ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Физика»

ВИРТУАЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ

Лабораторная работа № 1-В

Виртуальное моделирование теории случайных блужданий на примере броуновского движения

«ФИЗИКА»

Авторы
Жданова Т.П.,
Кудря А.П.
Лемешко Г.Ф.,
Пруцакова Н.В.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Методические указания содержат краткое изложение теории броуновского движения, описание виртуального эксперимента с броуновскими частицами, порядок выполнения работы. Показана общность теории случайных процессов не только в естествознании, но и в финансовой статистике и экономике.

Методические указания предназначены для студентов младших курсов, изучающих физику.

Авторы

Жданова Т.П. - к.ф.-м.н., доцент кафедры «Физика»

Кудря А.П. - старший преподаватель кафедры «Физика»

Лемешко Г.Ф. - к.ф.-м.н., доцент кафедры «Физика»

Пруцакова Н.В. - к.ф.-м.н., доцент кафедры «Физика»

Оглавление

Цель работы: Исследование броуновского движения в рамках виртуального моделирования беспорядочных столкновений молекул о броуновскую частицу. Демонстрация общности теории случайных блужданий как одного из типов случайных процессов в физике и в финансовой экономике.

Оборудование: персональный компьютер с программным обеспечением.

Краткая теория

Броуновское движение — беспорядочное движение микроскопических видимых взвешенных частиц твёрдого вещества в жидкости или газе, вызываемое тепловым движением частиц жидкости или газа.

В 1829 году британский ботаник Р. Броун, наблюдая под микроскопом взвешенную в воде цветочную пыль, обнаружил, что частицы пыли находятся в непрерывном беспорядочном движении. Закономерности, связанные с броуновским движением, были обоснованы теоретически А. Эйнштейном в 1905 году. Позднее американский математик Н. Винер построил строгую математическую модель, описывающую броуновское движение, которое называют еще и винеровским процессом. Понятие случайного (стохастического) процесса является расширением понятия случайной величины. Можно сказать, что случайный процесс – это семейство случайных величин, эволюционирующих во времени. За пять лет до Эйнштейна в 1900 году французский математик Л. Башелье предпринял попытку описать стоимость акций как случайный процесс. Хотя его рассуждения не обладали математической строгостью и содержали ошибочное допущение, что цены акций могут быть отрицательными, он был первым, кто заметил, что при малых промежутках времени Δt приращения $\Delta S(t)$ цены акций ведут себя как $\sqrt{t}$:

$$\langle \Delta S^2(t) \rangle = K \Delta t \ . \qquad (1)$$

Это позволило через 65 лет американскому экономисту П.Самуэльсону для описания эволюции стоимости акций $S(t)$ ввести так называемое геометрическое (он также писал «экономическое») броуновское движение.

Несмотря на общность теории случайных блужданий, как одного из типов случайных процессов, мы рассмотрим только случайное блуждание броуновской частицы в рамках молекулярно-кинетического объяснения, предложенного в 1905 г. А. Эйнштейном и независимо в 1906 г. польским физиком М. Смолуховским.

Сущность этого движения в следующем. Частицы вместе с молекулами жидкости образуют единую статистическую систему. В соответствие с теоремой о равнораспределении по степеням свободы на каждую степень свободы броуновской частицы приходится энергия $\frac{kT}{2}$.

Энергия $\frac{3}{2}kT$, приходящаяся на три поступательные степени свободы, приводит к движению ее центра масс, которое и наблюдается под микроскопом в виде дрожания. Если броуновская частица достаточно жестка и ведет себя как твердое тело, то еще $\frac{3}{2}kT$ энергии приходится на ее вращательные степени свободы. Поэтому при своем дрожащем движении она испытывает также и постоянные изменения ориентировки в пространстве.

Уравнивание средних кинетических энергий происходит вследствие беспорядочных столкновений между частицами, а движение каждой из частиц в результате столкновений является случайным процессом.

Если время наблюдения t достаточно велико, чтобы силы, действующие на частицу со стороны молекул среды, много раз меняли свое направление, то средний квадрат проекции ее смещения $\langle \Delta x^2 \rangle$ на какую либо ось (в отсутствии других внешних сил) пропорционален времени t (закон Эйнштейна):

$$\langle \Delta x^2 \rangle = 2Dt, \qquad (2)$$

где D – коэффициент диффузии броуновской частицы. (Обратите внимание на подобие закона Эйнштейна (2) формуле Башелье (1)). Для сферических частиц радиусом a:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}, \qquad (3)$$

где T – абсолютная температура, η - динамический коэффициент вязкости среды.

При выводе закона Эйнштейна предполагается, что смещения частицы в любом направлении равновероятны и, что можно пренебречь инерцией броуновской частицы по сравнению с влиянием сил трения (это допустимо для достаточно больших промежутков времени наблюдения t). Обратим внимание, что в виртуальном эксперименте с помощью компьютера достаточно сложно учесть все отмеченные выше предположения прежде всего из-за невозможности промоделировать столкновения с огромным количеством молекул, что может приводить к некоторым незначительным отклонениям от линейной зависимости $\langle \Delta x^2 \rangle$ от t. Напомним, что в одном моле среды содержится огромное количество молекул, равное числу Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} моль^{-1}$.

Формула для коэффициента D основана на применении формулы Стокса для гидродинамического сопротивления движению сферы радиусом a в вязкой жидкости

$$F_V = r\upsilon = 6\pi a\eta\upsilon, \tag{4}$$

где $r = 6\pi a\eta$ - коэффициент гидродинамического сопротивления движению сферы радиусом a в вязкой жидкости.

Соотношения для $\langle \Delta x^2 \rangle$ и D были экспериментально подтверждены измерениями французского физика Перрена и шведского физика Сведберга. Из этих измерений экспериментально определены постоянные Больцмана k и Авогадро N_A.

Виртуальный эксперимент также позволяет определить постоянную Авогадро и оценить точность ее измерения в зависимости от числа виртуальных молекул, используемых при моделировании реального эксперимента.

Кроме поступательного броуновского движения существует, как мы указывали раньше, также и вращательное броуновское движение – беспорядочное вращение броуновской частицы под влиянием ударов молекул среды. Для вращательного броуновского движения среднее квадратичное угловое смещение частицы $\langle \Delta\varphi^2 \rangle$ пропорционально времени наблюдения

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle = 2D_{вр}t, \tag{5}$$

где $D_{вр}$ - коэффициент диффузии вращательного броуновского движения, равный для сферической частицы: $D_{вр} = kT/8\pi\eta a^3$. Эти соотношения были также подтверждены опытами Перрена, хотя данный эффект гораздо труднее наблюдать, чем поступательное броуновское движение.

Теория броуновского движения исходит из представления о движении частицы под влиянием «случайной» обобщенной силы $f(t)$, которая описывает влияние ударов молекул и в среднем равна нулю, систематической внешней силы F_x, которая может зависеть от времени, и силы трения, возникающей при движении частиц в среде со скоростью υ_x. Итак, теория броуновского движения строится на общей теории случайных блужданий и может рассматриваться как один из частных случаев случайных процессов.

Уравнение случайного движения броуновской частицы (Ланжевена уравнение) имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} = F_x + f(t), \tag{6}$$

где m – масса частицы (или, если x – угол, ее момент инерции), r – коэффициент трения при движении частицы в среде. Для достаточно больших промежутков времени ($t \gg m/r$) инерцией (т.е. членом $m\dfrac{d^2x}{d^2t}$) можно пренебречь и, проинтегрировав уравнение Ланжевена при условии, что среднее произведение импульсов случайной силы для неперекрывающихся промежутков времени равно нулю, найти средний квадрат флуктуаций $\langle \Delta x^2 \rangle$, т.е. вывести соотношение Эйнштейна (3).

В более общей задаче теории броуновского движения последовательность значений координат и импульсов частиц через равные промежутки времени рассматривается как марковский случайный процесс. Математической моделью броуновского движения является винеровский случайный процесс, что и позволяет теорию случайных блужданий броуновской частицы применять не только в физике, но и в других естественных науках, например в химии и метрологии и даже в социальных науках, например, в финансовой статистике и экономике.

В метрологии броуновское движение рассматривают как основной фактор, ограничивающий точность чувствительных измерительных приборов.

В рамках финансового рынка «экономическое» броуновское движение явилось одной из первых попыток учесть флуктуации (неопределенности) финансового рынка.

О программе

Программа выводит на монитор анимацию броуновского движения и в хорошем приближении повторяет опыт Перрена по определению постоянной Авогадро по формуле Эйнштейна.

Функциональные особенности программы

После загрузки программы на экране монитора появляется активное окно, изображение которого представлено в уменьшенном формате (рис.1).

С помощью регуляторов «Температура» и «Время наблюдения» установить температуру газа и время одного перемещения частицы. Ввод данных параметров в ЭВМ и запуск программы осуществляется нажатием клавиш «Применить» и «Активизировать».

Активное окно разделено на четыре части (рис.1). В левой верхней части демонстрируется движение броуновской частицы. В правой верхней части на миллиметровую сетку наносится траектория броуновской частицы. В левой нижней части активного окна приводится гистограмма квадратов перемещений частицы в процессе всего эксперимента. В правой нижней части окна отображается график зависимости квадратов перемещений от времени наблюдения. Внизу, на стыке графиков, в окошке выводится значение постоянной Авогадро, вычисляемой ЭВМ по формуле Эйнштейна для каждых десяти перемещений броуновской частицы.

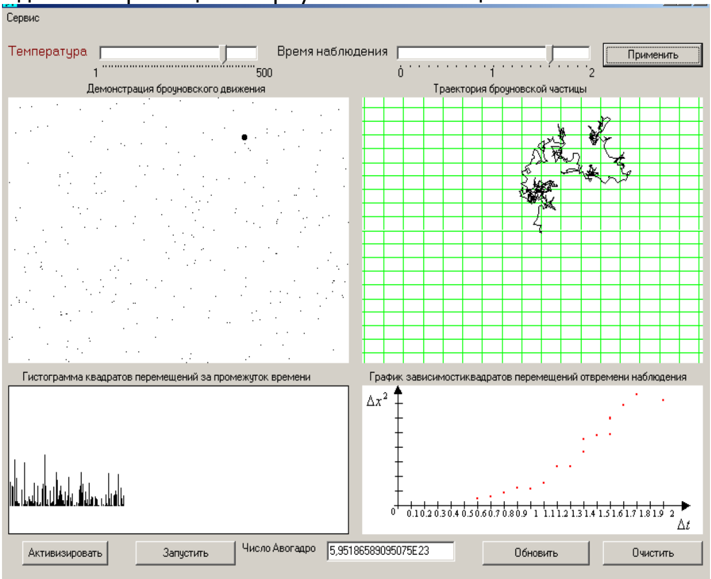


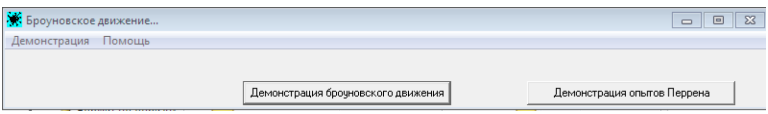
Рис.1

Остановить работу программы можно после нажатия клавиши «Остановить», а продолжить ее работу с прежними параметрами – после нажатия клавиши «Запустить». Если броуновская частица выйдет за пределы поля зрения (о чем будет сообщение, и программа приостановит свою работу), то возобновить работу программы с прежними параметрами можно после нажатия на клавишу «Активизировать».

Содержимое экрана при этом стирается. Работа программы с новыми параметрами «Температура» и «Время наблюдения» возможна после установки этих параметров и нажатия клавиши «Применить».

Подготовка к работе

1. Открыть папку «Broun» и файл «врр.exe».
2. В появившемся активном окне нажать клавишу «Демонстрация броуновского движения».



3. Нажать клавишу «Активизировать» и убедиться в работе программы.
4. Последовательно нажать клавиши «Остановить» и «Очистить».
5. С помощью мыши поднять активное окно примерно на высоту строки задач.

Выполнение работы

1. Движок регулятора «Температура» установить на 300 – 400 К, что соответствует примерно ¾ шкалы регулятора.
2. Движок регулятора «Время наблюдения» установить в правое крайнее положение, т.е. на цифру 2.

<u>Примечание.</u> Интервалы времени наблюдения не реальны, а определяются быстродействием ЭВМ. Условимся считать одно деление шкалы «Время наблюдения» равным 0,1 с.

3. Нажать клавиши «Применить» и «Запустить» и примерно через 10 с работу программы остановить клавишей «Остановить».
4. Записать значение постоянной Авогадро.
5. Движок регулятора «Время наблюдения» последовательно устанавливать от цифры 2 до 1,1 через 0,1 деления и повторять пункты 3 и 4 для каждого положения движка.
6. Полученные десять значений постоянной Авогадро занести в таблицу отчета.
7. Вычислить среднее значение постоянной Авогадро $< N_A >$.

№№ пп	t, с	N_A x10^{23}, моль$^{-1}$	ΔN_A x10^{23}, моль$^{-1}$	δ, %
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
среднее				
$(N_A)_{ТАБЛ.} = 6,02 \cdot 10^{23} моль^{-1}$				

8. Вычислить абсолютные погрешности отдельных измерений по формуле $\Delta N_{Ai} = \left| < N_A > - N_{Ai} \right|$.

9. Вычислить среднее значения абсолютной погрешности $<\Delta N_A>$.

10. Вычислить среднее значения относительной погрешности

$$\delta = \frac{<\Delta N_A>}{<N_A>} 100\% .$$

11. Результаты измерений представить в виде:

$$N_A = <N_A> \pm <\Delta N_A> .$$

12. Полученное среднее значение постоянной Авогадро сопоставить с табличным значением:

$$\delta = \frac{\left| <N_A> - (N_A)_{ТАБЛ.} \right|}{(N_A)_{ТАБЛ.}} 100\% .$$

Сделать вывод.

Контрольные вопросы

1. Что называется броуновским движением?
2. Как объясняет молекулярно – кинетическая теория броуновское движение?
3. Какие зависимости физических величин в броуновском движении устанавливает формула Эйнштейна?
4. В чем состоит идея опыта Перрена по определению постоянной Авогадро?

Список литературы

1. Трофимова Т. И. Курс физики.- М.: Высш. шк., 2016
2. Грабовский Р.И. Курс физики - СПб.: Лань, 2012