ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «ФИЗИКА»

Виртуальный практикум

Лабораторная работа № 23-В

СВОБОДНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Авторы
Жданова Т.П.
Кудря А.П.
Лемешко Г.Ф.
Холодова О.М.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Практикум содержит краткое изложение теории механических колебаний, метод векторных диаграмм, а также описание виртуального эксперимента, позволяющего моделировать затухающие и незатухающие механические колебания на примере пружинного маятника.

Методические указания предназначены для организации самостоятельной работы студентов при подготовке и проведении учебного виртуального эксперимента.

Авторы

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Физика»
Жданова Т.П.
ст. преподаватель кафедры «Физика»
Кудря А.П.
к.ф.-м.н., доцент кафедры «Физика»
Лемешко Г.Ф.
ст. преподаватель кафедры «Физика»
Холодова О.М.

Оглавление

Цель работы: 1) познакомиться с методом векторных диаграмм;
2) рассмотреть кинематику и динамику затухающих и незатухающих колебаний.

Краткая теория

► *Колебаниями* называются процессы, отличающиеся той или иной повторяемостью. В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания: механические, электромагнитные, и т.д. Рассмотрим механические колебания.

Силу, под действием которой происходит колебательный процесс, называют *возвращающей силой*, так как она стремится вернуть тело или материальную точку в положение равновесия.

Свободные колебания совершаются системой, выведенной из положения равновесия.

Собственными называются свободные колебания без учёта сил сопротивления (без затухания).

Простейшими являются *гармонические колебания*, при которых колеблющаяся величина (например, отклонение маятника) изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

►*Гармонические колебания*

Гармонические колебания удобно представить в виде круговой диаграммы (рис.1). Пусть точка B движется по окружности радиусом A. Её положение задаётся радиус-вектором $\vec{A}$. Положение равновесия задаётся точкой O. Радиус-вектор $\vec{A}$ равномерно вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$. Проекции радиус-вектора $\vec{A}$ на оси OX или OY задаются математическими выражениями (уравнениями) гармонических колебаний:

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) \quad (1)$$

$$y = A\sin\left(\omega_0 t + \phi\right) \quad (2)$$

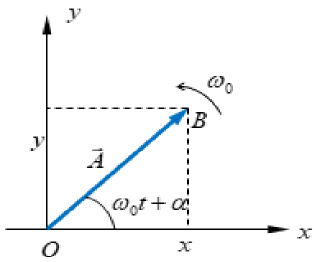

Рис. 1

Будем использовать уравнение гармонических колебаний в виде (1). Координата x задаёт значение колеблющейся величины. Величина A – *амплитуда колебаний*, т.е. максимальное отклонение колеблющейся точки от положения равновесия. Величина ω_0, равная числу колебаний за время 2π секунды, называется *циклической частотой.* Аргумент косинуса $(\omega_0 t + \varphi)$, называется *фазой* колебаний, φ - *начальная фаза* колебаний. Время одного полного колебания T_0 называется *периодом колебаний.* Число колебаний ν_0 за время, равное одной секунде, называется *частотой* колебаний, $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 2\pi / T_0$ - циклическая частота.

Скорость колеблющейся точки находится дифференцированием выражения (1) по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi). \qquad (3)$$

Дифференцируя вторично, получаем ускорение:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (4)$$

Выведем дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Из выражений (1) и (4) следует:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0\ . \qquad (5)$$

Уравнение (5) является *дифференциальным уравнением* гармонических колебаний. Это уравнение является общим уравнением, описывающим гармонические колебания. Его решением являются функции (1) или (2). Следовательно, можно сказать, что *гармоническими* называются колебания, совершаемые по закону синуса или косинуса.

► *Пружинный маятник (рис. 2)*

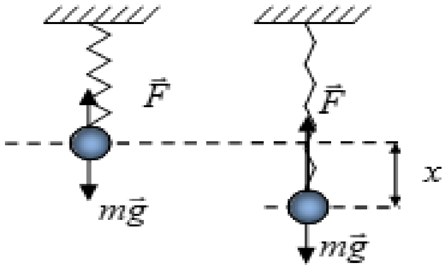

Рис.2

Пружинный маятник – система, состоящая из пружины жёсткостью k, с подвешенным к ней грузом массой m.

Применим к движению груза на пружине второй закон Ньютона:

$ma_x = -F_x$, где $F_x = -kx$ - сила упругости:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), получаем:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (7)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (8)$$

Мы нашли собственную циклическую частоту (7) и период колебаний (8) груза на пружине.

► *Физический маятник (рис. 3)*

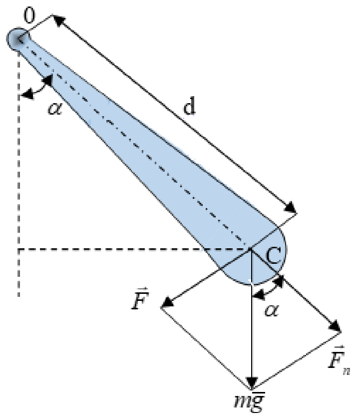

Рис.3

Физическим маятником называется твердое тело, колеблющееся относительно неподвижной горизонтальной оси (оси подвеса), не проходящей через центр тяжести. При небольших углах отклонения физический маятник совершает гармонические колебания. Сила, возвращающая маятник в положение равновесия, представляет собой составляющую силы тяжести, приложенную в точке C:

$$F = mg\sin\alpha$$

Момент этой силы относительно оси O равен:

$M = Fl = -mg \cdot d \cdot \sin\alpha$, где $l = d\sin\alpha$ - плечо силы F относительно оси O, знак минус соответствует тому, что момент M стремится вернуть маятник в положение равновесия, аналогично квазиупругой силе.

В соответствии с уравнением динамики вращательного движения

$M = I\varepsilon$, где $\varepsilon = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$ - угловое ускорение, I - момент инерции маятника относительно оси *O.* Получаем

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgd\sin\alpha\,. \qquad (9)$$

Ограничившись малыми колебаниями $(\sin\alpha \sim \alpha)$, после преобразований получаем уравнение (9) в виде:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\alpha = 0. \qquad (10)$$

Сравнив выражения (5) и (10), мы видим их математическую аналогию, что позволяет записать выражения для циклической частоты и периода колебаний физического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}, \qquad (11)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}, \qquad (12)$$

где d -расстояние от центра тяжести до оси вращения.

► *Математический маятник (рис. 4)*

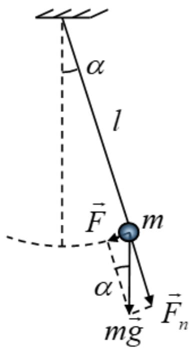

Рис.4

Математический маятник является частным случаем физического маятника. *Математическим маятником* называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, к которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке. Примером математического маятника может служить шарик, подвешенный на длинной нити. В случае математического маятника $d = l$, $I = ml^2$,где l -длина математического маятника. Тогда формулы (11) и (12) запишутся в виде:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad (13)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ . \qquad (14)$$

Приведенной длиной физического маятника называется длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Сравнивая формулы (12) и (14), получаем:

$$l_{np} = \frac{I}{md} \ -$$

приведенная длина физического маятника.

►В любой момент времени кинетическая и потенциальная энергии определяются соответственно уравнениями:

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) \ , \qquad (15)$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) \ . \qquad (16)$$

Полная механическая энергия маятника равна сумме кинетической и потенциальной энергий: $E = \dfrac{m\omega_0^2 A^2}{2}$.

Таким образом, при незатухающих колебаниях происходит переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно, а полная механическая энергия с течением времени не изменяется.

►*Затухающие колебания*

Затухающие колебания возникают при наличии сил сопротивления (трения) и обусловлены рассеянием (диссипацией) энергии. В простейшем, и вместе с тем, наиболее часто встречающемся, случае сила сопротивления пропорциональна величине скорости:

$$F_{conp} = -r\frac{dx}{dt} \ , \qquad (17)$$

где r - коэффициент сопротивления, зависящий от свойств среды и формы тела. Знак минус обусловлен тем, что сила сопротивления и скорость имеют противоположные направления, следовательно, их проекции на ось x имеют разные знаки.

Запишем уравнение второго закона Ньютона для движения груза на пружине при наличии сил сопротивления:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}. \qquad (18)$$

Введя обозначения: $2\beta = r/m, \omega_0^2 = k/m$, получим однородное дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (19)$$

где β - коэффициент затухания, ω_0 - собственная частота колебаний.

Решение уравнения (19) ищется в виде:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi),$$

где $A = A_0 e^{-\beta t}$ - амплитуда затухающих колебаний, A_0 – амплитуда в начальный момент времени, φ - начальная фаза, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - частота затухающих колебаний.

Степень убывания амплитуды определяется коэффициентом затухания. За время $\tau = 1/\beta$ амплитуда уменьшается в e раз - это время называется *временем релаксации* колебаний.

Логарифмическим декрементом затухания χ **-** натуральный логарифм отношения двух соседних амплитуд:

$$\chi = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta \cdot T. \qquad (20)$$

Для характеристики колебательной системы также вводят величину, называемую *добротностью колебательной системы:*

$$Q = \frac{\pi}{\chi}. \qquad (21)$$

Период затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Из этой формулы следует, что с ростом коэффициента затухания период колебаний увеличивается. При $\beta \geq \omega_0$ движение перестаёт быть периодическим, происходит срыв колебаний, или движение носит апериодический (непериодический) характер - выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний.

Потерю механической энергии при затухании можно определить по разности максимальных энергий за определенный промежуток времени:

$$\Delta E = E_{\max}(\mathrm{t}) - E_{\max}(\mathrm{t}_0) \quad , \tag{22}$$

Долю потерянной энергии за выбранный промежуток времени $\Delta\, \mathrm{t}$ вычисляют по формуле

$$\delta = \frac{|\Delta E|}{E_{\max}(t_0)} . \tag{23}$$

О программе

Программа позволяет моделировать затухающие и незатухающие механические колебания на примере пружинного маятника. Свободные колебания маятника сопровождаются синхронным вращением векторной диаграммы и временной разверткой основных кинематических характеристик маятника.

Проведение эксперимента

Задание1*. Исследование незатухающих механических колебаний*

1. Открыть папку «Son» и файл «Мех.кол».
2. На экране появляется панель, изображённая на рис.5.

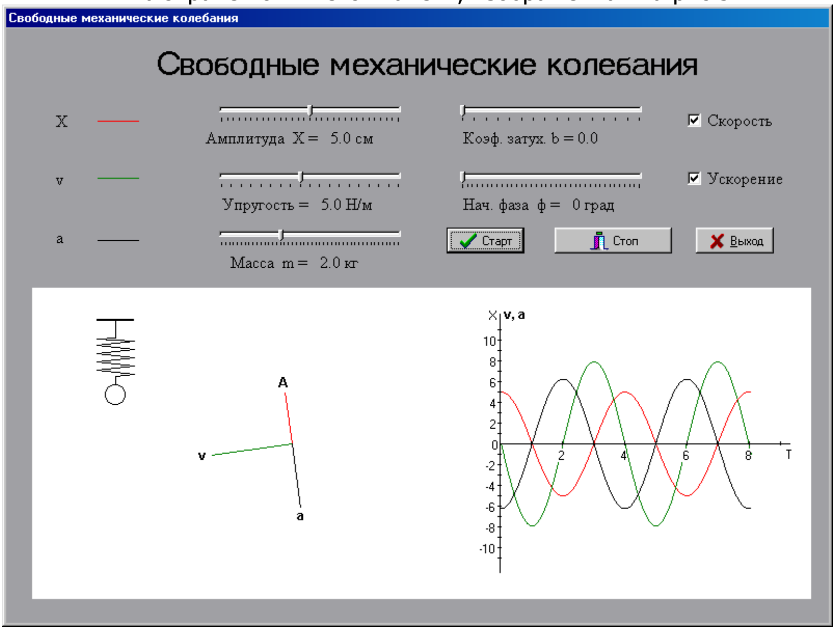

Рис.5

3. С помощью регуляторов, расположенных на рабочей панели, установить: амплитуду колебаний $A = x_m = 5см$; жёсткость пружины $k = 5Н/м$; массу маятника $m = 2кг$; коэффициент затухания $\beta = 0$; начальную фазу $\varphi = 0$.
4. Нажатием клавиши «Старт» запустить программу в работу.
5. В процессе работы программы установить флажок в окошке «скорость», а затем – в окошке «ускорение». Обратите внимание на вращающуюся в фазовой плоскости векторную диаграмму, фазовые соотношения между векторами амплитуды, скорости и ускорения и на временную развертку проекций этих векторов.
6. Останавливают работу программы клавишей «Стоп».
7. Записать законы, используя уравнения (1),(3),(4),(15),(16), по которым изменяются:
   - $x(\mathrm{t})$ - смещение маятника относительно положения равновесия,
   - $\upsilon(\mathrm{t})$ - скорость маятника,
   - $a(\mathrm{t})$ - ускорение маятника,
   - $\mathrm{E}_k(\mathrm{t})$ - кинетическая энергия маятника,
   - $\mathrm{E}_p(\mathrm{t})$ потенциальная энергия маятника.
8. По формуле (8) вычислить механическую энергию пружинного маятника, а по формуле (7) – его максимальную скорость.
9. По выполненному заданию сделать вывод.

Задание 2*. Исследование затухающих механических колебаний*

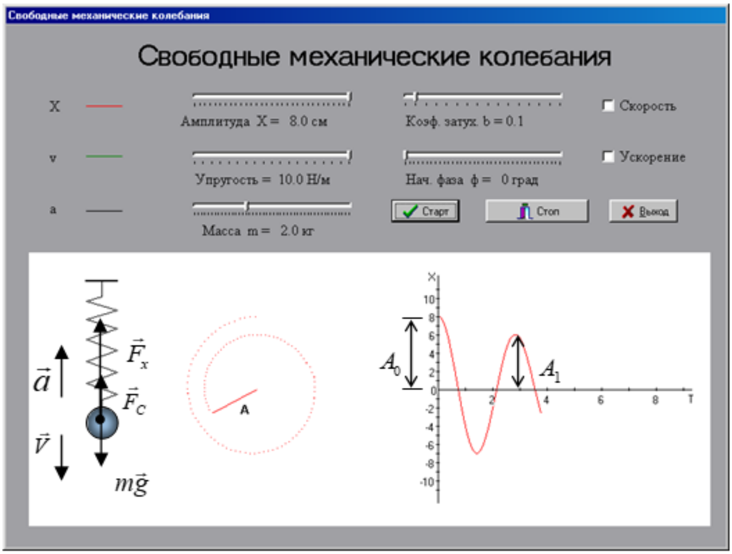

Рис.6

Запуск программы осуществляется клавишей «Старт», а завершение работы - клавишей «Стоп».

1. С помощью регуляторов установить:
   - начальную амплитуду колебаний A_0 =8 см;
   - упругость пружины k =10Н/м;
   - массу маятника m =1кг;
   - начальную фазу $\varphi = 0$;
   - коэффициент затухания изменять в интервале $\le 0,1 \le \beta \le 0,7$ с шагом 0,1.

2. Для каждого значения коэффициента затухания β измерить период T и амплитуду A_1 через время, равное периоду и вычислить:

- циклическую частоту ω по формуле $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$;
- логарифмический декремент затухания, по формуле $\chi = \beta T$;
- максимальные потенциальные энергии маятника в

момент времени $t_0 = 0$ и $t = T$ по формулам:

$$E(\mathrm{t}_0) = \frac{m\omega^2 A_0^2}{2}, \quad E(\mathrm{t}) = \frac{m\omega^2 A_1^2}{2};$$

- потерю механической энергии ΔE за период колебаний по формуле (22);
- долю δ потерянной энергии за период, по формуле (23).

3. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу

$A_0 =$					$m =$				
	β	T	A_1	ω	χ	$E(\mathrm{t}_0)$	$E(\mathrm{t})$	ΔE	δ
	-	с	мм	рад/с	-	Дж	Дж	Дж	
1	0,1								
2	0,2								
3	0,3								
4	0,4								
5	0,5								
6	0,6								
7	0,7								

5. Построить графики зависимостей $\Delta E(\beta)$, $\delta(\beta)$ и $\chi(\beta)$.
6. По выполненному заданию сделать вывод.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются свободными, собственными, затухающими?
2. Какие колебания называются гармоническими?
3. Записать уравнение гармонических колебаний с пояснением всех величин, входящих в уравнение.
4. Что такое векторная диаграмма?
5. Дать определение пружинного маятника. Записать период колебаний.
6. Дать определение математического маятника. Записать период колебаний.
7. Дать определение физического маятника. Записать период колебаний.
8. Что называется приведённой длиной физического маятника?
9. Какие энергетические преобразования имеют место при свободных колебаниях пружинного маятника?
10. Записать уравнение затухающих колебаний с пояснением всех величин, входящих в уравнение.
11. Что называется логарифмическим декрементом затухания?

Список литературы

1. Трофимова Т. И. Курс физики.- М.: Высш. шк., 2016
2. Грабовский Р.И. Курс физики - СПб.: Лань, 2012