поверхности оболочки решается после нахождения усилий. При известных усилиях N_1 , N_2 и S упругие перемещения определяются из системы уравнений, которая получается при совместном рассмотрении геометрических и физических уравнений теории упругих оболочек:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{Eh} (N_1 - \mu N_2); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} (N_2 - \mu N_1); \\ \gamma &= \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) = \frac{1}{Gh} S. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

3.3 Общие уравнения безмоментной теории оболочек вращения.

На *рис. 3.2* показан элемент произвольной оболочки вращения, заданной в сферической системе координат (φ, θ) , т. е. в качестве криволинейных координат приняты $\alpha = \varphi$ и $\beta = \theta$. Здесь под φ подразумевается координата точки срединной поверхности, а не угол поворота нормали.

Из *рис. 3.2, а, б* можно установить, что

$$r = R_2 \sin \varphi, \quad ab = ds_2 = rd\theta, \quad ad = ds_1 = R_1 d\varphi$$

Согласно (1.18), коэффициенты Ламе равны:

$$A = R_1, \quad B = r, \quad (3.4)$$

где R_1 – радиус кривизны меридиана;

R_2 – длина нормали к поверхности оболочки (радиус кривизны широты);

r – радиус параллельного круга.

Коэффициенты первой квадратичной формы A и B являются функциями координат φ и не зависят от θ ввиду симметрии формы оболочки.

Уравнения равновесия (3.2) в этом случае принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(rN_1)}{\partial\varphi} - N_2 \frac{\partial r}{\partial\varphi} + R_1 \frac{\partial S}{\partial\theta} + R_1 r p_1 &= 0; & R_1 \frac{\partial N_2}{\partial\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2 S) + R_1 r p_2 &= 0; \\ k_1 N_1 + k_2 N_2 - p_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

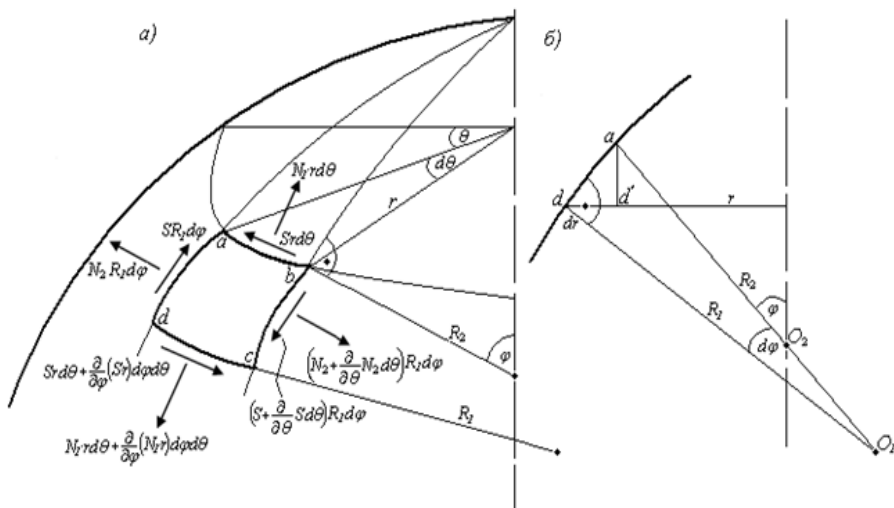


Рис. 3.2

Непосредственно из рис. 3.2,б можно определить, что

$$d'd = \frac{dr}{d\varphi} d\varphi \approx ad \cdot \cos \varphi = R_1 d\varphi \cos \varphi,$$

$$\text{т. е.} \quad \frac{dr}{d\varphi} = R_1 \cos \varphi. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.5), получим уравнения равновесия в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad R_1 \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{\partial(rN_1)}{\partial \varphi} - N_2 R_1 \cos \varphi + rR_1 p_1 &= 0; \\ б) \quad R_1 \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^2 S) + rR_1 p_2 &= 0; \\ в) \quad \frac{1}{R_1} N_1 + \frac{1}{R_2} N_2 &= p_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

3.4 Осесимметричная задача оболочек вращения.

Рассмотрим оболочку вращения на действие нагрузки, симметричную относительно оси Oz (собственный вес, равномерная снеговая нагрузка и т. п).

В этом случае система уравнений (3.7) значительно упрощается. Все производные по θ обращаются в нуль, так как нагрузка, а, следовательно, и внутренние усилия не изменяются в круговом направлении.

Отсутствует также составляющая внешней нагрузки p_2 , так как ее наличие означало бы, что оболочка скручивается силами p_2 . При отсутствии скручивающих сил $p_2 \rightarrow S=0$.

Таким образом, в случае осесимметричной нагрузки уравнение (3.7,б) тождественно удовлетворяется.

После элементарных преобразований уравнений (3.7,а) и (3.7,в), имеем:

$$\frac{d}{d\varphi} (rN_1 \sin \varphi) + rR_1 (p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) = 0.$$

Интегрируя в пределах от $\varphi_{вк}$ до φ , получим:

$$rN_1 \sin \varphi = - \int_{\varphi_{вк}}^{\varphi} rR_1 (p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) d\varphi + C. \quad (3.9)$$

Из выражения (3.9) после интегрирования определяем N_1 . Произвольную постоянную C находим из граничных условий. После нахождения N_1 можно найти N_2 из уравнения (3.7,в).

Интеграл (3.9) получает простой физический смысл, если левую и правую части выражения умножить на 2π :

$$N_1 \sin \varphi \cdot r(2\pi) = -2\pi \int_{\varphi_{вк}}^{\varphi} rR_1 (p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) d\varphi + 2\pi C \quad (3.10)$$

Здесь (рис. 3.3): $N_1 \sin \varphi$ – вертикальная составляющая меридионального усилия, действующего на уровне параллельного круга, определяемого углом φ , т. е., левая часть выражения (3.10) представляет собою равнодействующую всех нормальных усилий N_1 на круге, соответствующем углу φ ; $2\pi r R_1 d\varphi$ – площадь элементарного кольца, соответствующего бесконечно малому углу $d\varphi$; $p_1 \sin \varphi$ и $p_3 \cos \varphi$ – вертикальные составляющие компонентов нагрузки.

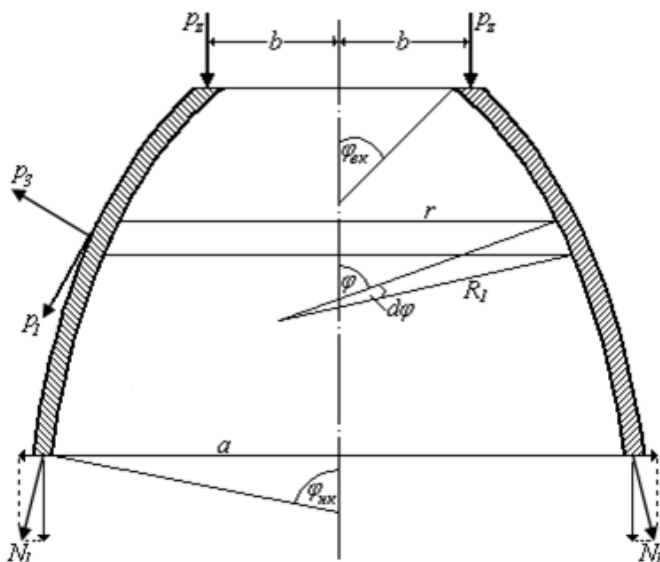


Рис. 3.3

Следовательно, подынтегральная функция в уравнении (3.10) представляет собою вертикальную составляющую нагрузки, соответствующую некоторому элементарному кольцу.

Интегрируя по φ , получаем полную вертикальную составляющую всей нагрузки, действующей на оболочку выше параллели, где определяется N_1 .

Таким образом, уравнение (3.10) выражает условие равновесия $\sum z = 0$ в целом, части оболочки, ограниченной снизу текущей параллелью.

Член $2\pi C$, т. е. постоянная интегрирования, имеет ту же природу, что и член $N_1 \sin \varphi \cdot r(2\pi)$, но относится к параллели, соответствующей нижнему пределу интегрирования. Если нижний предел интегрирования $\varphi_{\text{вк}} = 0$, т. е. у полюса оболочки нет выреза, то $C=0$; при наличии выреза (рис. 3.3) $C=-bp_z$.

Рассмотрим случай оболочки вращения, имеющей круговой вырез у вершины, определяемый углом $\varphi_{\text{вк}}$ (рис. 3.3).

Если край этого выреза загружен равномерно распределенной по параллели нагрузкой с интенсивностью p_z , то вертикаль-

ная результирующая этой нагрузки составит $2\pi b p_z$ и уравнение (3.10) примет вид:

$$N_1 \sin \varphi \cdot 2\pi r = -2\pi \int_{\varphi_{вк}}^{\varphi} r R_1 (p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) d\varphi - 2\pi b p_z.$$

Отсюда

$$N_1 = -\frac{1}{r \sin \varphi} \left[\int_{\varphi_{вк}}^{\varphi} r R_1 (p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) d\varphi + b p_z \right]. \quad (3.11)$$

Определив N_1 из уравнения (3.11), вычисляем значение N_2 по формуле, полученной из уравнения (3.7,в):

$$N_2 = R_2 \left(p_3 - \frac{N_1}{R_1} \right) = p_3 R_2 - \frac{R_2}{R_1} N_1. \quad (3.12)$$

Для сферической оболочки с круговым вырезом на действие собственного веса имеем:

$$R_1 = R_2 = R, \quad r = R \sin \varphi, \quad p_1 = q \sin \varphi, \quad p_3 = -q \cos \varphi, \quad p_z \neq 0$$

где q – собственный вес, отнесенный к единице площади поверхности оболочки.

Подставив эти значения в (3.11) и (3.12), получим:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{\sin^2 \varphi R} \left[\int_{\varphi_{вк}}^{\varphi} r R_1 (q \sin^2 \varphi + q \cos^2 \varphi) d\varphi + b p_z \right] = \\ &= -\frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[q R \int_{\varphi_{вк}}^{\varphi} \sin \varphi d\varphi + \frac{b}{R} p_z \right]. \end{aligned}$$

или

$$N_1 = -\frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[qR \int_{\varphi_{\text{вк}}}^{\varphi} (-\cos \varphi) d\varphi + \frac{b}{R} p_z \right] =$$

$$= -\frac{qR(\cos \varphi_{\text{вк}} - \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi} - \frac{b}{R \sin^2 \varphi} p_z \quad (3.13)$$

$$N_2 = -qR \cos \varphi + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[qR(\cos \varphi_{\text{вк}} - \cos \varphi) + \frac{b}{R} p_z \right] \quad (3.14)$$

Для сплошного сферического купола $\varphi_{\text{вк}} = 0$, $p_z = 0$ (рис. 3.4) имеем:

$$N_1 = -\frac{qR(1 - \cos \varphi)}{1 - \cos^2 \varphi} = -\frac{qR}{1 + \cos \varphi}; \quad (3.15)$$

$$N_2 = -qR \cos \varphi + \frac{qR}{1 + \cos \varphi} = -qR \left(\cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right) \quad (3.16)$$

В вершине купола ($\varphi_{\text{вк}} = 0$): $N_1 = N_2 = \frac{qR}{2}$.

Эпюры усилий N_1 и N_2 изображены на рис. 3.4.

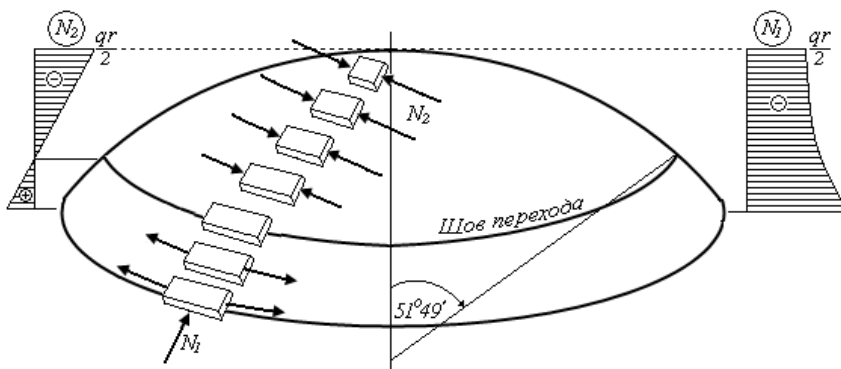


Рис. 3.4

Усилие N_1 в оболочке остается постоянно сжимающей силой, возрастающей к нижнему опорному кольцу.

Кольцевое усилие N_2 , из сжимающего в районе полюса переходит в растягивающее.

Параллель с нулевым значением усилия N_2 называют *швом перехода*. Этот шов перехода соответствует углу $\varphi_{ш}$, определяемому из условия $N_2=0$:

$$\cos \varphi_{ш} - \frac{1}{1 + \cos \varphi_{ш}} = 0. \rightarrow \varphi_{ш} = 51^{\circ}49'.$$

При $2\varphi_{ш} > 103^{\circ}38'$ в области ниже шва перехода возникает растягивающее кольцевое усилие. Для любого *купола вращения*, работающего в условиях безмоментного напряженного состояния, воздействие его на опору (рис. 3.5) характеризуется наличием двух составляющих силы N_1 : вертикальной и горизонтальной, называемой *распором*.

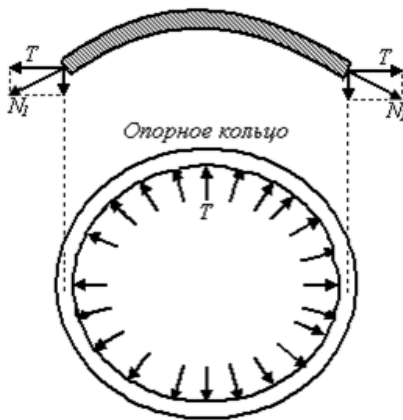


Рис. 3.5

Вертикальная сила легко воспринимается основанием, а для восприятия распора T необходимо создавать специальную конструкцию. Такой конструкцией является *опорное кольцо*, которое присоединяется к оболочке и работает на растяжение.

Распор T тем больше, чем ближе к горизонту располагается касательная к меридиану в районе опорной параллели. В сфе-

рическом куполе распор T тем больше, чем положе купол, т. е. чем меньше f/L (рис. 3.6,а).

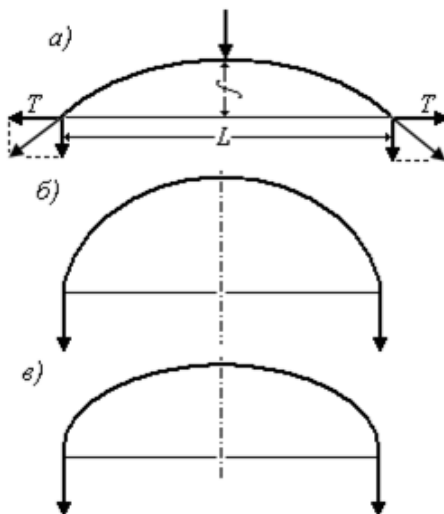


Рис. 3.6

Если срединная поверхность купола представляет собой половину шаровой поверхности, то распор T равен нулю (рис. 3.6,б). В этом случае, в принципе, можно обойтись и без опорного кольца. Иногда с целью обеспечения прочности крутые ж/б купола утолщают вдоль меридиана в направлении от полюса к опорной широте, чтобы позволить расположить необходимое количество кольцевой арматуры.

В эллипсоидальных куполах вращения равенство нулю распора T может быть при любом отношении f/L , если опорная параллель совпадает с диаметральной плоскостью эллипсоида (рис. 3.6,в).

Опорное кольцо всегда испытывает растяжение, кольцевое же волокно купола у опорного кольца в одних случаях может испытывать растяжение, в других – сжатие. Безмоментная работа купола вращения обеспечивается лишь тогда, когда относительные растяжения опорного кольца и кольцевого волокна купола одинаковы.

Купола, без шва перехода, не могут работать как безмоментные, так как в районе опорного кольца возникает изгибающая, быстро затухающая деформация (краевой эффект) при удалении от опорного кольца вдоль ме- ридиана.

4. РАСЧЕТ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ НА ОСЕСИММЕТРИЧНУЮ НАГРУЗКУ ПО МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ.

4.1 Краевой эффект.

Рассмотрим напряженное состояние оболочки вращения, край которой закреплен не только в тангенциальном направлении, как того требуют условия существования безмоментного напряженного состояния, но и в направлении перемещения w (по нормали к поверхности). Это закрепление может быть полным или упругим, когда край оболочки подкреплён упругим опорным кольцом. Такое закрепление края оболочки нарушает условие существования безмоментного состояния – силы реакции опоры вызывают в оболочке напряженное состояние, связанное с изгибом.

Возникновение деформаций изгиба рассмотрим на примере полого сферического купола, жестко связанного с упругим опорным кольцом под действием собственного веса (*рис. 4.1, а*). В оболочке возникают, при этом, сжимающие меридиональные и кольцевые усилия. Усилия N_I оболочки вызывают в опорном кольце растяжение (*рис. 4.1, г*).

Деформации опорного кольца и оболочки являются, таким образом, противоположными по знаку.

Условие совместности деформаций будет соблюдено, если у края оболочки возникает изгиб, а опорное упругое кольцо повернется на некоторый угол, т. е. будет испытывать кручение (*рис. 4.1, б, в*).

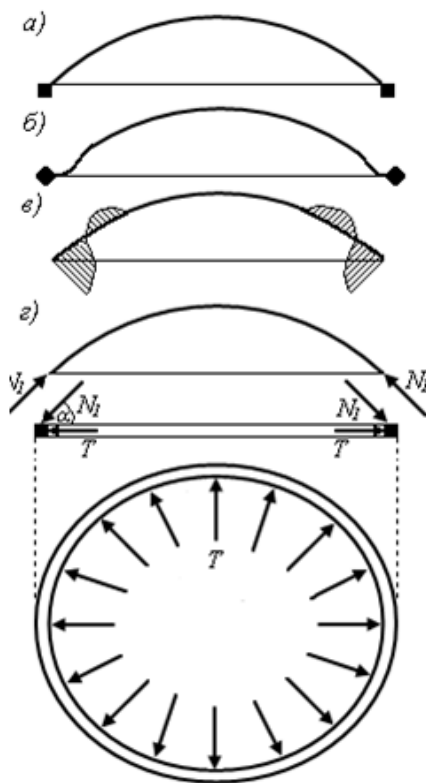


Рис. 4.1

Изгиб в пологом куполе возникает из-за разности деформаций оболочки и кольца в месте их соединения. Если купол подъемистый и угол раскрытия $\varphi > 52^\circ$, то кольцевые усилия у опоры будут растягивающими, т. е. совпадающими по знаку с усилием в опорном кольце. Избежать изгиба не удастся и в этом случае, так как удлинения кольца и оболочки вследствие большой разности в их жесткостях будут различны.

В этом случае, возникающее моментное напряженное состояние характерно лишь для области, примыкающей к опоре. На достаточном удалении от опоры, картина напряжений с достаточной точностью описывается безмоментными уравнениями. Такое быстро затухающее напряженное состояние, как известно, называют *краевым эффектом*.

4.2 Порядок расчета оболочки вращения при действии осесимметричной нагрузки с учетом краевых эффектов.

1. Проводится расчет оболочки по безмоментной теории на заданную внешнюю нагрузку. В результате получают усилия безмоментного напряженного состояния N_1 и N_2 ($S=0$ из условия симметрии).

2. Проводится расчет краевого эффекта. Рассматриваются моментные однородные уравнения равновесия. Усилия краевого эффекта получают с точностью до произвольных постоянных.

3. Произвольные постоянные общего решения определяют из граничных условий, выражающих условие совместности деформаций оболочки и опорной конструкции.

4. Общее решение задачи получается суммированием результатов расчета по безмоментной теории и краевого эффекта.

4.3 Основные уравнения теории краевого эффекта.

Так как действующая нагрузка осесимметрична, то и возникающие в оболочке усилия симметричны, т. е. не зависят от угла θ . В уравнениях равновесия для произвольной оболочки вращения (рис. 4.2) полагают равными нулю все производные по θ , а также Q_2 , так как M_2 от θ не зависит.

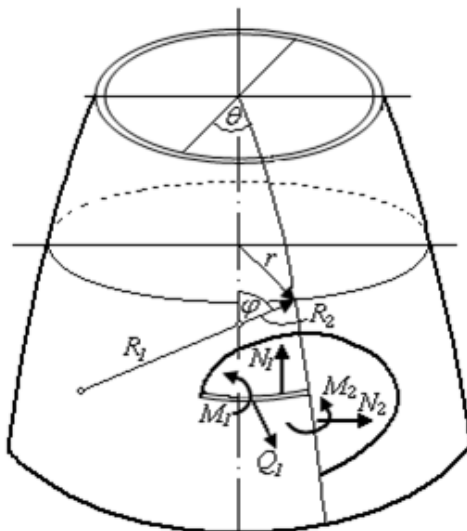


Рис. 4.2

В указанной на рис. 4.1 системе координат:

$$A = R_1, \quad B = R_2 \sin \varphi = r, \quad \frac{dr}{d\varphi} = R_1 \cos \varphi,$$

R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны оболочки.

Решение задачи сводится к системе двенадцати уравнений (три уравнения равновесия), (пять геометрических), (четыре физических) уравнений с двенадцатью неизвестными: пяти силовых компонентов (N_1 , N_2 , M_1 , M_2 , Q_1), четырех деформаций (ε_1 , ε_2 , χ_1 , χ_2), двух перемещений (u , w) и угла поворота ψ . Упрощая, получим:

$$\psi = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \operatorname{ctg} \varphi - \frac{R_2}{R_1} \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi}; \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= Q_1 \operatorname{ctg} \varphi; \quad N_2 = \frac{1}{R_1} \frac{d}{d\varphi} (Q_1 R_2); \quad M_1 = D \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \mu \frac{\psi}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi \right); \\ M_2 &= D \left(\frac{\psi}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\mu}{R_1} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right); \quad Q_1 = \frac{1}{R_1 R_2 \sin \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (M_1 R_2 \sin \varphi) - M_2 R_1 \cos \varphi \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) = \frac{1}{Eh} (N_1 - \mu N_2); \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} (N_2 - \mu N_1) \\ \chi_1 &= -\frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{u}{R_1} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}; \quad \chi_2 = -\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R_1 R_2} \left(-u + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \end{aligned} \right\}, \quad (4.3)$$

На свойстве краевого эффекта (напряженное состояние быстро затухающее вдоль меридиана и имеющее знакопеременный характер) строится приближенная теории его расчета, основанная на том, что при дифференцировании функций, изображающих затухающее колебание с большим коэффициентом затухания, значение производной *всегда* больше значения самой функции на величину коэффициента затухания. Поэтому возможно везде, где в процессе расчета оказываются рядом усилия, дефор-

мации, перемещения оболочки и их производные, принимать во внимание лишь производные самого высокого порядка. В результате получают приближенные уравнения, дающие для тонких оболочек надежный результат. Недостаток приближенного способа состоит в том, что он действителен лишь в определенной области изменения параметра φ . При углах $\varphi > 30^\circ$ выражение для изменения угла поворота касательной к меридиану (4.1) можно брать в упрощенной форме:

$$\psi = -\frac{R_2}{R_1} \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi}. \quad (4.4)$$

В соответствии с указанным свойством напряженного и деформированного состояния краевого эффекта и принимая за основное неизвестное Q_1 , исходные соотношения упрощаются и принимают вид:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} \frac{R_2}{R_1} \frac{dQ_1}{d\varphi}; \quad (4.5)$$

$$Q_1 = \frac{1}{R_1} \frac{dM_1}{d\varphi}; \quad (4.6)$$

$$M_1 = \frac{D}{R_1} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \quad (4.7)$$

$$\frac{R_2^4}{R_1^4} \frac{d^4 Q_1}{d\varphi^4} + 4k^4 Q_1 = 0, \quad \text{где } k^4 = 3(1-\mu^2) \frac{R_2^2}{h^2}. \quad (4.8)$$

4.4 Краевой эффект в сферической оболочке.

Для сферической оболочки $R_1=R_2=R$. Основное уравнение (4.8) принимает следующий вид:

$$\frac{d^4 Q_1}{d\varphi^4} + 4k^4 Q_1 = 0, \quad \text{где } k^4 = 3(1-\mu^2) \frac{R^2}{h^2}. \quad (4.9)$$

Решение уравнения (4.9) принимаем в виде

$$Q_1 = e^{-k\varphi_1} (C_1 \cos k\varphi_1 + D_1 \sin k\varphi_1) + e^{-k\varphi_2} (C_2 \cos k\varphi_2 + D_2 \sin k\varphi_2) \quad (4.10)$$

где (рис. 4.3) $\varphi_1 = \varphi_{нк} - \varphi$; $\varphi_2 = \varphi - \varphi_{вк}$. (4.11)

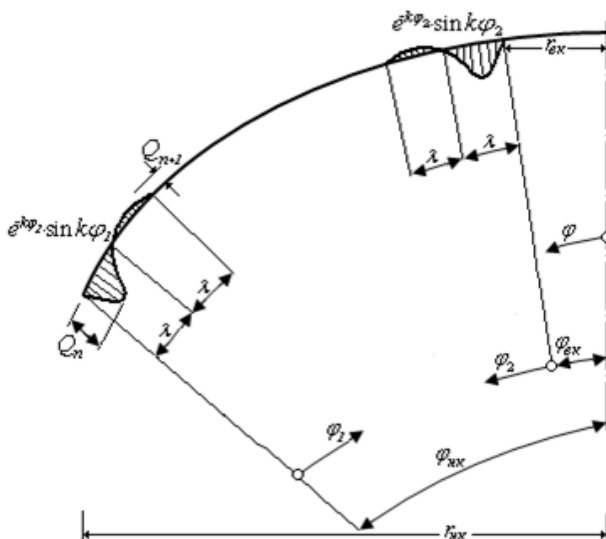


Рис. 4.3

Обе части решения (4.10) представляют собою функции типа затухающего колебания: первая (функция от φ_1) затухает от левого края (рис. 4.3); вторая (функция от φ_2) затухает от правого края.

Для определения краевого эффекта, возникающего у нижнего края, пользуемся первой частью решения (4.10):

$$Q_1 = e^{-k\varphi_1} \left(C_1 \cos k\varphi_1 + D_1 \sin k\varphi_1 \right). \quad (4.12)$$

Определим производные, необходимые для получения ком-

понентов внутренних усилий:

$$\frac{dQ_1}{d\varphi} = -\frac{dQ_1}{d\varphi_1} = -ke^{-k\varphi_1} [(-C_1 + D_1)\cos k\varphi_1 + (-C_1 - D_1)\sin k\varphi_1];$$

$$\frac{d^2Q_1}{d\varphi^2} = -\frac{d^2Q_1}{d\varphi_1^2} = 2k^2 e^{-k\varphi_1} (-C_1 \cos k\varphi_1 + D_1 \sin k\varphi_1);$$

Из выражений (4.4), (4.5), (4.7), для нижней части сферической оболочки получаем выражения для ψ и M_z :

$$\text{а) } E\psi = -\frac{1}{h} \frac{d^2Q_1}{d\varphi^2} = -\frac{2}{h} k^2 e^{-k\varphi_1} (-D_1 \cos k\varphi_1 + C_1 \sin k\varphi_1);$$

$$\text{б) } M_1 = \frac{k^3 h^2}{6(1-\mu^2)R} e^{-k\varphi_1} [(C_1 + D_1)\cos k\varphi_1 + (D_1 - C_1)\sin k\varphi_1];$$

$$\text{в) } N_1 = ctg\varphi \cdot e^{-k\varphi_1} (C_1 \cos k\varphi_1 + D_1 \sin k\varphi_1); \quad (4.13)$$

$$\text{г) } N_2 = \frac{dQ_1}{d\varphi} = -\frac{dQ_1}{d\varphi_1} = -ke^{-k\varphi_1} [(D_1 - C_1)\cos k\varphi_1 + (C_1 + D_1)\sin k\varphi_1]$$

$$\begin{aligned} \text{д) } M_2 &= \frac{D}{R} \left(\psi ctg\varphi + \mu \frac{d\psi}{d\varphi} \right) = \\ &= -\frac{k^2 h^2}{6(1-\mu^2)R} ctg\varphi \cdot e^{-k\varphi_1} (-D_1 \cos k\varphi_1 + C_1 \sin k\varphi_1) + \mu M_1 \end{aligned}$$

Выражения (4.13) представляют собою все компоненты усилий с точностью до произвольных постоянных C_1 и D_1 . Эти постоянные определяются из граничных условий.

Для краевого эффекта у верхнего кругового выреза сферической оболочки, компоненты усилий записываются в следующем виде:

$$Q_1 = e^{-k\varphi_2} (C_2 \cos k\varphi_2 + D_2 \sin k\varphi_2). \quad (4.14)$$

$$\text{а) } E\psi = -\frac{2}{h} k^2 e^{-k\varphi_2} (-D_2 \cos k\varphi_2 + C_2 \sin k\varphi_2);$$

$$\text{б) } M_1 = -\frac{k^3 h^2}{6(1-\mu^2)R} e^{-k\varphi_2} [(C_2 + D_2)\cos k\varphi_2 + (D_2 - C_2)\sin k\varphi_2];$$

$$\text{в) } N_1 = ctg\varphi \cdot e^{-k\varphi_2} (C_2 \cos k\varphi_2 + D_2 \sin k\varphi_2); \quad (4.15)$$

$$\text{г) } N_2 = -ke^{-k\varphi_2} [(-D_2 + C_2)\cos k\varphi_2 + (C_2 + D_2)\sin k\varphi_2]$$

$$\text{д) } M_2 = \frac{k^2 h^2}{6(1 - \mu^2)R} ctg\varphi \cdot e^{-k\varphi_2} (-D_2 \cos k\varphi_2 + C_2 \sin k\varphi_2) + \mu M_1.$$

4.5 Определение произвольных постоянных из граничных условий.

Рассмотрим краевой эффект на нижнем крае сферической оболочки, нагруженной распределенной осесимметричной нагрузкой и подкрепленной опорным упругим кольцом. При этом (рис. 4.3), $\varphi = \varphi_{нк}$, т. е. $\varphi_1 = 0$.

Если рассчитывать оболочку с отдельным опорным кольцом по безмоментной теории, то деформации кольца и оболочки будут различны: будут различными повороты касательных к линии меридиана в месте стыка оболочки и кольца, будут также различаться удлинения радиуса параллельного круга на уровне опоры.

Суммируя безмоментное решение задачи (3.13), (3.14) с решением (4.13), необходимо определить коэффициенты C_I и D_I так, чтобы условия совместности деформаций были соблюдены. Если оболочка и кольцо изготовлены из одного материала, то условие равенства удлинения r для оболочки и опорного кольца можно заменить равенством кольцевых нормальных напряжений для оболочки и опорного кольца в месте стыка.

Обозначим все компоненты, относящиеся к опорному кольцу (*), а краевые значения для оболочки – чертой (—). Значения, полученные по безмоментной теории, отметим индексом «0». Тогда граничные условия можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \psi_0^* + \psi^* &= \overline{\psi}_0 + \overline{\psi}; \\ \sigma_0^* + \sigma^* &= \overline{\sigma}_0 + \overline{\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Значения угла поворота ψ_0^* и напряжения σ_0^* определяются расчетом опорного кольца по формулам из курса сопротивления материалов.

Кольцо нагружено усилиями, которые определены в оболочке по безмоментной теории; ψ^* и σ^* появляются в резуль-

тате действия краевых усилий в оболочке, определяемых формулами (4.13); $\bar{\psi}_0$ и $\bar{\sigma}_0$ - угол поворота и нормальное напряжение у края оболочки, вычисленные по безмоментной теории; $\bar{\psi}$ и $\bar{\sigma} = \frac{N_2}{h}$ получаются непосредственно из (4.13) после подстановки в них $\varphi_1 = 0$.

После расчета оболочки по безмоментной теории на заданную нагрузку непосредственно получаем:

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\bar{N}_{2,0}}{h}. \quad (4.17)$$

Для сферической оболочки выражение (4.1) упрощается и имеет вид:

$$\bar{\psi} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \operatorname{ctg} \varphi - \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi}. \quad (4.18)$$

Из (3.3) имеем:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Eh} (N_1 - \mu N_2), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (N_2 - \mu N_1).$$

Подставляя в (4.18) значения ε_1 и ε_2 выраженные через усилия N_1 и N_2 , найденные из расчета по безмоментной теории, получим:

$$E\bar{\psi}_0 = \frac{1}{h} \left\{ [(\bar{N}_{1,0} - \bar{N}_{2,0}) - \mu(\bar{N}_{1,0} + \bar{N}_{2,0})] \operatorname{ctg} \varphi - \frac{d\bar{N}_{2,0}}{d\varphi} + \mu \frac{d\bar{N}_{1,0}}{d\varphi} \right\}. \quad (4.19)$$

Рассмотрим расчет кольца методами сопротивления материалов. На кольцо действует скручивающий распределенный момент M_k (рис. 4.4).

Вследствие симметрии нагрузки и геометрии самого кольца в нем не возникает деформаций кручения, а возникает лишь из-

гибающий момент

$$M = M_{\kappa} r_0. \quad (4.20)$$

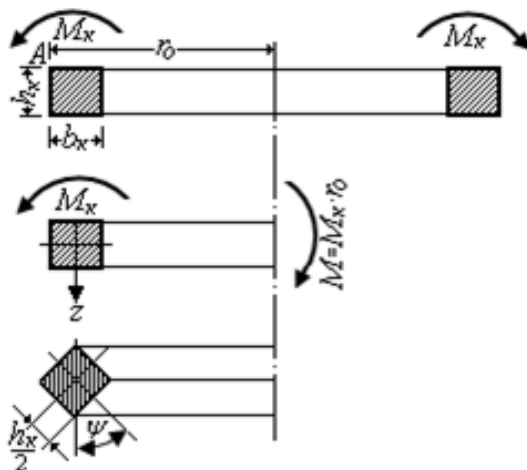


Рис. 4.4

В наружном верхнем угле кольца (точка A) возникает напряжение

$$\sigma_{k(A)} = \frac{M}{W} = \frac{6M}{b_{\kappa} h_{\kappa}^2}, \quad (4.21)$$

Относительное удлинение верхней грани равно

$$\varepsilon_k = \frac{6M}{E_k b_{\kappa} h_{\kappa}^2} \quad (4.22)$$

Радиус кривизны окружности, проходящей через точку A , увеличивается на $\Delta r_0 = \frac{6M}{E_k b_{\kappa} h_{\kappa}^2} \cdot r_0$, а радиус нейтральной линии кольца не изменяется (рис. 4.5,а). Поэтому каждое поперечное сечение кольца (рис. 4.5,б) повернется в своей плоскости на угол

$$\psi_{\kappa} = \frac{6Mr_0}{E_{\kappa} b_{\kappa} h_{\kappa}^2} \frac{1}{2} = \frac{12Mr_0}{E_{\kappa} b_{\kappa} h_{\kappa}^3} \quad (4.23)$$

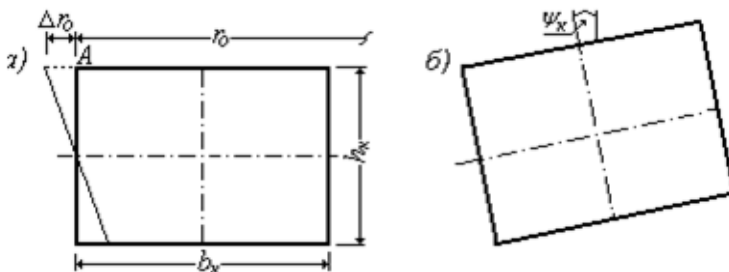


Рис. 4.5

В произвольной точке сечения кольца возникает при этом продольное нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{12M}{b_{\kappa} h_{\kappa}^3} \cdot z = \frac{12M_{\kappa} r_0}{b_{\kappa} h_{\kappa}^3} \cdot z. \quad (4.24)$$

Таким образом, определены все необходимые зависимости для постановки граничных условий и определения коэффициентов C_I и D_I .

5. ПРИМЕР РАСЧЕТА.

Рассчитаем оболочку (рис. 5.1) на собственный вес с учетом краевого эффекта. Опорный контур и проем у вершины купола усилены упругими кольцами жесткости.

Геометрические данные оболочки:

$$R = 35\text{ м}; \quad r_{\text{нк}} = 24,75\text{ м}; \quad r_{\text{вк}} = 6,08\text{ м}; \quad \text{tg} \varphi_{\text{вк}} = 0,1763; \quad h = 0,1\text{ м};$$

$$\text{ctg} \varphi_{\text{вк}} = 5,671; \quad d_{\text{нк}} = 49,50\text{ м}; \quad \varphi_{\text{нк}} = 45^0; \quad \varphi_{\text{вк}} = 10^0;$$

$$\sin \varphi_{\text{нк}} = 0,7071; \quad \cos \varphi_{\text{нк}} = 0,7071; \quad \text{tg} \varphi_{\text{нк}} = \text{ctg} \varphi_{\text{нк}} = 1;$$

$$\sin \varphi_{\text{вк}} = 0,1737; \quad \cos \varphi_{\text{вк}} = 0,9848.$$

Физико-механические данные:

Класс бетона В30:

$$R_b = 17\text{ МПа}; \quad R_{bt} = 1,2\text{ МПа}; \quad E_b = 32,5 \cdot 10^3\text{ МПа},$$

$$\mu = 0,16.$$

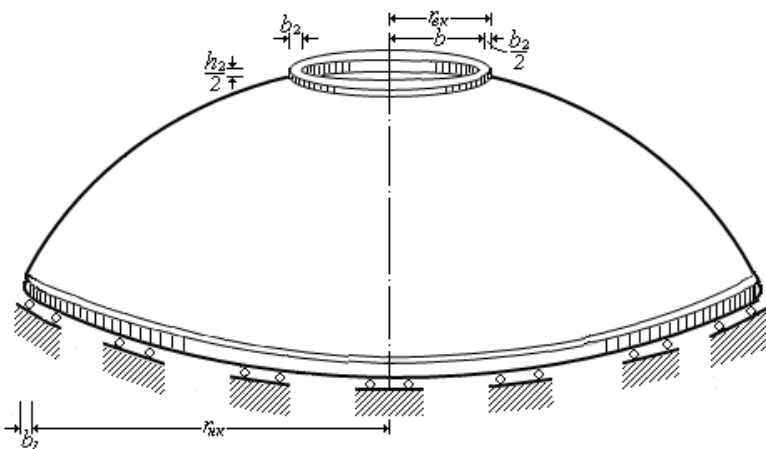


Рис. 5.1

Принимаем ширину поперечного сечения верхнего опорного кольца $b_2 = 40\text{ см}$. Тогда $b = r_{\text{вк}} - 0,2 = 6,08 - 0,2 = 5,88\text{ м}$. Толщина h_2 подлежит определению.

Расчетные нагрузки принимается равными:
 $q = 2,6 \text{ кН} / \text{м}^2$; $p_z = 10,1 \text{ кН} / \text{м}$.

Расчет по безмоментной теории.

Из (3.13) и (3.14) имеем:

$$N_{1,0} = -\frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[qR(\cos \varphi_{\text{вк}} - \cos \varphi) + \frac{b}{R} p_z \right];$$

$$N_{2,0} = -qR \cos \varphi + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[qR(\cos \varphi_{\text{вк}} - \cos \varphi) + \frac{b}{R} p_z \right].$$

Геометрические параметры и усилия, подсчитанные по формулам (3.13) и (3.14), приведены в *табл. 1*.

Таблица 1

φ	45°	40°	35°	30°	25°	20°	15°	10°
$\sin \varphi$	0,7071	0,6428	0,5736	0,5000	0,4226	0,3420	0,2588	0,1736
$\cos \varphi$	0,7071	0,7660	0,8192	0,8660	0,9063	0,9397	0,9659	0,9848
$\text{tg} \varphi$	1,0000	0,8391	0,7002	0,5774	0,4663	0,3640	0,2679	0,1763
$\text{ctg} \varphi$	1,0000	1,1918	1,4281	1,7320	2,1445	2,7475	3,7320	5,6713
$\sin^2 \varphi$	0,5000	0,4132	0,3290	0,2500	0,1786	0,1170	0,0670	0,0302
$N_{1,0}$ [кН/м]	-53,94	-52,30	-50,97	-50,03	-49,51	-49,62	-51,02	-56,38
$N_{2,0}$ [кН/м]	-10,41	-17,41	-23,57	-28,78	-32,96	-35,91	-36,88	-33,24

Определим размеры поперечных сечений опорных колец из условия прочности. Рассмотрим воздействие на кольцо равномерно распределенного радиального давления интенсивности T при радиусе r_k (рис. 5.2,а).

Применяя метод сечений и рассматривая (рис. 5.2,б) равновесие половины кольца, получим уравнение равновесия

$$2N_k = \int_0^\pi Tr_k \sin \alpha d\alpha. \rightarrow 2N_k = Tr_k (-\cos \alpha) \Big|_0^\pi = 2Tr_k.$$

$$\rightarrow N_{\kappa} = Tr_{\kappa}.$$

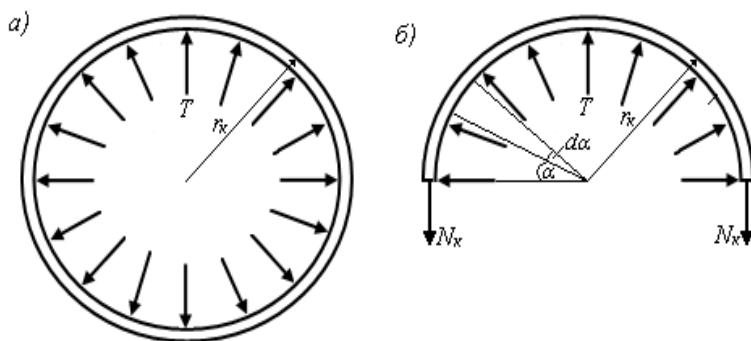


Рис. 5.2

Из рис. 4.1,г имеем: $T = -N_1 \cos \alpha$. Тогда $N_{\kappa} = -N_1 r_{\kappa} \cos \alpha$.

Так как опорное кольцо испытывает растяжение, то

$$A_{\kappa} \cdot \sigma_{\kappa} = -N_1 r_{\kappa} \cos \alpha.$$

Условие прочности:

$$\sigma_{\kappa} = -\frac{N_1 r_{\kappa} \cos \alpha}{A_{\kappa}} \leq R_{bt}, \quad (5.1)$$

где R_{bt} – расчетное сопротивление растяжению.

Отсюда получим:

$$A_{\kappa} \geq \frac{-N_1 r_{\kappa} \cos \alpha}{R_{bt}}. \quad (5.2)$$

Для нижнего опорного кольца:

$$\alpha = \varphi_{нк} = 45^0; \quad r_{\kappa} = r_{нк} = 24,75 м;$$

$$\cos \alpha = \cos \varphi_{нк} = 0,7071; \quad N_1 = -53,94 \text{ кН/м}$$

$$A_{\kappa} = -\frac{-53,94 \cdot 24,75 \cdot 0,7071}{1,2 \cdot 10^3} = 0,787 м^2.$$

Принимаем следующие размеры поперечного сечения нижнего опорного кольца: $b_1 = 1,35 м; \quad h_1 = 0,6 м.$

Для *верхнего* кольца жесткости:

$$\alpha = \varphi_{вк} = 10^0; \quad r_{\kappa} = r_{вк} = 6,08 м; \quad \cos \alpha = \cos \varphi_{вк} = 0,9848;$$

$$N_1 = -56,18 \text{ кН/м}$$

$$A_{\kappa} = 0,4 \cdot h_2 = -\frac{-56,18 \cdot 6,08 \cdot 0,9848}{1,2 \cdot 10^3} \rightarrow h_2 = \frac{0,28}{0,4} = 0,7 м.$$

Эпюры усилий N_1 и N_2 изображены на *рис. 5.5*.

Расчет краевого эффекта.

Дифференцируя выражения (3.13) и (3.14), получим:

$$\frac{dN_1}{d\varphi} = -\frac{qR}{\sin \varphi} + 2 \frac{qR(\cos \varphi_{вк} - \cos \varphi) + \frac{b}{R} p_z}{\sin^3 \varphi} \cos \varphi; \quad (5.3)$$

$$\frac{dN_2}{d\varphi} = qR \sin \varphi + \frac{qR}{\sin \varphi} - 2 \frac{qR(\cos \varphi_{вк} - \cos \varphi) + \frac{b}{R} p_z}{\sin^3 \varphi} \cos \varphi. \quad (5.4)$$

Нижний контур купола.

Для нижнего контура купола, с учетом принятых обозначений (*табл. 1*), имеем:

$$\bar{N}_{1,0} = -53,94 \text{ кН / м}; \quad \bar{N}_{2,0} = -10,41 \text{ кН / м};$$

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{N}_{1,0}}{d\varphi} &= -\frac{2,6 \cdot 35}{0,7071} + 2 \frac{2,6 \cdot 35(0,9848 - 0,7071) + \frac{5,88}{35} 10,1}{0,7071^3} 0,7071 = ; \\ &= -20,81 \text{ кН / м} \\ \frac{d\bar{N}_2}{d\varphi} &= 2,6 \cdot 35 \cdot 0,7071 + 20,81 = 85,16 \text{ кН / м} .\end{aligned}$$

На нижнем контуре купола определим $\bar{\sigma}_0$ и $\bar{\psi}_0$ по формулам (4.17) и (4.19):

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_0 &= \frac{\bar{N}_{2,0}}{h} = -\frac{10,41}{0,1} = -104,1 \text{ кН / м}^2 \approx -0,1 \text{ МПа} ; \\ E\bar{\psi}_0 &= \frac{1}{0,1} \{ [(-53,94 + 10,41) - 0,16(-53,94 - 10,41)] \cdot 1 - 85,16 + 0,16(-20,81) \} = \\ &= \frac{1}{0,1} (-43,53 + 10,30 - 85,16 - 3,33) = -\frac{121,69}{0,1} = -1216,9 \text{ кН / м}^2 = -1,22 \text{ МПа} .\end{aligned}$$

Найдем соответствующее угловое перемещение и напряжение в опорном кольце от действия вычисленных по безмоментной теории усилий. С учетом принятых обозначений на краях купола, получим:

$$E\psi_0^* = 0 .$$

Согласно (5.1)

$$\begin{aligned}\sigma_0^* &= -\frac{\bar{N}_{1,0} r_{нк} \cos \varphi_{нк}}{b_1 \cdot h_1} = -\frac{-53,94 \cdot 24,75 \cdot 0,7071}{1,35 \cdot 0,6} = 1165,42 \text{ кН / м}^2 = \\ &= 1,16 \text{ МПа}\end{aligned}$$

Определим коэффициент затухания k и угол λ (рис. 4.3). Из (4.9) имеем:

$$k^4 = 3(1 - \mu^2) \frac{R^2}{h^2} \rightarrow k = \sqrt{\frac{R}{h}} \sqrt[4]{3(1 - \mu^2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{35}{0,1}} \sqrt[4]{3(1 - 0,16^2)} = 24,46$$

$$\lambda = \frac{180^0}{k} = \frac{180^0}{24,46} = 7,36^0.$$

Напряжение и перемещение оболочки, вызванное краевым эффектом, определим из (4.13). Нижнее опорное кольцо предполагается закрепленным так, что его поворот равен нулю (рис. 5.3). Полагая $\varphi_1 = 0$, получим:

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{N}_2}{h} = \frac{-ke^{-k\varphi_1}[(D_1 - C_1)\cos k\varphi_1 + (C_1 + D_1)\sin k\varphi_1]}{h} =$$

$$= \frac{-24,46}{0,1}(D_1 - C_1)$$

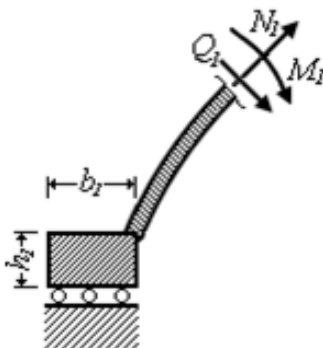


Рис. 5.3

Таким образом:

$$\bar{\sigma} = 244,6C_1 - 244,6D_1;$$

$$E\bar{\psi} = -\frac{2}{h}k^2 e^{-k\varphi_1} (-D_1 \cos k\varphi_1 + C_1 \sin k\varphi_1) =$$

$$= \frac{2}{0,1} 24,46^2 D_1 = 11965,8 D_1.$$

Перемещение и напряжение в опорном кольце от усилий краевого эффекта (4.13), равны:

$$E\psi^* = 0;$$

$$\sigma^* = -\bar{N}_1 0,7071(1+1) \frac{24,75}{1,35 \cdot 0,6} C_1 = -43,21 C_1.$$

Из граничных условий (4.16) для нижнего контура определяем C_I и D_I :

$$\text{для } E\psi: 0+0 = -1216,9 + 11965,8 D_I;$$

$$\text{для } \sigma: 1165,4 - 43,2 C_I = -104,1 - 244,6 D_I + 244,6 C_I.$$

$$\text{Отсюда } D_I = \frac{1216,9}{11965,83} = 0,10 \text{ кН} / \text{м};$$

$$(-244,6 - 43,2) C_I = -244,6 \cdot 0,10 - 104,1 - 1165,42. \rightarrow$$

$$-277,8 C_I = -1294. \rightarrow C_I = \frac{1294}{287,8} = 4,5 \text{ кН} / \text{м}.$$

Усилия краевого эффекта на нижнем контуре купола ($\varphi_1 = 0$) определяем, с учетом полученных значений C_I и D_I , по формулам (4.13):

$$\bar{M}_1 = \frac{24,46^3 \cdot 0,1^2}{6 \cdot (1 - 0,16^2) \cdot 35} \cdot 1 \cdot (4,5 + 0,10) = 0,715 \cdot 4,6 = 3,29 \text{ кНм} / \text{м};$$

$$\bar{N}_1 = 1 \cdot 1 \cdot 4,5 = 4,5 \text{ кН} / \text{м}; \quad \bar{N}_2 = -24,46 \cdot (0,10 - 4,5) \cdot 1 = 107,62 \text{ кН} / \text{м}$$

Определим экстремальное значение изгибающего момента M_1 .

Из (4.13) находим:

$$\frac{dM_1}{d\varphi_1} = 0. \rightarrow C_1 \cos k\varphi_1 + D_1 \sin k\varphi_1 = 0. \rightarrow \operatorname{tg} k\varphi_1 = -\frac{C_1}{D_1} = -\frac{4,5}{0,1} = -45. \rightarrow$$

$$\rightarrow k\varphi_1 = 91,27^\circ = 1,59 \text{ рад.} \rightarrow \varphi_1 = \frac{91,27^\circ}{24,46} = 3,73^\circ.$$

Экстремальное значение момента M_1 определяем ($k\varphi_1 = 1,59 \text{ рад}$):

$$M_{1\text{экстр}1} = 0,715 \cdot 0,2039 [(4,5 + 0,1) \cos 91,27^\circ + (0,1 - 4,5) \sin 91,27^\circ] =$$

$$= -0,63 \text{ кНм / м}$$

Найдем из (4.13) значение угла φ_1 , соответствующего $M_1 = 0$:

$$M_1 = 0. \rightarrow \operatorname{tg} k\varphi_1 = \frac{C_1 + D_1}{C_1 - D_1} = \frac{4,5 + 0,1}{4,5 - 0,1} = 1,045. \rightarrow k\varphi_1 = 46,3^\circ. \varphi_1 = 1,9^\circ$$

Вторая точка на меридиане, соответствующая нулевому значению момента M_1 , определяется углом $\varphi_1 = 1,9^\circ + \lambda = 1,9^\circ + 7,36^\circ = 9,26^\circ$.

Вторая точка, соответствующая экстремальному значению момента M_1 , определяется углом $\varphi_1 = 3,73^\circ + \lambda = 11,09^\circ$.

$$k\varphi_1 = 271,26^\circ = 4,73 \text{ рад}$$

$$M_{1\text{экстр}2} = 0,715 \cdot 0,008 [(4,5 + 0,1) \cos 271,26^\circ + (0,1 - 4,5) \sin 271,26^\circ] =$$

$$= 0,03 \text{ кНм / м}$$

Значения изгибающего момента в локальной области у нижнего опорного контура купола приведены в табл.2.

Таблица 2

φ_1	0^0	$1, 9^0$	$3,73^0$	$9,26^0$	$11,09^0$
φ	45^0	$43,1^0$	$41,27^0$	$35,74^0$	$33,91^0$
M_I [кНм/м]	3,29	0	-0,63	0	0,03

Определим экстремальное значение кольцевого усилия N_2 .

Из (4.13) находим:

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{d\varphi_1} = 0, \rightarrow \operatorname{tgk}\varphi_1 = \frac{C_1}{D_1} = \frac{4,5}{0,1} = 45. \rightarrow k\varphi_1 = 88,73^0 = \\ = 1,55 \text{ рад}. \rightarrow \varphi_1 = \frac{88,73^0}{24,46} = 3,63^0 \end{aligned}$$

Экстремальное значение кольцевого усилия N_2 находим ($k\varphi_1 = 1,55 \text{ рад}$):

$$\begin{aligned} N_{2\text{экстр}} = -24,46 \cdot 0,2123 [(0,1 - 4,5) \cos 88,73^0 + (4,5 + 0,1) \sin 88,73^0] = \\ = -23,38 \text{ кН} / \text{м} \end{aligned}$$

Найдем из (4.13) значение угла φ_1 , соответствующего $N_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tgk}\varphi_1 = \frac{C_1 - D_1}{C_1 + D_1} = \frac{4,5 - 0,1}{4,5 + 0,1} = \frac{4,4}{4,6} = 0,9565. \rightarrow \\ \rightarrow k\varphi_1 = 43,72^0. \rightarrow \varphi_1 = \frac{43,72^0}{24,46} = 1,79^0. \end{aligned}$$

Вторая точка на меридиане, соответствующая нулевому значению кольцевого усилия N_2 , характеризуется углом $\varphi_1 = 1,79^0 + 7,36^0 = 9,15^0$.

Вторая точка на меридиане, соответствующая экстремальному значению кольцевого усилия N_2 , характеризуется углом $\varphi_1 = 3,63^\circ + 7,36 = 10,99^\circ$.

При этом $k\varphi_1 = 268,82^\circ = 4,69\text{рад}$, а

$$N_{2_{\text{экстр}}} = -24,46 \cdot 0,0092 \left[(0,1 - 4,5) \cos 268,82^\circ + (4,5 + 0,1) \sin 268,82^\circ \right] = 1,01 \text{ кН / м}$$

Эпюры расчетных усилий приведены на *рис. 5.5*. Момент M_1 возникает только вследствие краевого эффекта. Кольцевое усилие N_2 представляет собой сумму двух решений: безмоментного и краевого эффекта.

Найдем сумму безмоментного решения (3.14) и краевого эффекта (4.13) усилия N_2 в локальной области у нижнего опорного контура купола (*табл.3*).

Таблица 3

φ_1	0°	$1,79^\circ$	$3,63^\circ$	$9,15^\circ$	$10,99^\circ$
φ	45°	$43,21^\circ$	$41,37^\circ$	$35,85^\circ$	$34,01^\circ$
$N_{2,0}$ кН/м	-10,41	-13,03	-15,58	-22,59	-25,62
N_2 кН/м	107,62	0	-23,38	0	1,01
$N_{2\Sigma}$	97,21	-13,03	-38,96	-22,59	-24,61

Проверка прочности купола у нижнего контура:
Меридиональные напряжения

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_\alpha &= \frac{\bar{N}_{1,0} + \bar{N}_1}{h} \pm \frac{\bar{M}_1}{W} = \frac{-53,94 + 4,5}{0,1} + \frac{6 \cdot 3,29}{0,1^2} = \frac{-49,44}{0,1} + \frac{19,74}{10^{-2}} = \\ &= -494,4 + 1974 = 1479,6 \text{ кН/м}^2 = 1,48 \text{ МПа} > R_{br} = 1,2 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Так как условие прочности не выполняется, то принимаем следующее конструктивное решение. Плавно изменяем толщину купола от 0,1м до 0,12м в локальной области у нижнего опорного кольца. В этом случае

$$\bar{\sigma}_\alpha = \frac{-49,44}{0,12} + \frac{19,74}{1,44 \cdot 10^{-2}} = -412 + 1370,8 = 958,8 \text{ кН} / \text{м}^2 = 0,96 \text{ МПа} < 1,2 \text{ МПа}$$

Кольцевые напряжения

$$\sigma = \sigma_\beta = \frac{\bar{N}_{2,0} + \bar{N}_2}{h} \leq R_{br} \rightarrow \sigma_\beta = \frac{-10,41 + 107,62}{0,12} = 810,1 \text{ кН} / \text{м}^2 = 0,81 \text{ МПа} < 1,2$$

Верхний контур купола.

Для верхнего контура купола, с учетом принятых обозначений, имеем:

$$\bar{N}_{1,0} = -56,38 \text{ кН} / \text{м}; \quad \bar{N}_{2,0} = -33,24 \text{ кН} / \text{м};$$

Из (5.3) и (5.4) имеем:

$$\frac{d\bar{N}_{1,0}}{d\varphi} = -\frac{2,6 \cdot 35}{0,1736} + 2 \frac{2,6 \cdot 35(0,9848 - 0,9848) + \frac{5,88}{35} 10,1}{0,0052} 0,9848 = 118,5 \text{ кН} / \text{м}$$

$$\frac{d\bar{N}_{2,0}}{d\varphi} = 2,6 \cdot 35 \cdot 0,1736 - 118,5 = 15,8 - 118,5 = -102,7 \text{ кН} / \text{м}.$$

На верхнем крае оболочки определим $\bar{\sigma}_0$ и $\bar{\psi}_0$ по формулам (4.17) и (4.19):

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\bar{N}_{2,0}}{h} = -\frac{33,24}{0,1} = -332,4 \text{ кН} / \text{м}^2 \approx -0,33 \text{ МПа};$$

$$E \bar{\psi}_0 = \frac{1}{0,1} \{ [(-56,38 + 33,24) - 0,16(-56,38 - 33,24)] \cdot 5,671 + 102,7 + 0,16 \cdot 118,5 \} =$$

$$= 717,5 \text{ кН} / \text{м}^2 \approx 0,72 \text{ МПа}.$$

Найдем соответствующее угловое перемещение и напряжение в верхнем кольце от действия усилий, вычисленных по безмоментной теории:

$$E \psi_0^* = 0.$$

$$\sigma_0^* = -\frac{p_z \cdot \text{ctg} \varphi_{\text{вк}} \cdot r_{\text{вк}}}{b_2 \cdot h_2} = -\frac{10,1 \cdot 5,671 \cdot 6,08}{0,4 \cdot 0,7} =$$

$$= -1243,7 \text{ кН} / \text{м}^2 \approx -1,24 \text{ МПа}$$

Определим $E \bar{\psi}$ и $\bar{\sigma}$ ($\varphi_2 = 0$) из расчета краевого эффекта (4.15):

$$E \bar{\psi} = -\frac{2}{0,1} 24,46^2 \cdot 1 \cdot (-D_2) = 11965,8 D_2;$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{N}_2}{h} = -\frac{k}{h} (-D_2 + C_2) = -\frac{24,46}{0,1} (-D_2 + C_2) =$$

$$= -244,6 C_2 + 244,6 D_2$$

Верхнее кольцо ($\varphi_2 = 0$) нагружено моментом (рис. 5.4)

$$M_{\text{к}} = -Q_1 \cdot e + M_1.$$

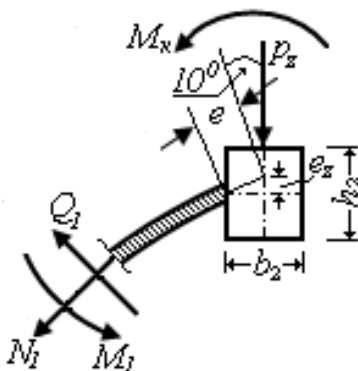


Рис. 5.4

Согласно (4.14), (4.15):

$$Q_1 = C_2: e = \frac{b_2}{2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_{\text{БК}}} = \frac{0,4}{2 \cdot 0,9848} = 0,203 \text{ м};$$

$$e_z = \frac{b_2}{2} \cdot \text{tg} \varphi_{\text{БК}} = \frac{0,4}{2} \cdot 0,1763 = 0,035 \text{ м}.$$

$$M_1 = -\frac{k^3 h^2}{6(1-\mu^2) \cdot R} (C_2 + D_2) =$$

$$-\frac{24,46^3 \cdot 10^{-2}}{6(1-0,16^2) \cdot 35} (C_2 + D_2) = -0,715(C_2 + D_2).$$

Подставив в выражение для M_{κ} , получим:

$$M_{\kappa} = -0,203C_2 - 0,715(C_2 + D_2) = -0,918C_2 - 0,715D_2.$$

Из (4.20) имеем: $M = M_{\kappa} r_0.$

Подставив в (4.23), получим:

$$E_{\kappa} \psi_{\kappa} = \frac{6Mr_0}{b_{\kappa} h_{\kappa}^2} \frac{1}{\frac{h_{\kappa}}{2}} = \frac{12Mr_0}{E_{\kappa} b_{\kappa} h_{\kappa}^3}.$$

Подставляя найденное значение M_{κ} и параметры верхнего кольца, найдем:

$$E_{\kappa} \psi^* = \frac{12M_{\kappa} r_{\kappa}^2}{b_2 h_2^3} = \frac{12(-0,918C_2 - 0,715D_2) \cdot 6,08^2}{0,4 \cdot 0,7^3} = ;$$

$$= -2968,1C_2 - 2311,7D_2$$

Определим напряжение в верхнем кольце. Из (4.14) и (4.15) имеем:

$$Q_1 = e^{-k\varphi_2} (C_2 \cos k\varphi_2 + D_2 \sin k\varphi_2);$$

$$N_1 = \operatorname{ctg} \varphi_{\text{БК}} \cdot e^{-k\varphi_2} (C_2 \cos k\varphi_2 + D_2 \sin k\varphi_2).$$

При $\varphi_2 = 0$ Q_1 и N_1 принимают значения:

$$\bar{Q}_1 = C_2; \quad \bar{N}_1 = 5,671C_2.$$

Из рис. 5.4 и (4.24) имеем:

$$\sigma^* = \frac{(\bar{N}_1 \cdot \cos \varphi_{\text{БК}} + Q_1 \sin \varphi_{\text{БК}}) \cdot r_{\text{БК}}}{b_2 \cdot h_2} + \frac{12M_{\kappa} \cdot r_{\text{БК}}}{b_2 \cdot h_2^3} \cdot e_z.$$

Подставив найденные значения усилий и геометрические параметры верхнего кольца, найдем:

$$\sigma^* = \frac{(5,671C_2 \cdot 0,9848 + C_2 \cdot 0,1737) \cdot 6,08}{0,4 \cdot 0,7} + \frac{12(-0,918C_2 - 0,715D_2) \cdot 6,08}{0,4 \cdot 0,7^3} \cdot 0,035 =$$

$$= 21,714(5,585 + 0,1737)C_2 - 18,612(0,918C_2 + 0,715D_2) = 107,96C_2 - 13,31D_2.$$

Из граничных условий (4.16) для верхнего кольца определим C_2 и D_2 :

для $E\psi$:

$$0 - 2968,1C_2 - 2311,7D_2 = 717,5 + 11965,8D_2;$$

для σ :

$$-1243,7 + 107,96C_2 - 13,31D_2 = -332,4 - 244,6C_2 + 244,6D_2$$

Решая, находим:

$$C_2 = 2,212кН / м; \quad D_2 = -0,510кН / м.$$

Усилия краевого эффекта на верхнем крае купола ($\varphi_2 = 0$) определяем, с учетом полученных значений C_2 и D_2 , по формулам (4.15):

$$\overline{M}_1 = -\frac{24,46^3 \cdot 10^{-2}}{6(1 - 0,16^2) \cdot 35} \cdot 1 \cdot (2,212 - 0,51) \cdot 1 = -1,22кНм / м;$$

$$\overline{N}_1 = 5,671 \cdot 1 \cdot 2,212 = 12,54кН / м;$$

$$N_2 = -24,46 \cdot 1 \cdot (0,51 + 2,212) = -24,46 \cdot 2,722 = -66,58кН / м$$

Определим экстремальное значение изгибающего момента M_1 .

Из (4.15) находим:

$$\frac{dM_1}{d\varphi_2} = 0. \rightarrow tgk\varphi_2 = 4,34. \rightarrow k\varphi_2 = 77,02^0 = 1,34рад. \rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi_2 = \frac{77,02^0}{24,46} = 3,15^0.$$

Экстремальное значение момента M_1 определяем ($k\varphi_2 = 1,34рад$):

$$M_{1экстр} = -0,715 \cdot 0,2618[1,702 \cdot \cos 77,02^0 - 2,722 \cdot \sin 77,02^0] = 0,43кНм / м$$

Найдем из (4.15) значение угла φ_2 , соответствующего $M_1 = 0$:

$$M_1 = 0. \rightarrow gk\varphi_2 = \frac{1,702}{2,722} = 0,625. \rightarrow k\varphi_2 = 32^\circ. \rightarrow \\ \rightarrow \varphi_2 = \frac{32^\circ}{24,46} = 1,3^\circ.$$

Вторая точка на меридиане, соответствующая нулевому значению момента M_1 , определяется углом $\varphi_1 = 1,3^\circ + \lambda = 1,3^\circ + 7,36^\circ = 8,66^\circ$.

Вторая точка, соответствующая экстремальному значению момента M_1 , определяется углом $\varphi_2 = 3,15^\circ + 7,36^\circ = 10,51^\circ. \rightarrow k\varphi_2 = 257,07^\circ = 4,48\text{рад}.$

$$M_{1_{\text{экстр}}} = -0,715 \cdot 0,0113 \cdot [1,702 \cdot (-0,2238) - 2,722 \cdot (-0,9746)] \approx \\ \approx -0,02 \text{ кНм} / \text{м}.$$

Значения изгибающего момента в локальной области у верхнего кольца жесткости приведены в табл. 4.

Таблица 4

φ_2	0°	$1,3^\circ$	$3,15^\circ$	$8,66^\circ$	$10,51^\circ$
φ	10°	$11,3^\circ$	$13,15^\circ$	$18,66^\circ$	$20,51^\circ$
M_1 [кНм/м]	-1,22	0	0,43	0	-0,02

Определим экстремальное значение кольцевого усилия N_2 .
Из (4.15) находим:

$$\frac{dN_2}{d\varphi_2} = k^2 e^{-k\varphi_1} [(-2D_2) \cos k\varphi_2 + 2C_2 \sin k\varphi_1] = 0, \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} k\varphi_2 = \frac{D_2}{C_2} = -\frac{0,51}{2,212} = -0,231. \rightarrow$$

$$\rightarrow k\varphi_2 = 167^0 = 2,913 \text{ рад}. \rightarrow \varphi_2 = \frac{167^0}{24,46} = 6,83^0.$$

Экстремальное значение кольцевого усилия N_2 находим ($k\varphi_2 = 2,91 \text{ рад}$):

$$N_{2\text{экстр}1} = -24,46 \cdot 0,0543 \cdot [2,722 \cdot (-0,9744) + 1,702 \cdot 0,2250] = 3,08 \text{ кН} / \text{м}.$$

Найдем из (4.15) значение угла φ_2 , соответствующего $N_2 = 0$:

$$N_2 = 0. \rightarrow g\varphi_2 = \frac{D_2 - C_2}{C_2 + D_2} = -\frac{2,722}{1,702} = -1,599. \rightarrow k\varphi_2 = 122^0. \rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi_2 = 4,99^0.$$

Вторая точка на меридиане, соответствующая нулевому значению кольцевого усилия N_2 , характеризуется углом $\varphi_2 = 4,99^0 + 7,36^0 = 12,35^0$.

Вторая точка, соответствующая экстремальному значению N_2 , характеризуется углом $\varphi_2 = 6,83^0 + 7,36^0 = 14,19^0$. $k\varphi_2 = 347,09^0 = 6,05 \text{ рад}$:

$$N_{2\text{экстр}2} = -24,46 \cdot 0,0024 \cdot [2,722 \cdot 0,9747 + 1,702 \cdot (-0,2234)] = -0,13 \text{ кН} / \text{м}.$$

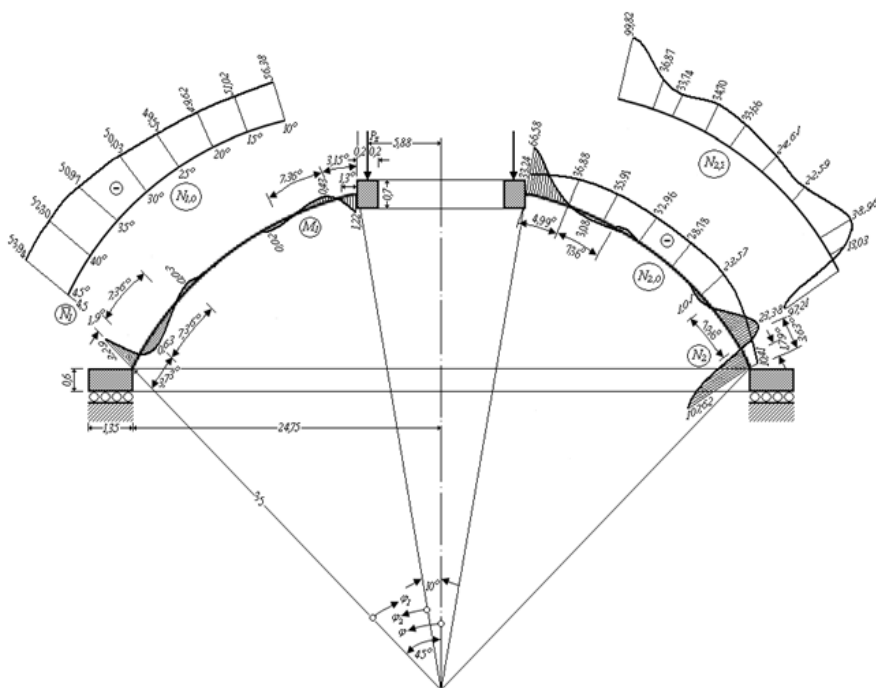


Рис. 5.5

Найдем сумму безмоментного решения (3.14) и краевого эффекта (4.15) усилия N_2 в локальной области у верхнего кольца жесткости (табл. 5).

Таблица 5

φ_2	0°	$4,99^\circ$	$6,83^\circ$	$12,35^\circ$	$14,19^\circ$
φ	10°	$14,99^\circ$	$16,83^\circ$	$22,35^\circ$	$24,19^\circ$
$N_{2,0}$	-33,24	-36,87	-36,82	-34,70	-33,53
N_2	-66,58	0	3,08	0	-0,13
$N_{2\Sigma}$	-99,82	-36,87	-33,74	-34,70	-33,66

Проверка прочности купола у нижнего края. Меридиональные напряжения:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_\alpha &= \frac{\bar{N}_{1,0} + \bar{N}_1}{h} \pm \frac{\bar{M}_1}{W} = \frac{-56,38 + 12,54}{0,1} \mp \frac{6 \cdot 1,22}{0,1^2} = \\ &= 0,29 \text{ МПа} < R_{bt} = 1,2 \text{ МПа} ;\end{aligned}$$

6. КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕРОПРИЯТИЯ.

Для устранения местных напряжений изгиба желательно располагать опорное кольцо ниже точки перехода. В этом случае в кольцевом направлении будут возникать растягивающие усилия и разность деформаций купола и опорного кольца станет меньше. С этой целью в пологом куполе следует выполнить переходную кривую с увеличивающейся кривизной (*рис. 6.1*).

Оптимально работают полушаровые купола, а также эллиптические и очерченные по коробовым кривым с вертикальными касательными у опор.

Необходимо избегать всяких переломов в меридиональном направлении или смягчать их переходными кривыми.

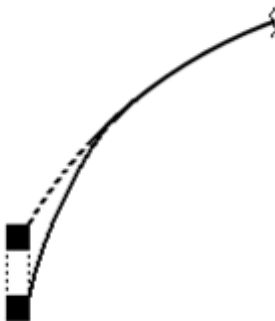


Рис. 6.1

Исследования показывают, что в куполе могут возникать значительные температурные напряжения. Для уменьшения негативного действия изменения температуры целесообразно постепенно увеличивать толщину купола к опорному кольцу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: «Машиностроение», 1977. – 488 с.
2. Бутенко Ю.И. и др. Строительная механика стержневых систем и оболочек. – Киев.: Изд-во «Вища. школа», 1980. – 488 с.
3. Жемочкин Б.Г. Теория упругости. – М.: Госстройиздат, 1957. – 256 с.
4. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. – М.: Изд-во «Высшая школа», 1972. – 296 с.
5. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Ленинград: Судпромгиз, 1962. – 431 с.
6. Огибалов П.М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. – М.: Изд-во МГУ, 1969. – 695с.
7. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 640 с.
8. Филин А.П. Элементы теории оболочек. – Ленинград: Стройиздат, 1975. – 256 с.