ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Физика»

Учебно-методическое пособие

по выполнению контрольных работ по дисциплине

«Физика»

Авторы
Кривошеев Н.В.,
Бугаян И.А.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Пособие содержит краткую теорию, примеры решения задач по разделу «Механика. Молекулярная физика и термодинамика», контрольные задания (работы №1 и №2), соответствующие первой части двухсеместрового курса физики для обучающихся по заочной форме.

Авторы

к.ф.-м.н., проф. Кривошеев Н.В.,
к.т.н., доц. Бугаян И.А.

Оглавление

1. МЕХАНИКА

Механика – раздел физики, в котором рассматриваются законы изменения положения тел в пространстве или их частей друг относительно друга.

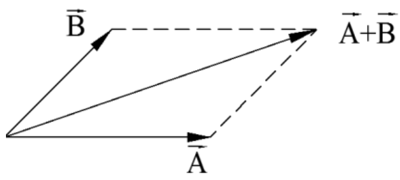
В физике приходиться оперировать не только скалярными, но и векторными величинами, что требует напомнить правила действия над ними

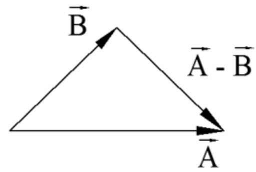
1.1. Вектора и действия над ними

Векторными называются величины, которые характеризуются своим численным значением и направлением в отличие от скалярных величин, которые определяются только численным значением.

Сложение и вычитание векторов

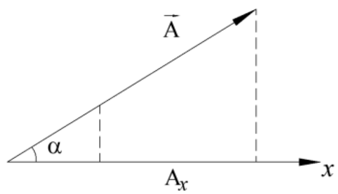
Правила сложения и вычитания векторов:





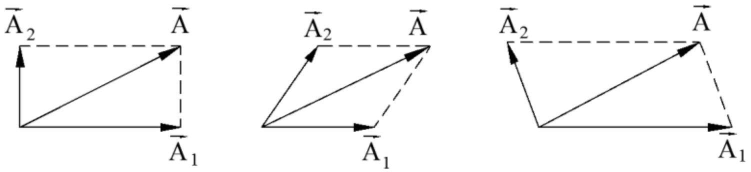
Проекция векторов

Проекцией вектора Ā на ось x называется величина Ax = Acosα, где A – модуль вектора Ā, α – угол между направлением вектора Ā и осью x.



Расположение вектора на составляющие

Вектор Ā может быть представлен в виде суммы двух (или более) слагаемых векторов, называемых составляющими данного вектора Ā:



<u>Умножение вектора на скаляр</u>

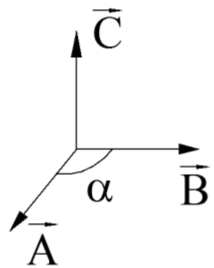
Произведением вектора Ā на скаляр k называется вектор $\overline{B}$. Модуль вектора $\overline{B}$ в | k | раз больше модуля вектора Ā (B = | k |A), а направление вектора $\overline{B}$ совпадает с направлением вектора Ā, если $k > 0$, и противоположно направлению вектора Ā, если $k < 0$.

<u>Скалярное произведение векторов</u>

Скалярным произведением двух векторов Ā и $\overline{B}$ является скалярная величина $(\overline{A}\ \overline{B}) = \overline{A}\cdot\overline{B} = AB\cos\alpha$, где α – угол между векторами $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

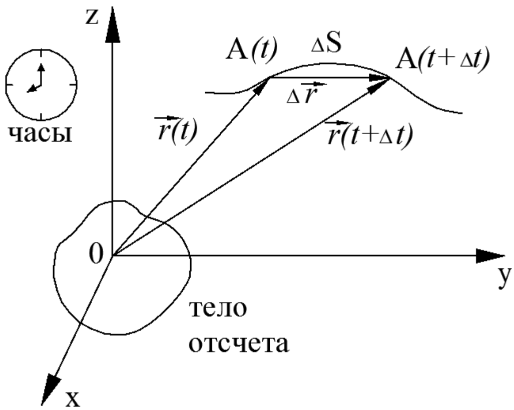
<u>Векторное произведение векторов</u>

Векторным произведением двух векторов $\overline{A}$ и $\overline{B}$ является вектор $\overline{C}$ ($\overline{C}=(\overline{A}\ \overline{B})=\overline{A}\cdot\overline{B}$), величина которого C=AB sinα (α – угол между векторами $\overline{A}$ и $\overline{B}$). Направление вектора $\overline{C}$ определяется по правилу правого винта.



1.2. Кинематика поступательного движения

Для определения положения тела в любой момент времени необходимо задать систему отсчета, т.е тело отсчета и связанную с этим телом систему координат, а также устройство для измерения времени (часы)



Траекторией называется линия, описываемая материальной точкой при ее движении.

В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движения.

Радиусом-вектором точки А называется вектор $\bar{r}$, проведенный из начала координат в эту точку А

Путь S – это расстояние, пройденное точкой вдоль траектории за рассматриваемый промежуток времени.

ΔS – элементарный участок траектории S, т.е расстояние, пройденное точкой за промежуток времени от t до t+Δt.

Вектором перемещения $\Delta\bar{r}$ точки за промежуток времени Δt называется изменение радиус-вектора $\bar{r}$ этой точки за время Δt .

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \qquad (1)$$

Средней скоростью в промежутке времени от t до t+Δt называется вектор $\bar{V}$, равный отношению вектора перемещения $\Delta\bar{r}$ ко времени Δt, за которое это перемещение произошло:

$$\vec{V}cp = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (2)$$

Направление средней скорости совпадает с направлением $\overrightarrow{\Delta r}$.

<u>Мгновенная скорость</u> $\vec{V}$ равна:

$$\bar{V}cp = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}, \qquad (3)$$

т.е первой производной радиус-вектора Δr по t:

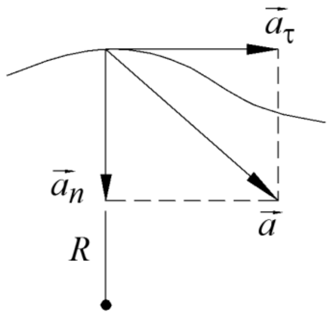
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad (4)$$

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной траектории точки в сторону ее движения.

<u>Ускорением</u> $\vec{a}$ называется вектор, равный первой производной мгновенной скорости $\vec{V}$ этой точки по времени t:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} \qquad (5)$$

Если материальная точка движется по плоской кривой, то вектор ускорения $\vec{a}$ этой точки лежит в данной плоскости и его удобно представить в виде суммы двух векторов: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$



Вектор $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории, а вектор $\vec{a}_n$ к центру кривизны траектории вдоль радиуса кривизны R

Модуль вектора полного ускорения *a*:

$$a = \sqrt{(a_\tau)^2 + (a_n)^2} \qquad (6)$$

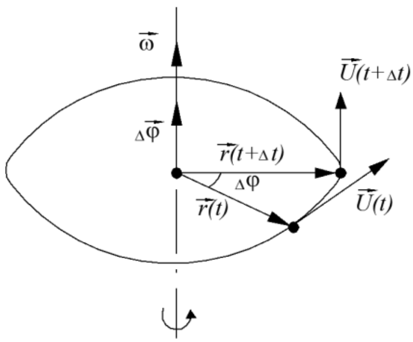
где $\vec{a}_\tau$ – тангенциальная составляющая ускорения, характеризующая изменение величины (модуля) мгновенной скорости в единицу времени;

$\vec{a}_n$ – нормальная составляющая ускорения, характеризующая изменение направления вектора скорости в единицу времени

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad \vec{a}_n = \frac{\vec{V}^2}{R}$$

1.3. Кинематика вращательного движения

При движении по окружности материальной точки изменение ее положения за промежуток времени Δt задается углом $\Delta\varphi$, на который поворачивается радиус-вектор $\vec{r}$.



Величина угловой скорости вращательного движения равна первой производной угла поворота φ по времени t :

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta\varphi}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt} \qquad (7)$$

Угловая скорость $\vec{\omega}$, как и величина $\overrightarrow{\Delta\varphi}$, является векторной величиной. Направление векторов $\overrightarrow{\Delta\varphi}$ и $\vec{\omega}$ задается правилом правого винта.

Время, за которое точка совершает один полный оборот, т.е. поворачивается на угол 2π, называется периодом вращения

Т, а число полных оборотов, совершаемых точкой за единицу времени, частотой вращения ν:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{8}$$

$$\nu = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \tag{9}$$

Направление вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$ при ускоренном вращательном движении и противоположно ему в случае замедленного вращения.

Линейная скорость $\overline{V}$ вращательного движения материальной точки связана с угловой скоростью вращения $\vec{\omega}$ соотношением:

$$\vec{V} = [\vec{\omega}\vec{r}], \quad V = \omega r \sin\alpha = \omega r \ (\alpha = 90^\circ);$$

По определению $\vec{\omega}$ тангенциальную $\vec{a}_\tau$ и нормальную $\vec{a}_n$ составляющие полного ускорения $\vec{a}$, можно выразить через $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{r}$

$$a_\tau = \varepsilon r \qquad a_n = \omega^2 r$$

В случае равномерного вращательного движения $\varepsilon = 0$, $\omega = const$, $\varphi = \omega t$

При равномерном переменном вращательном движении $\varepsilon = const, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$, где ω_0-начальная (во время t=0) угловая скорость, φ = угол поворота за время t.

1.4. Динамика поступательного движения

Динамика – раздел механики, в котором рассматриваются движения тел в сочетании с причинами, вызывающими эти движения.

Первый закон Ньютона

Среди всевозможных систем отсчета существуют такие системы, в которых, если на тело не действуют другие тела, то оно находится в состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Такие системы называются инерциальными.

Свойство тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется инертностью, а мерой инертности тел является масса тела *m*.

Второй закон Ньютона

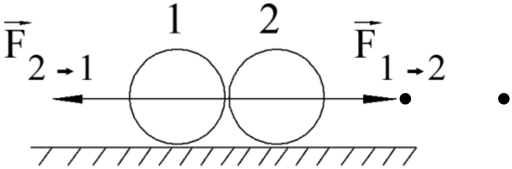
Если на тело массой *m* действуют другие тела с результативной силой $\vec{F}$, то это тело приобретает ускорение $\vec{a}$, совпадающее по направлению с действующей силой $\vec{F}$, а по величине прямо пропорциональное величине силы F и обратно пропорциональное массе данного тела m

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (10)$$

Учитывая, что величина m$\vec{V}$ является импульсом движения тела $\vec{P}$ и, следовательно, m$\vec{V}$ = $\vec{P}$, второй закон Ньютона можно записать в следующем виде: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$

Третий закон Ньютона

Силы, с которыми взаимодействуют друг с другом тела равным по величине и противоположны по направлению:



$$\left|\vec{F}_{2\to1}\right| = \left|\vec{F}_{1\to2}\right| \qquad (11)$$

Закон сохранения импульса

Сумма импульсов тел, составляющих замкнутую систему, остается постоянной. (Замкнутой называется система, в которой для каждого тела, входящего в нее, сумма действующих на это тело внешних сил равна нулю).

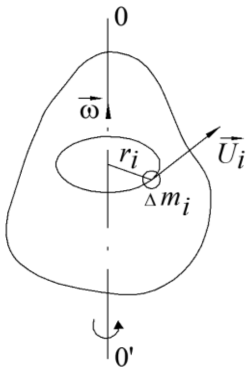
Центром масс (центром инерции) тела называется точка С, радиус-вектор которой определяется следующим образом:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i}, \; \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = m \qquad (12)$$

n – число элементарных масс Δm_i, на которое условно разбито тело массой *m*, причем каждый такой элемент массы Δm_i можно считать материальной точкой с радиусом-вектором $\vec{r}_i$.

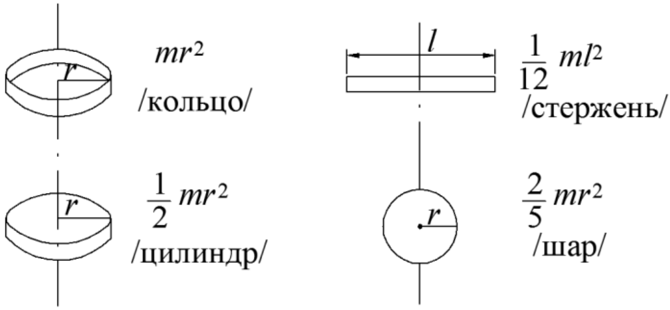
1.5 Динамика вращательного движения

При вращательном движении мерой инертности тела является его момент инерции *I*. Момент инерции *I* материальной точки массой *m*, находящейся на расстоянии r от оси вращения: $I=mr^2$, *n* – число элементарных масс Δm_i, r_i – радиус вращения элементарной массы Δm_i



При $n \to \infty$ и $\Delta m_i \to 0$ суммирование переходит в интегрирование по всему вращающегося тела: $I = \int r^2 dm$

Для некоторых тел правильной формы вычисления момента инерции относительно оси 00, проходящей через центр инерции С, дают следующие результаты:



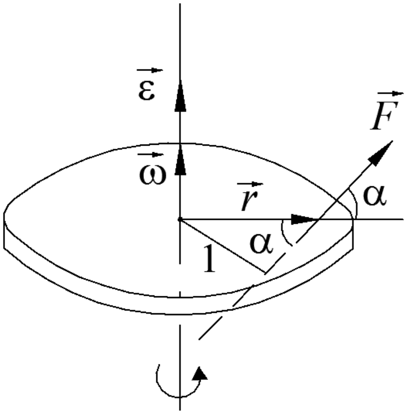
Момент инерции тела зависит от положения оси вращения относительно центра инерции тела. Эта зависимость определяется теоремой Штейнера: момент инерции I тела массы m относительно произвольной оси 00 равен моменту инерции I_c этого тела относительно оси 0_10_i параллельной оси 00 и проходящей через центр инерции C, плюс md^2, где d – расстояние между осями.

<u>Моментом силы</u> $\vec{F}$ относительно оси вращения называется векторная величина $\vec{M}$ равная векторному произведению: $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$

$$M = Fr\sin\alpha = Fl \tag{13}$$

l – плечо силы $\vec{F}$ относительно оси вращения, т.е кратчайшее расстояние от оси вращения до прямой, совпадающей с направлением действия силы $\vec{F}$.

<u>Основное уравнение динамики вращательного движения.</u> Согласно основному уравнению динамики вращательного движения угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ вращающегося тела прямо пропорционально сумме моментов $\vec{M}$ всех сил, действующих на это тело относительно оси вращения, и обратно пропорционально моменту инерции I тела относительно той же оси.



$$\vec{\varepsilon} = \frac{\overrightarrow{M}}{I},$$

Второй закон Ньютона для вращательного движения.

Моментом импульса тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и имеющего относительно оси вращения момент инерции I называется величина L:

$\vec{L} = I\vec{\omega}$ для случая I = const

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} \text{ – отсюда } \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\varepsilon} = \overrightarrow{M}$$

Если система замкнута, то $\overrightarrow{M} = 0$ $и$ $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ откуда следует, что $\vec{L} = I\vec{\omega}$=const. Последнее выражение представляет собой закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы с течением времени не меняется.

1.6. Энергия, работа, мощность

Кинетическая энергия поступательного движения

Согласно 2 закону Ньютона

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$$

Умножим обе части этого уравнения на перемещение $d\vec{S}$:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}d\vec{S} = \vec{S}\cdot d\vec{S} \text{ или } m\vec{V}\cdot d\vec{V} = \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Отсюда $d(\frac{m\vec{V}^2}{2}) = \vec{F}\cdot d\vec{S}.$

Для замкнутой системы $\vec{F} = 0$ величина $\frac{mV^2}{2}$ остается постоянной. Эта величина *T*= $\frac{mV^2}{2}$ является кинетической энергией поступательного движения тела.

Если на тело действует внешняя сила $\vec{F}$, то кинетическая энергия *T* будет меняться

$$dT = \vec{F}\cdot d\vec{S} = dA, \qquad (14)$$

где dA – работа силы $\vec{F}$ на пути $d\vec{S}$.

Работа

Если под действием силы $\vec{F}$ тело перемещается на элементарном участке пути $\Delta\vec{S}$, то на этом участке силой $\vec{F}$ совершается элементарная работа ΔA

$\Delta A = \Delta\vec{S}\ \vec{F} = \vec{F} \cos a\ \Delta\vec{S}$

На всем участке пути от точки 1 до точки 2, условно разбитом на n элементарных участков ΔS_i силой $\vec{F}$ совершается работа *A*, определяемая суммированием

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_1^2 F\cos\alpha\, dS \qquad (15)$$

Кинетическая энергия вращательного движения

Кинетическая энергия T вращения элементарной массы Δm_i (одной из частиц на которое условно разбито тело массой *m*) движущейся с линейной скоростью V_i равна:

$$T = \frac{\Delta m_i \cdot V_i^2}{2} \tag{16}$$

Кинетическая энергия всего тела:

$$\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i V_i^2}{2} \tag{17}$$

Учитывая, что угловая скорость ω у всех частиц, из которых состоит вращающееся тело одна и та же, можно записать:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^{\ 2} = \frac{I\omega^2}{2}$$

где $I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2$ – *момент инерции тела.*

Работа при вращении тела

Если под действием силы $\vec{F}$ тело поворачивается на элементарный угол $\Delta\varphi$, то при этом совершается элементарная работа:

$$\Delta A = M \Delta\varphi, \tag{18}$$

где M – момент силы $\vec{F}$ относительно оси вращения.

Работа A при повороте вращающегося тела от положения 1 до положения 2 определяется суммированием элементарных работ ΔA_i, совершенных при элементарных поворотах на $\Delta\varphi_i$, а в пределе при $\Delta\varphi_i \to 0$ работа определяется интегрированием:

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 M d\varphi.$$

Мощность

Мощность N есть величина, равная отношению работы dA к промежутку времени dt, за который она совершена $N = dA/dt$

Потенциальная энергия

Если на частицу в каждой точке пространства действует сила, то это означает, что частица находится в поле сил или в силовом поле.

Силы, работа которых не зависит от пути, а определяется только начальным и конечным положением тела в пространстве, называются консервативными. Работа консервативных сил на любом замкнутом пути равна нулю.

Потенциальная энергия П обусловлена взаимодействием тел и зависит от взаимного расположения тел или частей одного и того же тела.

Например, для гравитационного взаимодействия тел массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга, потенциальная энергия $П$:

$$П = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r}, \qquad (19)$$

где γ – гравитационная постоянная.

В частности, если тело массой m находится на высоте h над поверхностью Земли, причем $h << R$ (R – радиус земли), то потенциальная энергия

$$П = mgh.$$

Величина, равная сумме кинетической T и потенциальной $П$ энергии системы, называется полной механической энергией E:

$$E = T + П.$$

Согласно закону сохранения энергии в механике полная механическая энергия замкнутой системы тел, взаимодействующих между собой только консервативными силами, с течением времени не изменяется.

В случае действия внешних сил и совершения ими работы полная энергия системы изменится на величину ΔE, равную совершенной работе A:

$$\Delta E = A.$$

1.7. Механические колебания

Колебаниями называются повторяющиеся во времени процессы. Колебания называют свободными, если они происходят в системе, предварительно выведенной из положения равновесия и затем представленной самой себе. В реальных системах такие колебания всегда являются затухающими.

Кинематика гармонических колебаний

Гармоническим колебанием называется колебание, при котором колеблющаяся величина изменяется по закону синуса (или косинуса). Если материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси *x* около положения равновесия, принятого за начало координат, то зависимость ее координаты *x* от времени *t* задается уравнением:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Зависимость скорости *V* и ускорения *a* материальной точки от времени *t* для гармонического колебания $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$:

$$V = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$a = \dot{V} = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Сложение колебаний

Материальная точка может участвовать одновременно в нескольких колебаниях. Рассмотрим, например, результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей *x* и *y* при нулевых начальных фазах:

$$x = A\cos\omega t$$
$$y = B\sin\omega t$$

Исключая из этих уравнений время t, получаем для траектории материальной точки уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Примеры решения задач

Пример 1. Уравнение движения материальной точки вдоль оси имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 2$ м, $B = 1$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^3. Найти координату x, скорость v_x и ускорение a_x точки в момент времени $t = 2$ с.

Решение. Координату x найдем, подставив в уравнение движения числовые значения коэффициентов A, B и C и времени t:

$$x = (2 + 1\cdot 2 - 0{,}5\cdot 2^3)\text{ м} = 0.$$

Мгновенная скорость относительно оси x есть первая производная от координаты по времени:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2 \qquad (20)$$

Ускорение точки найдем, взяв первую производную от скорости по времени:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 6Ct\,. \qquad (21)$$

В момент времени $t = 2$с

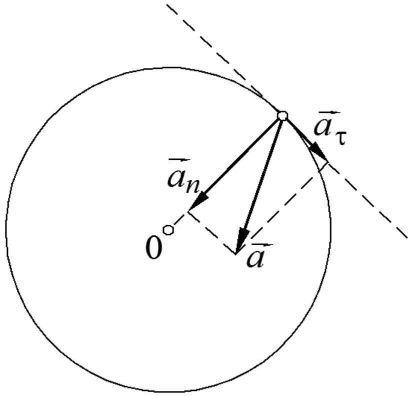
$$V_x = (1 - 3\cdot 0{,}5\cdot 2^2)\text{ м/с} = -5\text{ м/с};$$
$$a_x = 6(-0{,}5)\cdot 2\text{ м/с}^2 = -6\text{ м/с}^2.$$

Пример 2. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + C^2$, где $A = 10$ рад, $B = 20$ рад/с, $C = -2$ рад/с^2. Найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $r = 0{,}1$ м от оси вращения, для момента времени $t = 4$ с.

Решение. Полное ускорение а точки, движущейся по кривой линии, может быть найдено как геометрическая сумма тангенциального ускорения a_τ, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения a_n, направленного к центру кривизны траектории (рис. 1):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n\,. \qquad (22)$$

Так как векторы a_τ и a_n взаимно перпендикулярны, то модуль ускорения



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \qquad (23)$$

Модули тангенциального и нормального ускорения точки вращающегося тела выражаются формулами

$$a_\tau = \varepsilon r, \qquad a_n = \omega^2 r,$$

где ω – модуль угловой скорости тела;

ε – модуль его углового, ускорения.

Подставляя выражения a_τ и a_n в формулу (23), находим

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (24)$$

Угловую скорость ω найдем, взяв первую производную от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct\,. \qquad (25)$$

В момент времени t = 4с модуль угловой скорости

ω = [20 + 2(–2)4] рад/с=4 рад/с.

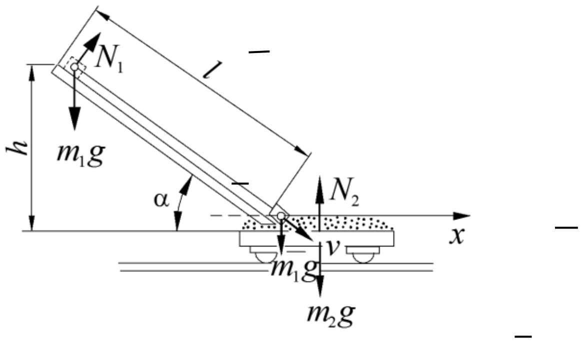
Угловое ускорение найдем, взяв первую производную от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C = -4 \text{ рад/с.}$$

Подставляя значения ω, ε и *r* в формулу (24), получаем

$$a = 0{,}1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} \text{ м/с}^2 = 1{,}65 \text{ м/с}^2.$$

Пример 3. Ящик массой m_1 = 20 кг соскальзывает по идеально гладкому лотку длиной *l* = 2 м на неподвижную тележку с песком и застревает в нем. Тележка с песком массой m_2 = 80 кг может свободно (без трения) перемещаться по рельсам в горизонтальном направлении. Определить скорость *u* тележки с ящиком, если лоток наклонен под углом α = 30° к рельсам.



Решение. Тележку и ящик можно рассматривать как систему двух неупругое взаимодействующих тел. Но эта система не замкнута, так как на нее действуют внешние силы: силы тяжести m_1g и m_2g и сила реакции $\boldsymbol{N}_2$. Поэтому применить закон сохранения импульса к системе ящик – тележка нельзя. Но так как проекции указанных сил на направление оси *x*, совпадающей с направлением рельсов, равны нулю, то проекцию импульса системы на это направление можно считать постоянной, т. е.

$$P_{1x} + P_{2x} = P'_{1x} + P'_{2x}, \qquad (26)$$

где P_{1x} и P_{2x} — проекции импульса ящика и тележки с песком в момент падения ящика на тележку;

P'_{1x} и P'_{2x} — те же величины после падения ящика.

Рассматривая тела системы как материальные точки, выразим в равенстве (26) импульсы тел через их массы и скорости, учитывая, что $P_{2x} = 0$ (тележка до взаимодействия с ящиком покоилась), а также что после взаимодействия оба тела системы движутся с одной и той же скоростью *u:*

$$m_1 V_{1x} = (m_1 + m_2)u\,,$$

или

$$m_1 V_1 \cos\alpha = (m_1 + m_2)u\,,$$

где V_1 – модуль скорости ящика перед падением на тележку;
$V_{1x} = V_1 \cos\alpha$ – проекция этой скорости на ось x.
Отсюда

$$u = m_1 V_1 \cos\alpha / (m_1 + m_2)\,. \qquad (27)$$

Модуль скорости V_1 определим из закона сохранения энергии:

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$$

где $h = l \sin\alpha$, откуда

$$V_1 = \sqrt{2gl\sin\alpha}\,.$$

Подставив выражение v_1 в формулу (27), получим

$$u = \frac{m_1\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos\alpha}{m_1 + m_2}\,.$$

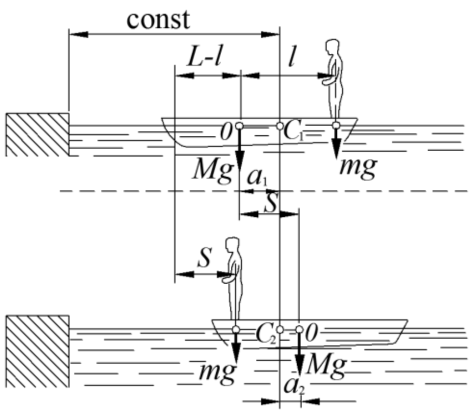
После вычислений найдем

$$u = \frac{20\sqrt{2\cdot 9{,}8\sin 30^{\circ}}}{20+80}\cos 30^{\circ}\,\text{м/с} =$$
$$= 0{,}2\sqrt{19{,}6}\cdot 0{,}867\text{м/с} = 0{,}767\text{м,}76$$

Пример 4. На спокойной воде пруда перпендикулярно берегу и носом к нему стоит лодка массой M и длиной L. На корме стоит человек массой m. На какое расстояние s удалится лодка от берега, если человек перейдет с кормы на нос лодки? Силами трения и сопротивления пренебречь.

Решение. Систему человек — лодка относительно горизонтального направления можно рассматривать как замкнутую. Согласно следствию из закона сохранения импульса, внутренние силы замкнутой системы тел не могут изменить положение центра масс системы. Применяя это следствие к системе человек — лодка, можно считать, что при перемещении человека по лодке центр масс системы не изменит своего положения, т. е. останется на прежнем расстоянии от берега.

Пусть центр масс системы человек — лодка находится на вертикали, проходящей в начальный момент через точку C_1 лодки (см. рис.), а после перемещения лодки — через другую ее точку C_2. Так как эта вертикаль неподвижна относительно берега, то искомое перемещение s лодки относительно берега равно перемещению лодки относительно вертикали. А это последнее легко определить по перемещению центра масс O лодки. Как видно из рис., в начальный момент точка O находится на расстоянии a_1 слева от вертикали, а после перехода человека – на расстоянии a_2 справа от вертикали.



Следовательно, искомое перемещение лодки

$$s = a_1 + a_2, \qquad (28)$$

Для определения a_1 и a_2 воспользуемся тем, что результирующий момент сил, действующих на систему относительно горизонтальной оси, перпендикулярной продольной оси лодки, равен нулю. Поэтому для начального положения системы $Mga_1 = mg(l - a_1)$, откуда

$$a_1 = ml/(M + m).$$

После перемещения лодки $Mga_2 = mg(L - a_2 - l)$, откуда

$$a_2 = m(L - l)/(M + m).$$

Подставив полученные выражения a_1 и a_2 в (28), найдём

$$s = \frac{m}{M+m} + \frac{m}{M+m}(L-l) \text{ или } s = \frac{m}{M+m}L.$$

Пример 5. При выстреле из пружинного пистолета вертикально вверх пуля массой m =20г поднялась на высоту h =5м. Определить жесткость k пружины пистолета, если она была сжата на x = 10 см. Массой пружины и силами трения пренебречь.

Решение. Рассмотрим систему пружина – пуля. Так как на тела системы действуют только консервативные силы, то для решения задачи можно применить закон сохранения энергии в механике. Согласно ему полная механическая энергия E_1 системы в начальном состоянии (в данном случае перед выстрелом) равна полной энергии E_2 в конечном состоянии (когда пуля поднялась на высоту h), т. е.

$$E_1 = E_2 \text{ или } T_1 + П_1 = T_2 + П_2 \qquad (29)$$

где T_1, T_2, $П_1$ и $П_2$ — кинетические и потенциальные энергии системы в начальном и конечном состояниях.

Так как кинетические энергии пули в начальном и конечном состояниях равны нулю, то равенство (29) примет вид

$$П_1 = П_2 \qquad (30)$$

Примем потенциальную энергию пули в поле сил тяготения Земли, когда пуля покоится на сжатой пружине, равной нулю, а высоту подъема пули будем отсчитывать от торца сжатой пружины. Тогда энергия системы в начальном состоянии будет равна потенциальной энергии сжатой пружины, т.е. $П_1 = \frac{1}{2}kx^2$, а в конечном состоянии – потенциальной энергии пули на высоте *h*, т. е. $П_2 = mgh$.

Подставив выражения $П_1$ и $П_2$ в формулу (30), найдем $\frac{1}{2}kx^2 = mgh$, откуда

$$k = 2mgh / x^2 \qquad (31)$$

Проверим, дает ли полученная формула единицу жесткости *k.* Для этого в правую часть формулы (31) вместо величин подставим их единицы:

$$\frac{[m][g][h]}{[x]^2} = \frac{1\text{кг} \cdot 1\text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot 1\text{м}}{1\text{м}^2} = \frac{1\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{1\text{м}} = 1\text{Н/м}.$$

Убедившись, что полученная единица является единицей жесткости (1 Н/м), подставим в формулу (31) значения величин и произведем вычисления:

$$k = \frac{2 \cdot 0{,}02 \cdot 9{,}81 \cdot 5}{(0{,}1)^2}\ \text{Н/м} = 196\ \text{Н/м}.$$

Пример 6. Шар массой m_1, движущийся горизонтально с некоторой скоростью V_1, столкнулся с неподвижным шаром массой m_2 — Шары абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Какую долю ε своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Решение. Доля энергии, переданной первым шаром второму, выразится соотношением

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 V_1^2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{V_1}\right)^2 \qquad (32)$$

где T_1 – кинетическая энергия первого шара до удара;
u_2 и T_2 — скорость и кинетическая энергия второго шара после удара.

Как видно из формулы (32), для определения ε надо найти u_2. Согласно условию задачи, импульс системы двух шаров относительно горизонтального направления не изменяется и механическая энергия шаров в другие виды не переходит. Пользуясь этим, найдем:

$$m_1 V_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \tag{33}$$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \tag{34}$$

Решим совместно уравнения (33) и (34):

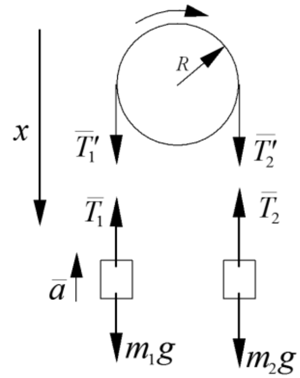
$$u_2 = \frac{2 m_1 V_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставив это выражение u_2 в формулу (32) и сократив на V_1 и m_1 получим

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{2 m_1 V_1}{v_1 (m_1 + m_2)}\right)^2 = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Из найденного соотношения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров.

Пример 7. Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу m = 80 г (см. рис.), перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы с массами m_1 = 100 г и m_2 = 200 г. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе. Трением и массой нити пренебречь.



Решение. Рассмотрим силы, действующие на каждый груз и на блок в отдельности. На каждый груз действуют две силы: сила тяжести и сила упругости (сила натяжения нити). Направим ось *x* вертикально вниз и напишем для каждого груза уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекциях на эту ось. Для первого груза

$$m_1 g - T_1 = m_1 a; \qquad (35)$$

для второго груза

$$m_2 g - T_1 = m_2 a \qquad (36)$$

Под действием моментов сил T_1' и T_2' относительно оси *z*, перпендикулярной плоскости чертежа и направленной за чертеж, блок приобретает угловое ускорение ε. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения,

$$T_2' R - T_1' R = I_z \varepsilon, \qquad (37)$$

где $\varepsilon = a/R$; $I_z = ½ mR^2$ — момент инерции блока (сплошного диска) относительно оси *z*.

Согласно третьему закону Ньютона, с учетом невесомости нити $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$. Воспользовавшись этим, подставим в уравнение (3) вместо T_1' и T_2' выражения T_1 и T_2, получив их предварительно из уравнений (35) и (36):

$$(m_2 g - m_2 a)R - (m_1 g + m_1 a)R = mR^2 a/(2r).$$

После сокращения на R и перегруппировки членов найдём

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + m/2} g. \qquad (38)$$

Формула (38) позволяет массы m_1, m_2 и m выразить в граммах, как они даны в условии задачи, а ускорение — в единицах СИ. После подстановки числовых значений в формулу (39) получим

$$a = \frac{(200-100)\text{г}}{(200+100+80/2)\text{г}} \cdot 9{,}81 \text{ м/с}^2 = 2{,}88 \text{ м/с}^2.$$

Пример 8. Маховик в виде сплошного диска радиусом R = 0,2 м и массой m = 50 кг раскручен до частоты вращения n_1 = 480 мин$^{-1}$ и предоставлен сам себе. Под действием сил трения маховик остановился через t = 50 с. Найти момент M сил трения.

Решение. Для решения задачи воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения в виде

$$dL_z = M_z dt \qquad (39)$$

где dL_z — изменение проекции на ось z момента импульса маховика, вращающегося относительно оси z, совпадающей с геометрической осью маховика, за интервал времени dt;

M_z — момент внешних сил (в данном случае момент сил трения), действующих на маховик относительно оси z.

Момент сил трения можно считать не изменяющимся с течением времени (M_z = const), поэтому интегрирование уравнения (39) приводит к выражению

$$\Delta L_z = M_z \Delta t \qquad (40)$$

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси изменение проекции момента импульса

$$\Delta L_z = J_z \Delta\omega \qquad (41)$$

где J_z — момент инерции маховика относительно оси z;
$\Delta\omega$ — изменение угловой скорости маховика.

Приравняв правые части равенств (40) и (41), получим $M_z \Delta t = J_z \Delta\omega$, откуда

$$M_z = J_z \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (42)$$

Момент инерции маховика в виде сплошного диска определяется по формуле

$$J_z = \frac{1}{2} mR^2 .$$

Изменение угловой скорости $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ выразим через конечную n_2 и начальную n_1 частоты вращения, пользуясь соотношением $\omega = 2\pi n$:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1) .$$

Подставив в формулу (42) выражения J_z и $\Delta\omega$, получим

$$M_z = \pi mR^2 (n_2 - n_1)/\Delta t . \qquad (43)$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу момента силы (Н·м). Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы:

$$\frac{[m][R^2][n]}{[t]} = \frac{1\text{кг} \cdot 1\text{м}^2 \cdot 1\text{с}^{-1}}{1\text{с}} = 1\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot 1\text{ь} = 1\text{Н} \cdot \text{м}$$

.

Подставим в (43) числовые значения величии и произведем вычисления, учитывая, что n_1 = 480 мин$^{-1}$ = 480/60 с$^{-1}$ = 8 с$^{-1}$:

$$M_z = \frac{3{,}14 \cdot 50 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0-8)}{50} \text{Н} \cdot \text{м} = -1 \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Знак минус показывает, что момент сил трения оказывает на маховик тормозящее действие.

Пример 9. Платформа в виде сплошного диска радиусом R = 1,5 м и массой m_1 = 180 кг вращается около вертикальной оси с частотой n= 10 мин. В центре платформы стоит человек массой m_2 = 60 кг. Какую линейную скорость V относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Решение. Согласно условию задачи, момент внешних сил относительно оси вращения z, совпадающей с геометрической осью платформы, можно считать равным нулю. При этом условии проекция L_z момента импульса системы платформа — человек остается постоянной:

$$L_z = I_z \omega = \text{const}, \tag{44}$$

где I_z — момент инерции платформы с человеком относительно оси z;

ω — угловая скорость платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому в начальном состоянии $I_z = I_1 + I_2$, а в конечном состоянии $I'_z = I'_1 + I'_2$.

С учетом этого равенство (44) примет вид

$$(I_1 + I_2)\omega = (I'_1 + I'_2)\omega' \tag{45}$$

где значения моментов инерции I_1 и I_2 платформы и человека соответственно относятся к начальному состоянию системы;

I'_1 и I'_2 – к конечному.

Момент инерции платформы относительно оси r при переходе человека не изменяется: $I_1 = I'_1 = \frac{1}{2} m_2 R^2$. Момент инерции человека относительно той же оси будет изменяться. Если рассматривать человека как материальную точку, то его момент инерции I_2 в начальном состоянии (в центре платформы) можно считать равным нулю. В конечном состоянии (на краю платформы) момент инерции человека $I_2' = m_2 R^2$.

Подставим в формулу (45) выражения моментов инерции, начальной угловой скорости вращения платформы с человеком ($\omega = 2\pi n$) и конечной угловой скорости ($\omega' = V/R$, где V — скорость человека относительно пола):

$$\left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + 0\right) 2\pi n = \left(\frac{1}{2} m_1 R_2 + m_2 R_2\right) V / R.$$

После сокращения на R^2 и простых преобразований находим скорость:

$$V = 2\pi n R m_1 / (m_1 + 2m_2).$$

Произведем вычисления:

$$V = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1{,}5 \cdot 180}{180 + 2 \cdot 60} \text{ м/с} = 1 \text{ м/с}$$

Пример 10. Ракета установлена на поверхности Земли для запуска в вертикальном направлении. При какой минимальной скорости V_1, сообщенной ракете при запуске, она удалится от поверхности на расстояние, равное радиусу Земли (R = 6,37·10^6 м)? Всеми силами, кроме силы гравитационного взаимодействия ракеты и Земли, пренебречь.

Решение. Со стороны Земли на ракету действует сила тяжести, являющаяся потенциальной силой. При неработающем двигателе под действием потенциальной силы механическая энергия ракеты изменяться не будет. Следовательно

$$T_1 + П_1 = T_2 + П_2 \tag{46}$$

где T_1, $П_1$ и T_2, $П_2$ — кинетическая и потенциальная энергия ракеты после выключения двигателя в начальном (у поверхности Земли) и конечном (на расстоянии, равном радиусу Земли) состояниях.

Согласно определению кинетической энергии,

$$T_1 = \frac{1}{2} m V_1^2$$

Потенциальная энергия ракеты в начальном состоянии

$$П_1 = -GmM / R.$$

По мере удаления ракеты от поверхности Земли ее потенциальная энергия возрастает, а кинетическая – убывает. В конечном состоянии кинетическая энергия T_2 станет равной нулю, а потенциальная – достигнет максимального значения:

$$П_2 = -GmM / (2R).$$

Подставляя выражения T_1, $П_1$, T_2 и $П_2$ в (46), получаем

$$m v_1^2 / 2 - GmM / R = -GmM / (2R).$$

Откуда

$$V_2 = \sqrt{GM / R}$$

Заметив, что $GM/R^2 = g$ (g – ускорение свободного падения у поверхности Земли), перепишем эту формул в виде:

$$V_2 = \sqrt{gR},$$

что совпадает с выражением для первой космической скорости.

Произведем вычисления:

$$V_1 = \sqrt{9{,}8 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} \text{ м/с} = 7{,}9 \text{км/с}.$$

Пример 11. Точка совершает гармонические колебания с частотой ν = 10Гц. В момент, принятый за начальный, точка имела максимальное смещение: x_{max} = 1 мм. Написать уравнение колебаний точки и начертить их график.

Решение. Уравнение колебаний точки можно записать в виде

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_1), \qquad (47)$$

где A – амплитуда колебаний;
ω – циклическая частота;
t – время;
φ – начальная фаза.

По определению, амплитуда колебаний

$$A = x_{max}. \qquad (48)$$

Циклическая частота ω связана с частотой ν соотношением

$$\omega = 2\pi\nu. \qquad (49)$$

Для момента времени $t = 0$ формула (47) примет вид

$$x_{max} = A\sin\varphi_1,$$

откуда начальная фаза

$$\varphi_1 = \arcsin(x_{max}/A) = \arcsin 1,$$

или

$$\varphi_1 = (2k+1)\pi/2 \quad (k = 0,1,2,\ldots).$$

Изменение фазы на 2π не изменяет состояния колеблющейся точки, поэтому можно принять

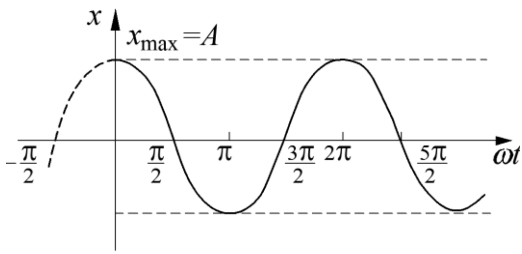
$$\varphi_1 = \pi/2. \qquad (50)$$

С учетом равенств (48) — (50) уравнение колебаний примет вид

$$x = A\sin(2\pi\nu t + \varphi), \text{ или } x = A\cos 2\pi\nu t$$

где A = 1 мм = 10^{-3} м, ν = 10 Гц, φ = π/2.

График соответствующего гармонического колебания приведен на рис.



Пример 12. Частица массой m = 0,01 кг совершает гармонические колебания с периодом T = 2с. Полная энергия колеблющейся частицы E = 0,1 мДж. Определить амплитуду A колебаний и наибольшее значение силы F_{max}, действующей на частицу.

Решение. Для определения амплитуды колебаний воспользуемся выражением полной энергии частицы:

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2,$$

где ω = 2π/T. Отсюда амплитуда

$$A = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}} \qquad (51)$$

Так как частица совершает гармонические колебания, то сила, действующая на нее, является квазиупругой и, следовательно, может быть выражена соотношением $F = -kx$, где k – коэффициент квазиупругости силы; x – смещение колеблющейся точки. Максимальной сила будет при максимальном смещении x_{max}, равном амплитуде:

$$F_{max} = kA. \qquad (52)$$

Коэффициент k выразим через период колебаний:

$$k = m\omega^2 = m \cdot 4\pi^2 / T^2 \qquad (53)$$

Подставив выражения (51) и (53) в (52) и произведя упрощения, получим

$$F_{\max} = 2\pi\sqrt{2mE} / T .$$

Произведем вычисления:

$$A = \frac{2}{2 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}}}\text{м} = 0{,}045\text{м} = 45\text{мм};$$

$$F_{\max} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{2}\sqrt{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4}}\text{Н} = 4{,}44 \cdot 10^{-3}\text{Н} = 4{,}44\text{мН}$$

.

Пример 13. Складываются два колебания одинакового направления, выраженные уравнениями

$$x_1 = A_1 \cos\frac{2\pi}{T}(t + \tau_1); \quad x_2 = A_2 \cos\frac{2\pi}{T}(t + \tau_2),$$

где A_1 = 3см, A_2 = 2см, τ_1 = 1/6 с, τ_2 = 1/3 с, T = 2 с. Построить векторную диаграмму сложения этих колебаний и написать уравнение результирующего колебания.

Решение. Для построения векторной диаграммы сложения двух колебаний одного направления надо фиксировать какой-либо момент времени. Обычно векторную диаграмму строят для момента времени t = 0. Преобразовав оба уравнения к канонической форме $x = A\cos(\omega t+\varphi)$, получим

$$x_1 = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T}\tau_1\right); \; x_2 = A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T}\tau_2\right).$$

Отсюда видно, что оба складываемых гармонических колебания имеют одинаковую циклическую частоту

$$\omega = 2\pi / T.$$

Начальные фазы первого и второго колебаний соответственно равны

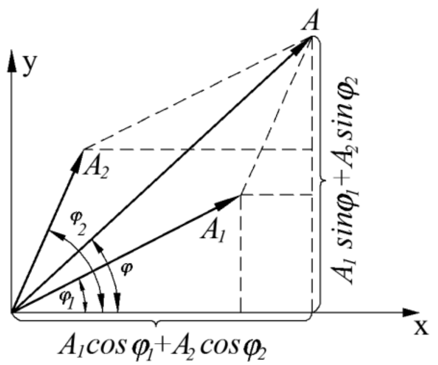
$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T}\tau_1;\ \varphi_2 = \frac{2\pi}{T}\tau_2.$$

Произведем вычисления:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2}\text{с}^{-1} = 3{,}14\text{с}^{-1},$$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{2}\frac{1}{6}\text{рад} = 30^\circ;\ \varphi_2 = \frac{2\pi}{2}\frac{1}{3}\text{рад} = 60^\circ.$$

Изобразим векторы A_1 и A_2. Для этого отложим отрезки длиной $A_1 = 3$ см и $A_2 = 2$ см под углами $\varphi_1 = 30^\circ$ и $\varphi_2 = 60^\circ$ к оси Ox. Результирующее колебание будет происходить с той же частотой ω и амплитудой A, равной геометрической сумме амплитуд A_1 и A_2: $A = A_1 + A_2$ Согласно теореме косинусов,



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Начальную фазу результирующего колебания можно также определить непосредственно из векторной диаграммы (см. рис.):

$$\varphi = arctg\frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$

Произведем вычисления:

$$A = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2\cdot 3\cdot 2\cos(60^o - 30^o)}\text{см} = 4{,}84\text{см};$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{3\sin 30^o + 2\sin 60^o}{3\cos 30^o + 2\cos 60^o} = \mathrm{arctg}0{,}898 = 42^o$$

или φ = 0,735 рад.

Так как результирующее колебание является гармоническим, имеет ту же частоту, что и слагаемые колебания, то его можно записать в виде

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где A = 4,84см, ω = 3,14 c^{-1}, φ = 0,735 рад.

Пример 14. Плоская волна распространяется вдоль прямой со скоростью V = 20 м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях x_1 = 12 м и x_2 = 15 м от источника волн, колеблются с разностью фаз Δφ = 0,75п. Найти длину волны λ, написать уравнение волны и найти смещение указанных точек в момент t = 1,2 с, если амплитуда колебаний A = 0,1 м.

Решение. Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны λ, колеблются с разностью фаз, равной 2п; точки, находящиеся друг от друга на любом расстоянии Δx, колеблются с разностью фаз, равной

$$\Delta\varphi = \Delta x \cdot 2\pi/\lambda = (x_2 - x_1)\cdot 2\pi/\lambda.$$

Решая это равенство относительно λ, получаем

$$\lambda = 2\pi(x_2 - x_1)/\Delta\varphi. \qquad (54)$$

Подставив числовые значения величин, входящих в выражение (54), и выполнив арифметические действия, получим

$$\lambda = \frac{2\pi(15-12)}{0{,}75}\text{м} = 8\text{м}.$$

Для того чтобы написать уравнение плоской волны, надо еще найти циклическую чистоту ω. Так как $\omega = 2\pi/T$ ($T = \lambda/v$ — период колебаний), то

$$\omega = 2\pi v/\lambda.$$

Произведем вычисления:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 20}{8}\,\text{с}^{-1} = 5\pi\text{с}^{-1}.$$

Знаная амплитуду A колебаний, циклическую частоту ω и скорость распространения волны, можно написать уравнение плоской волны для данного случая:

$$y = A\cos\omega(t - x/V), \qquad (55)$$

где A = 0,1 м, $\omega = 5\pi\text{с}^{-1}$, V = 20 м/с.

Чтобы найти смещение y указанных точек, достаточно в уравнение (55) подставить значения t и x:

$$y_1 = 0{,}1\cos 5\pi(1{,}2 - 12/20)\text{м} = 0{,}1\cos 3\pi\,\text{м} = -0{,}1\text{м};$$

$$y_2 = 0{,}1\cos 5\pi(1{,}2 - 15/20)\text{м} = 0{,}1\cos 2{,}25\pi\,\text{м} =$$
$$= 0{,}1\cos 0{,}25\pi\,\text{м} = 0{,}071\text{м} = 7{,}1\text{см}.$$

ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Вариант 0.

0.1 Тело брошено с вышки в горизонтальном направлении со скоростью 8 м/с. Определить тангенциальную и нормальную составляющие ускорения тела в момент времени, когда скорость тела достигает 10 *м/с*. Сопротивление воздуха не учитывать.

0.2 Колесо, вращаясь равноускоренно, через время 60 с после начала движения стало вращаться с частотой 720 *об/мин*. Найти угловое ускорение колеса и полное число оборотов колеса, совершенных за это время.

0.3 Тело массой 0.5 *кг* движется прямолинейно, причем зависимость пройденного телом пути S от времени t задается уравнением $S=A+Bt+Ct^2+Dt^3$, где C = 5 $м/с^2$ и D = −1$м/с^3$. Найти силу F, действующую на тело в конце первой секунды движения.

0.4 Однородный стержень длиной 1 *м* и массой 0.5 *кг* вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину. С каким угловым ускорением вращается стержень, если момент силы, вызывающий ускорение стержня, равен 100 *Н/м*?

0.5 С какой скоростью вылетит из пружинного пистолета шарик массой 10 *г*, если пружина была сжата на 5 *см*? Жесткость пружины равна 200 *Н/м*.

0.6 Момент импульса вала, вращающегося с частотой 10 *об/с*, равен 8 *кгм/с*. Найти кинетическую энергию вала.

0.7 Определить частоту гармонических колебаний диска радиусом 20 *см* около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса диска перпендикулярно его плоскости.

0.8 Найти смещение от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $\lambda/12$ (λ – длина волны), для момента времени $T/6$ (T – период колебаний). Амплитуда колебаний A = 0.05 *м*.

Вариант 1

1.1 Уравнение движения точки $x = A + Bt + Ct^3$, где A = 1 м; B = 2 *м/с*; C = 4 $м/с^3$. Определить значения скорости и ускорения для моментов времени t = 1*с* и t = 2*с* и среднюю скорость в интервале времени от t = 1*с* до t = 2*с*.

1.2 Вал вращается с частотой 180 *об/мин*. С некоторого момента времени вал начал вращаться равнозамедленно с угловым ускорением –3 $рад/с^2$. Через какое время вал остановится и сколько оборотов он сделает до остановки?

1.3 Вагон массой 20 *т*, имея начальную скорость 54 *км/час*, начал двигаться равнозамедленно с ускорением a = -0.3 м/с^2. Какая сила торможения действует на вагон? Через какое время вагон остановится? Какое расстояние вагон пройдет до остановки?

1.4 На барабан радиусом 0.5 *м* намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 10 *кг*. Найти момент инерции барабана, если известно, что груз опускается с ускорением 2*м/с*^{2}.

1.5 Гиря, положенная на верхний конец спиральной пружины, сжимает ее на 2 *мм*. На сколько сожмет пружину та же гиря, упавшая на конец пружины с высоты 5 *см*?

1.6 Карандаш длиной 15 *см*, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую скорость и линейную скорость будет иметь верхний конец карандаша в конце падения?

1.7 За какую часть периода точка, совершающая гармоническое колебание, пройдет путь, равный: 1) половине амплитуды, если в начальный момент она находилась в положении равновесия; 2) одной трети амплитуды, если в начальный момент она была максимально удалена от положения равновесия?

1.8 Найти длину волны колебания, период которого 10^{-10} *с*. Скорость распространения колебаний равна $3 \cdot 10^8$ *м/с*.

Вариант 2

2.1 По прямой линии движутся две материальные точки согласно уравнениям:

$$x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2;\ x_2 = A_2 + B_2 t + C_3 t^2,$$

где A_1 = 10 *м*; B_1 = 1 *м/с*; C_1 = -2 *м/с*^{2};

A_2 = 3 *м*; B_2 = 2 *м/с*; C_2 = 0.2 *м/с*^{2}.

В какой момент времени скорости этих точек будут одинаковы? Найти ускорения a_1 и a_2 этих точек в момент времени t = 3 *с*.

2.2 При равнозамедленном движении за 60 *с* частота вращения колеса уменьшилась от 300 *об/мин* до 180 *об/мин*. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов N, совершенных колесом за это время.

2.3 Поезд массой 500 *т* после выключения тяги локомотива останавливается под действием силы трения 100 *кН* за 1 *мин*. С какой начальной скоростью двигался поезд?

2.4 К ободу колеса радиусом 0.5 *м* и массой 50 *кг* приложена касательная сила 100 *Н*. Найти угловое ускорение колеса. Через какое время после начала действия этой силы частота вращения колеса достигнет величины 100 *об/с*? Колесо считать однородным диском. Трением пренебречь.

2.5 Вагон массой 20 *т* двигался со скоростью 1 *м/с*. Налетев на пружинный буфер, он остановился, сжав пружину буфера на 10 *см*. Определить жесткость пружины.

2.6 Определить полную кинетическую энергию обруча массой 1.6 *кг*, катящегося со скоростью V = 1.5 м/с.

2.7 Определить амплитуду, частоту и начальную фазу колебания, уравнение которого, выраженное в системе СИ, имеет вид:

$$x = \cos\frac{\pi}{5}(4t + 3).$$

2.8 Период колебаний первого математического маятника 3 *с*, второго – 5 *с*. Определить период колебаний третьего математического маятника, длина которого равна сумме длин первого и второго маятников.

Вариант 3

3.1 Уравнение движения материальной точки вдоль оси x имеет вид: $x = A + Bt + Ct^3$, где A = 2 *м*; B = 1 *м/с*; C = -0.5 *м/с*^{3}. Найти координату x, скорость и ускорение точки в момент времени t = 2 *с*.

3.2 По дуге окружности радиусом 10 *м* вращается точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки a_n = 4.9 *м/с*^{2}, а вектор полного ускорения $\vec{a}$ образует с вектором нормального ускорения угол α = 60°. Найти линейную скорость и тангенциальное ускорение a_τ точки в этот момент времени.

3.3 Поезд массой 500 *т*, двигаясь равнозамедленно, в течение 1 *мин* уменьшает свою скорость от 40 *км/час* до 28 *км/час*. Найти силу торможения.

3.4 К ободу однородного диска радиусом 0.2 *м* приложена касательная сила 100 *Н*. Кроме того, при вращении на диск действует момент сил трения 5 *Нм*. Найти массу диска, если известно, что диск вращается с угловым ускорением 100 *рад/с*^{2}.

3.5 Снаряд, летящий со скоростью 500 *м/с*, разорвался на два осколка. Меньший осколок, масса которого составляет 0.2 части от общей массы снаряда, полетел в противоположном направлении со скоростью 200 *м/с*. Определить скорость большего осколка.

3.6 К ободу диска массой 5 *кг* приложена касательная сила 200 *Н*. Какую кинетическую энергию будет иметь диск через время 5 *с* после начала действия этой силы?

3.7 Материальная точка совершает колебание, уравнение которого, выраженное в системе СИ, имеет вид: $x = 2\cos\frac{\pi}{3}(2t+3)$. Определить скорость и ускорение колеблющейся точки через 3 *с* после начала колебаний.

3.8 Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях: $x = a\sin t$ и $y = a\cos t$, где *a* = 5 *см*. Получить уравнение траектории результирующего движения точки.

Вариант 4.

4.1 Свободно падающее тело в последнюю секунду движения проходит половину всего пути. С какой высоты падает тело и каково время его падения?

4.2 Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону: $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где *A* = 10 *рад*; *B* = 20 *рад/с*; *C* = -2 *рад/с³*. Найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 0.1 *м* от оси вращения, для момента времени *t* = 4 *с*.

4.3 Автомобиль массой 1000 *кг*, двигаясь равнозамедленно, остановился через 5 *с*, пройдя при этом путь 25 *м*. Найти начальную скорость и силу торможения.

4.4 Однородный стержень длиной 1.2 *м* и массой 0.3 *кг* вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через один из концов стержня. Чему равен вращающий момент, если стержень вращается с угловым ускорением 100 $с^{-2}$.

4.5 Стальной шарик массой100 *г* ударяется о массивную плиту, имея скорость 2 *м/с*, и отскакивает от нее с такой же по величине скоростью. Определить изменение импульса шарика, если 1) направление скорости шарика перпендикулярно плите; 2) угол между направлением скорости и плоскостью плиты 30°?

4.6 Медный шар радиусом 10 *см* вращается с частотой 2 *об/с* вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость вращения шара вдвое?

4.7 Амплитуда затухающих колебаний за 1 минуту уменьшается в полтора раза. Во сколько раз уменьшается амплитуда за 4 минуты?

4.8 Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебание, равна 30 *мкДж*; максимальная сила, действующая на тело, равна 1.5 *мН*. Написать уравнение движения этого тела, если период колебаний 2 *с*, а начальная фаза $\frac{\pi}{3}$.

Вариант 5.

5.1 Поезд, двигаясь равнозамедленно в течение 1 *мин*, уменьшает свою скорость от 40 *км/час* до 28 *км/час*. Найти ускорение поезда и путь, пройденный им за время торможения.

5.2 Найти радиус вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость точки, лежащей на ободе, в 1.5 раза больше линейной скорости другой точки, лежащей на 5 *см* ближе к оси колеса, чем первая точка.

5.3 В вагоне, движущемся горизонтально с постоянным ускорением 3 *м/с*, висит на проволоке груз массой 2 *кг*. Определить силу натяжения проволоки и угол ее отклонения от вертикали, если груз неподвижен относительно вагона.

5.4 Диск радиусом $20 см$ и массой 7 *кг* вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3$ *рад*; $B = -1$ *рад/с*; $C = 0.1$ *рад/с³*. Найти уравнение, согласно которому меняется вращающий момент, действующий на диск. Определить момент сил для $t = 2$ *с*..

5.5 Снаряд массой 50 *кг*, летящий со скоростью 300 *м/с*, попадает в мишень с песком массой 100 *кг* и застревает в ней. С какой скоростью и в каком направлении будет двигаться мишень после попадания снаряда в следующих случаях:
1) мишень была неподвижна; 2) мишень двигалась в одном направлении со снарядом со скоростью 72 *км/час*; 3) мишень двигалась навстречу снаряду со скоростью 72 *км/час*?

5.6 Кинетическая энергия вала, вращающегося с частотой 5 *об/с*, равна 60 *Дж*. Найти момент импульса вала.

5.7 Точка совершает гармонические колебания с частотой 10 *Гц*. В момент времени, принятый за начальный, точка имела максимальное смещение $A = 1$ *мм*. Написать уравнение колебаний точки.

5.8 К пружине подвешен груз. Максимальная кинетическая энергия колебаний груза равна 1 *Дж*. Амплитуда колебаний $A = 5$ *см*. Найти жесткость k пружины.

Вариант 6.

6.1 Расстояние между двумя станциями метро 1.5 *км*. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую – равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда 50 *км/час*. Найти величину ускорения и время движения поезда между станциями.

6.2 Диск радиусом 0.3 *м* вращается согласно уравнению: $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где A = 3 *рад*; B = -1 *рад/с*; C = 0.1 *рад/с*^{3}. Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорения наиболее удаленных от оси вращения точек диска в момент времени t = 10 *с*.

6.3 Наклонная плоскость образует с горизонтом угол α = 25°. Тело за 2 *с* от начала скольжения прошло по наклонной плоскости 1.7 *м*. Определить коэффициент трения скольжения тела по плоскости.

6.4 Под действием момента силы 10 *Нм* тело через 10 *с* после начала вращения достигло скорости, соответствующей вращению с частотой 4 *об/с*. Определить момент инерции данного тела.

6.5 Определить изменение импульса тела массой 0.5 *кг* в результате его соскальзывания с наклонной плоскости высотой 3 *м*. Трением пренебречь.

6.6 Обруч и диск одинаковой массы катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Кинетическая энергия обруча равна 40 *Дж*. Найти кинетическую энергию диска.

6.7 Определить максимальное ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой A = 15 *см*, если наибольшая скорость точки 30 *см/с*. Получить уравнение колебаний.

6.8 Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 15 *м/с*. Период колебаний точек шнура 1.2 *с*. Определить разность фаз двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояния 20 *м* и 30 *м* соответственно.

Вариант 7.

7.1 Тело падает с высоты 20 *м* с начальной скоростью V_0 = 0. Какой путь пройдет тело за первую и последнюю секунду своего движения?

7.2 Точка вращается по окружности радиусом 1.2 *м*. Уравнение движения точки: $\varphi = At+Bt^3$, где A = 0.5 *рад/с*; B = 0.2 *рад/с*^{3}. Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки в момент времени t = 4 *с*.

7.3 Груз массой 12 *кг* поднимают равноускоренно на шнуре. За 5 *с* подъема груза его скорость изменяется от 2 *м/с* до 5 *м/с*. Найти силу натяжения шнура.

7.4 Через блок, выполненный в виде колеса, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массой 100 *г* и 300 *г*. Массу колеса, величиной 600 *г*, считать равномерно распределенной по ободу, а массой спиц пренебречь. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы и силы натяжения нити по обе стороны блока.

7.5 Камень массой 200 *г* брошен вертикально вверх с начальной скоростью 7.5 *м/с*. Определить величины кинетической и потенциальной энергии через 0.5 *с* после броска. Сопротивление воздуха не учитывать.

7.6 Тонкий однородный стержень длиной 1.2 *м* может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей через конец стержня. Стержень отклонили на 90^o от положения равновесия и отпустили. Определить линейную скорость нижнего конца стержня в момент прохождения им положения равновесия.

7.7 Определить период гармонических колебаний диска радиусом 40 *см* около горизонтальной оси, проходящей через образующую диска.

7.8 Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выраженных в системе СИ уравнениями: $x = 2\sin\pi t$; $y = -\cos\pi t$. Найти уравнение траектории точки. Определить скорость точки в момент $t = 0.5$ *с*.

Вариант 8.

8.1 Дано уравнение прямолинейного движения материальной точки $S = A + Bt + Ct^3$, где $A = 6$ м; $B = 1$ *м/с*; $C = 3$ *м/с*^{3}. Найти скорость и ускорение точки в момент времени
$t = 3$ *с*, а так же среднюю скорость за первые 3 секунды движения.

8.2 Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости 20 *рад/с* через 10 оборотов после начала движения. Найти угловое ускорение колеса.

8.3 На концах тонкой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, подвешены грузы массой 3*кг* и 4*кг*. Пренебрегая массой блока и трением при его вращении, определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, и силу натяжения нити.

8.4 Цилиндр, расположенный горизонтально, может вращаться около оси, совпадающей с осью цилиндра. Масса цилиндра 12 *кг*. На цилиндр намотан шнур, к которому привязана гиря массой 1 *кг*. С каким ускорением будет опускаться гиря? Какова сила натяжения шнура во время движения груза?

8.5 Какую работу надо совершить, чтобы заставить движущееся тело массой 2 *кг*:
1) увеличить свою скорость от 2 *м/с* до 5 *м/с*; 2) остановиться при начальной скорости 8*м/с*.

8.6 Обруч, имеющий скорость 2.8 *м/с*, начинает вкатываться вверх по наклонной плоскости. Определить максимальную высоту подъема обруча. Расходом энергии на преодоление сил трения пренебречь.

8.7 Тело, неподвижно висящее на цилиндрической пружине, растягивает ее на 5 *см*. Затем тело было смещено из положения равновесия по вертикали и отпущено, в результате чего оно стало совершать колебания. Найти период колебаний.

8.8 Частица массой 0.1 *кг* совершает гармонические колебания с периодом 2 *с*. Полная энергия колебаний частицы 0.1 *мДж*. Определить амплитуду колебаний и наибольшее значение силы, действующей на частицу.

Вариант 9.

9.1 Камень, брошенный горизонтально с начальной скоростью *V*, через 0.5 *с* после начала движения имел скорость в 1.5 раза больше начальной скорости. С какой скоростью был брошен камень?

9.2 Тело вращается вокруг оси в соответствии с уравнением: $\varphi = A+Bt^2+Ct^3$, где A = 10 *рад*; B = -2 *рад/с*^{2}; C = 1 *рад/с*^{3}. В какой момент времени угловая скорость вращения тела будет равна 4 рад/с? Чему равно угловое ускорение в этот момент времени?

9.3 Кабина лифта с пассажирами имеет массу 700 *кг*. Определить натяжение троса, на котором подвешена кабина, если лифт движется с ускорением 0.7 *м/с*^{2} для случаев: 1) вектор ускорения направлен вниз; 2) вектор ускорения направлен вверх. Чему равно натяжение троса при равномерном движении лифта?

9.4 Маховик в виде сплошного диска радиусом 0.2 *м* и массой 50 *кг* раскручен до частоты вращения 480 *об/мин* и предоставлен самому себе. Под действием силы трения маховик останавливается через 50 *с*. Найти момент сил трения.

9.5 При подъеме груза массой 2 *кг* на высоту 1 *м* совершается работа 78.5 *Дж*. С каким ускорением поднимается груз?

9.6 Найти кинетическую энергию велосипедиста (вместе с велосипедом), движущегося со скоростью 9 *км/час*. Масса велосипедиста вместе с велосипедом 78 *кг*, причем на колеса приходится масса 3 *кг*. Колеса велосипеда считать обручами.

9.7 Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой 500 *Гц* и амплитудой 0.02 *см*. Определить средние значения скорости и ускорения точки на пути от ее крайнего положения до положения равновесия, а также найти максимальные значения скорости и ускорения.

9.8 Определить скорость распространения волн в упругой среде, если разность фаз колебаний двух точек, отстоящих друг от друга на расстоянии 15 *см*, равна $\pi/2$. Частота колебаний 2 *Гц*.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1 Уравнение Клапейрона-Менделеева

Состояние некоторой массы газа определяется тремя термодинамическими параметрами:

p – давление, под которым находится газ (Па):

V – объем, занимаемый газом

T – температура газа (К).

Это параметры p, V и T связаны между собой, и такая связь для идеального газа, т.е. газа, в котором можно пренебречь собственным объемом молекул и силами взаимодействия между ними, определена уравнением Клапейрона-Менделеева:

$pV = \frac{m}{\mu}RT$ или $pV = \nu RT$

где m- масса газа;

μ- масса моля газа или молярная масса;

ν – число молей;

R – универсальная газовая постоянная (R=8.31 Дж/моль · К)

Молем называется такое количество данного вещества, в котором содержится столько же частиц (атомов или молекул), сколько и в 0.012 кг изотопа углерода C^{12} (12- массовое число данного изотопа).

Объемом моля любого газа при нормальных условиях (p=1 атм=1.013$\cdot 10^5$Па, t=0°C или T=273.15 К) равен 22.4$\cdot 10^{-3}$ $м^3$. В моле вещества содержится частиц. Это число называется числом Авогадро N_A.

В данной массе m газа содержится N число: $N = \nu N_A$.

Концентрация частиц n, т.е. число частиц, содержащихся в единице объема данной массы газа: $n = N/V = \nu N_A/V$.

Из этого соотношения следует, что $\nu = N/N_A = nV/N_A$.

Тогда уравнение Клапейрона-Менделеева $pV = \nu RT$ можно записать в следующем виде:

$p = n\frac{R}{N_A}T = nkT$, где $k = 1.38\cdot 10^{-23}\frac{Дж}{К}$ –постоянная Больцмана.

Соотношения $pV = \nu RT$ и $p = nkT$ определяют связь между термодинамическими параметрами идеального газа и носят название уравнений состояния идеального газа.

Если в сосуде находится смесь нескольких идеальных газов, то согласно закону Дальтона: давление p для смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений p_i , т.е. давлений, которые оказывали бы газы смеси, занимая по отдельности весь объем смеси газов при той же температуре ($p=\sum p_i$).

2.2 Термодинамические процессы. Изопроцессы

Согласно уравнению Клапейрона-Менделеева, для данной массы газа в результате термодинамического процесса, сопровождающегося изменением параметров *p*, V, *T*, соотношение $\frac{pV}{T}$ не изменяется (объединенный газовый закон):

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{p_3V_3}{T_3} = \ldots = \text{const}$$

1,2,3,… – различные термодинамические состояния газа.

Изопроцессы

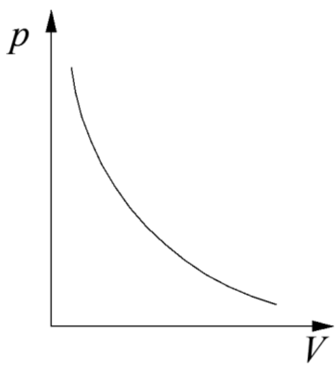
Если в термодинамическом процессе один из параметров газа не изменяется, то такой процесс называют изопроцессом:

T = const – изотермический процесс;
p = const – изобарный процесс;
V = const – изохорный процесс.

Изотермический процесс

Как следует из уравнения Клапейрона-Менделеева, для данной массы газа при изотермическом процессе (*T*=const), величина произведения *pV* не изменяется (закон Бойля-Мариотта):

$$pV=\frac{m}{\mu}RT=\text{const} \text{ или } p_1V_1=p_2V_2=p_3V_3=\ldots=\text{const}$$



Изобарный процесс

Как следует из уравнения Клапейрона-Менделеева, для данной массы газа при изобарном процессе (p=const), величина $\dfrac{V}{T}$ произведения $\dfrac{V}{T} = \dfrac{1}{p}\dfrac{m}{\mu}R = \text{const}$ не изменяется: $\dfrac{V}{T}$ или

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} = \ldots = \text{const}$$

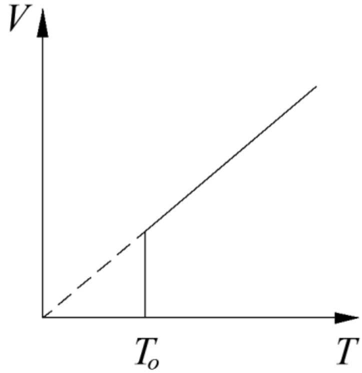
Если при $T = T_0$ (T_0=273K), объем газа $V=V_0$, то

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}$$

Тогда $V = \dfrac{1}{T_0} V_0 T = \alpha V_0 T$, $\left(\alpha = \dfrac{1}{273} K^{-1}\right)$.

Следовательно, для данной массы газа при изобарном процессе объем газа прямо пропорционален температуре газа, причем при нагревании газа на 1K объем газа увеличивается на 1/273 часть того объема, который занимает данная масса газа при температуре T=273K (закон Гей-Люссака):

$$V = \alpha V_0 T$$



Изохорный процесс

Как следует из уравнения Клапейрона-Менделеева, для данной массы газа при изохорном процессе (V=const), величина

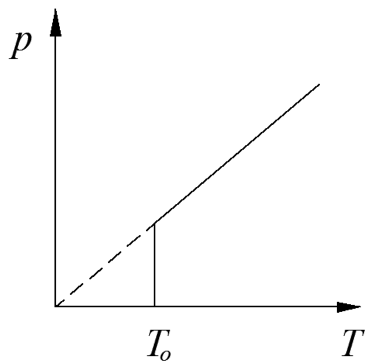
$\frac{p}{T}$ не изменяется:

$$\frac{p}{T} = \frac{1}{V}\frac{m}{\mu}R = \text{const, или } \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} = \ldots = \text{const}$$

Если при $T = T_0$, ($T_0 = 273K$) давление газа $p = p_0$, то $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} = \ldots = \text{const}$, то $\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0}$, тогда $p = \frac{1}{T_0}$

$p_0 T = \alpha\ p_0\ T$ $\left(\alpha = \frac{1}{273}K^{-1}\right)$.

Следовательно, для данной массы газа при изохорном процессе давление газа прямо пропорционально температуре газа, причем, при нагревании газа на $1K$ объем газа увеличивается на 1/273 часть того давления, которое занимает данная масса газа при температуре $T = 273K$ (закон Шарля): $p = \alpha\ p_0\ T$



2.3. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории связывает параметры состояния газа с характеристиками движения его молекул. Так. давление газа p на стенки сосуда является следствием соударения его молекул со стенками сосуда и определяется, согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории идеального газа, через суммарную кинетическую энергию $E_П$ поступательного движения молекул газа:

$$p = \frac{2}{3}\frac{1}{V}E_П$$

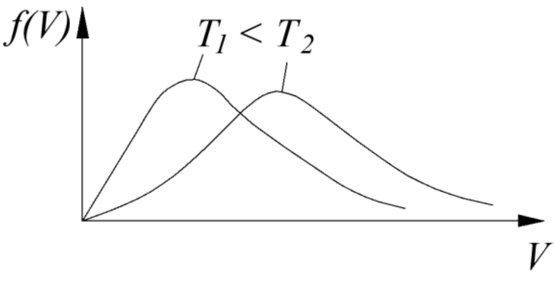
где $E_П = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_0 V_i^2}{2}$ (V_i – скорость молекулы газа: m_0 – масса молекул газа).

Молекулы газа имеют различные скорости поступательного движения, однако для каждого интервала скоростей от V до $V+\Delta V$ имеется определенная часть всех молекул газа, скорость движения которых лежит в этом интервале.

Максвелл получил такое распределение молекул идеального газа по скоростям, т.е. функцию $f(V)$ которая показывает, какая часть $\frac{\Delta N}{N}$ всех N молекул газа обладает скоростями, лежащими в каждом интервале скоростей от V до $V+\Delta V$:

$$f(V) = \frac{1}{N}\frac{\Delta N(V)}{\Delta V} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} V_0^2 - \frac{m_0 V^2}{2kT}$$

Из приведенных графиков видно, что повышение температуры газа приводит к увеличению доли молекул, движущихся с большими скоростями.



Суммарная кинетическая энергия поступательного движения молекул может быть выражена через $\langle\varepsilon_П\rangle$ (среднее значение кинетической энергии поступательного движения молекул $E_П = N\langle\varepsilon_П\rangle$.

Тогда основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов примет вид:

$$p = \frac{2}{3}\frac{1}{V}N < \varepsilon_{П} >$$ или $$pV = \frac{2}{3}N < \varepsilon_{П} >,$$ (V – объем газа)

С другой стороны, согласно уравнению состояния идеального газа: $p = nkT$ или $pV = NkT$

Тогда $NkT = \frac{2}{3}N < \varepsilon_{П} >$ или $kT = \frac{2}{3}N < \varepsilon_{П} >$, отсюда

$$T = \frac{2}{3}\frac{1}{k}N < \varepsilon_{П} >.$$

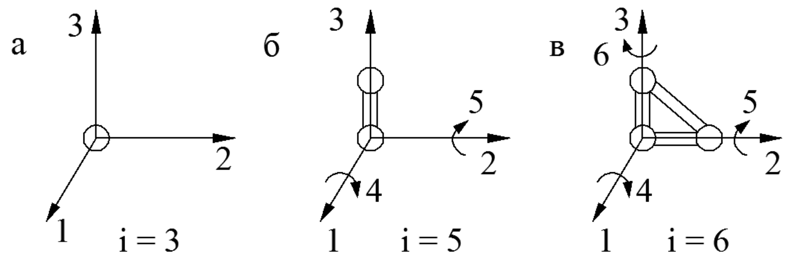
Следовательно, температура газа определяется средней кинетической энергией поступательного движения его молекул, причем температура прямо пропорционально величине $< \varepsilon_{П} >$.

Из последнего уравнения следует, что среднее значение кинетической энергии поступательного движения молекул:

$$< \varepsilon_{П} > = \frac{3}{2}kT$$

Числом степеней свободы i механической системы называется количество независимых величин, с помощью которых может быть задано положение системы в пространстве. Так, положение материальной точки (случай одноатомного газа) в пространстве полностью определяется тремя координатами, т.е. материальная точка имеет три степени свободы (рис.1, а), отражающие поступательное движение частицы.

В случае двухатомного газа добавляются ещё две степени свободы, отражающие возможность вращательного движения его молекул (рис.1, б), а в случае газов, молекулы которых состоят из трех и более атомов, число степеней свободы таких молекул ровно вести, три их которых приходятся на поступательное, а три – на вращательное движение (рис.1, в).



Согласно закону равнораспределения, на каждую степень свободы молекулы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия, равная $\frac{1}{2}kT$, т.е. $<\varepsilon_П> = kT$

Для трех степеней свободы поступательного движения молекул $<\varepsilon_П>=kT$, что соответствует уравнению, полученному из основного уравнения молекулярно-кинетической теории.

2.4 Первое начало термодинамики

Внутренняя энергия U идеального газа определяется только кинетической энергией хаотического движения его молекул, т.к. для идеального газа пренебрегают потенциальной энергией взаимодействия между молекулами и не рассматривают внутримолекулярную энергию. Поэтому величину внутренней энергии можно найти, умножив число молекул N на среднюю энергию одной молекулы $<\varepsilon_П>$:

$$U=N<\varepsilon_П>=N\frac{i}{2}kT$$

Учитывая, что $N=\frac{m}{\mu}N_A$, (N_A – число Авогадро), получим

$$U=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}N_AkT \quad \text{или} \quad U=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT$$

При нагревании данной массы газа от температуры T_1 до температуры T_2, изменение внутренней энергии газа:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T \qquad (\Delta T = T_2 - T_1)$$

Первое начало термодинамики: если данной массе газа сообщено некоторое количество теплоты Q, то эта теплота расходуется на увеличение внутренней энергии U газа и на совершение газом работы A против внешних сил:

$$Q = \Delta U + A$$

Работу, совершенную газом при его расширении от объема V_1 до объема V_2 можно рассчитать по формуле:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Для изотермического процесса (T=const), ΔU=0 и первое начало термодинамики имеет вид: $Q=A$.

Работу газа при изотермическом процессе можно рассчитать, используя уравнение Клапейрона-Менделеева: $p = \frac{1}{V}\frac{m}{\mu}RT$

Тогда $A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V}\frac{m}{\mu}RTdV = \frac{m}{\mu}RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}$

Работа при изобарном процессе (p=const):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p\int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1) = p\Delta V$$

Первое начало термодинамики имеет вид:

$$Q = \Delta V + p\Delta V.$$

Работа при изохорном процессе (V=const): A=0

И первое начало термодинамики имеет вид: $Q = \Delta V$

Теплоемкостью какого-либо тела называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один Кельвин.

Удельной теплоемкостью c называется теплоемкость единицы массы вещества, а молярной теплоемкость C называется теплоемкость моля вещества:

$$c = \frac{Q}{m\Delta T}, \quad c = \frac{Q}{\upsilon \Delta T} \quad \left(\upsilon = \frac{m}{\mu}\right)$$ (υ – число молей)

Отсюда Q=υCΔT . Подставив это выражение в уравнение первого начала термодинамики $Q = \Delta U + p\Delta V$, получим:

$$\upsilon c\Delta T = \Delta U + p\Delta V$$

При изохорном нагревании газа первое начало термодинамики:

$$\upsilon c_V \Delta T = \Delta U$$

Отсюда молярная теплоемкость газа при постоянном объеме:

$$c_V = \frac{1}{\upsilon}\frac{\Delta V}{\Delta T}$$

Учитывая, что $\Delta U = \upsilon \frac{i}{2} R\Delta T$, получим: $c_V = \frac{i}{2} R$

При изобарном нагревании газа первое начало термодинамики:

$$\upsilon C_p \Delta T = \Delta U + p\Delta V$$

Отсюда молярная теплоемкость газа при постоянном давлении:

$$C_p = \frac{1}{\upsilon}\frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{1}{\upsilon}\frac{p\Delta V}{\Delta T} = C_V + \frac{1}{\upsilon}\frac{p\Delta V}{\Delta T}$$

Учитывая, что $pV = \upsilon R\Delta T$, а $p\Delta V = \upsilon R\Delta T$, получим $C_p = C_V + R$ - уравнение Майера.

Поскольку $C_V = \frac{i}{2}R$, то $C_p = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R$.

Адиабатическим процессом называется процесс, протекающий без темплообмена с внешней средой.

Изменения термодинамических параметров идеального газа при адиабатическом процессе происходит таким образом, что величина соотношения PV^{γ} сохраняется при любых состояниях:

$$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} = P_3V_3^{\gamma} = ... = const$$, т.е.

$PV^{\gamma} = const$ - уравнение Пуассона,

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$ – коэффициент Пуассона.

Используя уравнение Клапейрона-Менделеева $pV=\upsilon RT$ уравнение Пуассона можно переписать в следующем виде:

$$TV^{\gamma-1} = const \text{ или } T^{\gamma}p^{1-\gamma} = const$$

Первое начало термодинамики для адиабатического процесса:

$$Q = \Delta U + A = 0 \text{. Отсюда } A = -\Delta U .$$

Следовательно, работа при адиабатическом процессе совершается газом за счет его внутренней энергии:

$$Q = \Delta U + A = -\upsilon C_V\Delta T = \upsilon C_V(T_1 - T_2)$$

Падение температуры газа от T_1 до T_2 происходит при адиабатическом расширении газа от объема V_1 до объема V_2.

При этом совершается работа А:

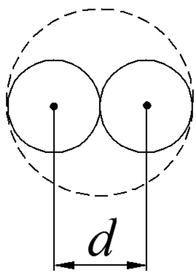
$$A = \frac{\upsilon RT}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right).$$

2.5 Явления переноса

Явления переноса – это явления пространственного переноса массы (диффузия), энергии (теплопроводность), импульса (внутреннее трение или вязкость).

Молекулы газа в состоянии хаотического движения непрерывно сталкиваются друг с другом и передают при этом друг другу энергию и импульс.

Если представить молекулу в виде шарика диаметром d, равным минимальному расстоянию, на которое сближаются две молекулы (рис.2), то величина σ равная πd^2, называется эффективным сечением молекулы.



От величины σ зависит среднее число соударений <z> молекулы в единицу времени и средняя длина свободного пробега <*l*>, т.е. среднее расстояние между двумя последовательными соударениями молекул. Величины <z> и <*l*> определяют параметры процессов переноса: диффузии, теплопроводности и вязкости.

Средняя длина свободного пробега молекулы:

$$< l > = \frac{< V >}{< z >},$$

где <*V*> – средняя арифметическая скорость молекул;
<z> – среднее число столкновений молекулы.

Диффузия в газах

Диффузией называется явление проникновения двух или нескольких соприкасающихся веществ (газов) друг в друга. Например, если в двух частях сосуда, разделенного перегородкой, находятся два различных газа, то после того, как эта перегородка убрана, в результате диффузии каждый газ по истечении определенного времени равномерно займет весь объем сосуда.

Количественно явление диффузии подчиняется закону Фика: масса вещества *m*, переносимая в результате диффузии через площадку *S* за время *t*, пропорциональна площади *S*, времени *t* и градиенту плотности $d\rho/dx$:

$$m = -D\frac{d\rho}{dx}St$$

Градиент плотности $d\rho/dx$ – это скорость изменения плотности газа вдоль оси *x*, направленной перпендикулярно выбранной площадке *S*.

Знак минус в приведенной формуле означает, что перенос массы газа в результате диффузии происходит в сторону убывания его плотности, что указывает на направление процесса в сторону равномерного распределения молекул каждого из соприкасающихся газов во всем объеме.

Коэффициент пропорциональности *D* носит название коэффициента диффузии и определяется следующим образом:

$$D = \frac{1}{3} < V >< l >,$$

где $<V>$ – средняя арифметическая скорость теплового движения молекул;

$<l>$- средняя длина свободного пробега молекул.

Теплопроводность

Теплопроводность – это явление передачи тепла от более нагретой части тела (газа) к более холодной.

Количественно явление теплопроводности подчиняется закону Фурье: теплота, переносимая посредством теплопроводности через площадку *S* за время t пропорциональна площади *S* , времени t и градиенту температуры dT/dx:

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dx} St$$

Градиент температуры dT/dx – это скорость изменения температуры газа вдоль оси x, направленной перпендикулярно выбранной площадке S.

Знак минус в приведенной формуле означает, что перенос тепла в результате теплопроводности происходит в сторону убывания температуры, т.е. от более нагретого тела к менее нагретому.

Коэффициент пропорциональности λ носит название коэффициента теплопроводности и определяется следующим образом:

$$\lambda = \frac{1}{3} C_V \rho < V >< l >,$$

где C_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме;

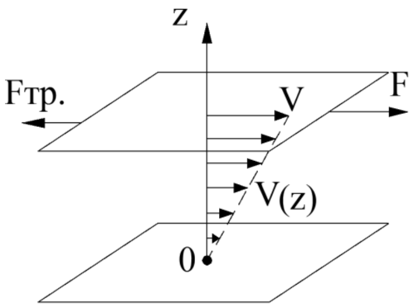
ρ – плотность газа;

$< V >$ – средняя арифметическая скорость теплового движения молекул;

$< l >$ – средняя длина свободного пробега молекул.

Внутреннее трение (вязкость)

Если две параллельно расположение друг относительно друга пластины помещены в жидкость или газ (см. рис.) и первая пластина перемещается относительно второй под действием внешней силы F с постоянной скорость V, то что означает, что кроме силы F на пластину действует также уравновешивающая её сила трения $F_{тр}$.



Сила $F_{тр}$, действующая на пластину площадью S, пропорциональна площади S и градиенту скорости $\frac{dV}{dz}$ (закон Ньютона):

$$F_{тр} = -\eta \frac{dV}{dz} S$$

Градиент скорости $\frac{dV}{dz}$ характеризует быстроту изменения скорости движения слоев газа вдоль оси z, перпендикулярной движению пластины.

Знак минус в приведенной формуле означает, что сила трения направлена противоположно скорости движения пластины.

Коэффициент пропорциональности носит название коэффициента вязкости и определяется следующим образом:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho < V >< l >$$

где ρ – плотность газа;

$<V>$ – средняя арифметическая скорость теплового движения молекул;

$<l>$ – средняя длина свободного пробега молекул.

2.5 Реальные газы

В модели идеального газа пренебрегают размерами молекул и взаимодействием между ними. Эта модель газа хороша только для сильно разряженных состояний газов, т.е. для низких давлений. Повышение давления приводит к уменьшению среднего расстояния между молекулами и поэтому необходимо учитывать собственный объем молекул и взаимодействие между ними.

Уравнение Ван-дер-Ваальса

Уравнение Клапейрона-Менделеева для идеального газа $pV=\upsilon RT$ преобразовано Ван-дер-Ваальсом в уравнение для реального газа в результате введения двух поправок: одной (b) для учета собственных размеров молекул и другой – $\frac{a}{V_m^2}$ для учета межмолекулярного взаимодействия, где b – объем, занимаемый самими молекулами, a – постоянная Ван-дер-Ваальса, V_m – молярный объем. Тогда для 1 моля реального газа уравнение Ван-дер-Ваальса:

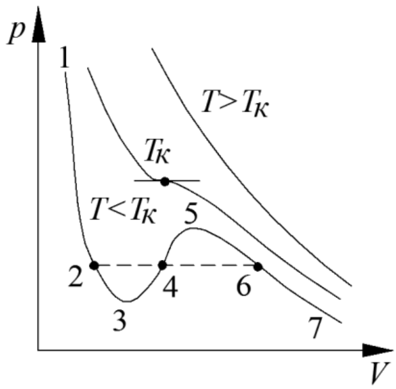
$$\left(p+\frac{a}{V_m^2}\right)\left(V_m-b\right)=RT\,.$$

Изотермы Ван-дер-Ваальса.

При высоких температурах изотермы Ван-дер-Ваальса, т.е. кривые, выражающие зависимость давления газа p от объема V, похожи на изотермы Бойля-Мариотта для идеальных газов (см. рис.).

Однако при понижении температуры и достижения некоторого её значения, называемого критической температурой $T_К$, на изотермах Ван-дер-Ваальса появляется перегиб в точке K, а для более низких температур – волнообразный участок 2 – 6.

Участок 1 – 2 на изотермах Ван-дер-Ваальса описывает жидкое состояние, волнообразный участок 2 – 6 отражает наличие двух фаз – газообразного и жидкого состояния и заменяется прямой 2 – 6, а участок 6 – 7 описывает состояние реального газа. Вещество находящееся в газообразном состоянии при температуре ниже критической, называется паром, а пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется насыщенным.



Примеры решения задач

Пример 1. Определить молярную массу μ смеси кислорода массой $m_1 = 25$ г и азота массой $m_2 = 75$ г.

Решение. Молярная масса смеси M есть отношение массы смеси m к количеству вещества смеси υ:

$$\mu = \frac{m}{\upsilon} \qquad (56)$$

Масса смеси равна сумме масс компонентов смеси

$$m = m_1 + m_2$$

Количество вещества смеси равно сумме количеств вещества компонентов:

$$\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2 = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}.$$

Подставив в формулу (56) выражения m и υ, получим

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}} \qquad (57)$$

Применив метод, использованный в примере 1, найдем молярные массы кислорода μ_1 и азота μ_2:

$\mu_1 = 10^{-3}$ кг/моль; $\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Подставим значения величин в (3.48) и произведем вычисления:

$$\mu = \frac{25 \cdot 10^{-3} + 75 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-3} /(32 \cdot 10^{-3}) + 75 \cdot 10^{-3} /(28 \cdot 10^{-3})} \text{кг/моль} = $$
$$= 28{,}9 \cdot 10^{-3} \text{кг/моль}$$

Пример 2. Определить число N молекул, содержащихся в объеме V = 1мм^3 воды, и массу m_1 молекулы воды. Считая условно, что молекулы воды имеют вид шариков, соприкасающихся друг с другом, найти диаметр d молекул.

Решение. Число N молекул, содержащихся в некоторой системе массой m, равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества υ.

Так как $\upsilon = m/\upsilon$, где μ – молярная масса, то $N = (mN_A)/\mu$. Выразив в этой формуле массу как произведение плотности на объем V, получим:

$$N = \frac{\rho V N_A}{\mu} \tag{58}$$

Произведем вычисления, учитывая, что $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$N = \frac{10^3 \cdot 10^{-9}}{18 \cdot 10^{-3}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{молекул} = 3{,}34 \cdot 10^{19} \text{молекул.}$$

Массу m_1 одной молекулы можно найти по формуле

$$m_1 = \frac{\mu}{N_A} \tag{59}$$

Подставив в (7) значения M и N_A, найдем массу молекулы воды:

$$m_1 = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{6{,}02 \cdot 10^{23}}\,\text{кг} = 2{,}99 \cdot 10^{-26}\,\text{кг}$$

Если молекулы воды плотно прилегают друг к другу, то можно считать, что на каждую молекулу приходится объем (кубическая ячейка) $V_1 = d^3$, где d – диаметр молекулы. Отсюда

$$d = \sqrt[3]{V_1} \tag{60}$$

Объем V_1 найдем, разделив молярный объем V_μ, на число молекул в моле, т. е. на N_A:

$$V_1 = \frac{V_\mu}{N_A}. \tag{61}$$

Подставим выражение (61) в (60):

$$d = \sqrt[3]{\frac{V_\mu}{N_A}},$$

где $V_\mu = \mu / \rho$. Тогда получим:

$$d = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}} \tag{62}$$

Проверим, дает ли правая часть выражения (10) единицу длины:

$$\left\{\frac{[\mu]}{[\rho][N_A]}\right\}^{1/3} = \left\{\frac{1\text{кг/моль}}{1\text{кг/м}^3 \cdot 1\text{моль}^{-1}}\right\}^{1/3} = 1\text{м}.$$

Произведем вычисления:

$$d = \sqrt[3]{\frac{18\cdot10^{-3}}{10^{3}\cdot 6{,}02\cdot10^{23}}}\,\text{м} = 3{,}11\cdot10^{-10}\,\text{м} = 311\,\text{пм}.$$

Пример 3. В баллоне объемом 10л находится гелий под давлением p_1=1МПа и при температуре T_1 = 300 К. После того как из баллона было взято m = 10 г гелия, температура в баллоне понизилась до T_2 = 290 К. Определить давление p_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона, применив его к конечному состоянию газа:

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2, \qquad (63)$$

где m_2 – масса гелия в баллоне в конечном состоянии;
μ – молярная масса гелия;
R – молярная газовая постоянная.

Из уравнения (63) выразим искомое давление:

$$p_2 = \frac{m_2 R T_2}{\mu V} \qquad (64)$$

Массу m_2 гелия выразим через массу m_1, соответствующую начальному состоянию, и массу m гелия, взятого из баллона:

$$m_2 = m_1 - m. \qquad (65)$$

Массу m_1 гелия найдем также из уравнения Менделеева – Клапейрона, применив его к начальному состоянию:

$$m_1 = \frac{\mu p_1 V}{R T_1}. \qquad (66)$$

Подставив выражение массы m_1 в (65), а затем выражение m_2 в (64), найдем

$$p_2 = \left(\frac{\mu p_1 V}{RT_1} - m \right) \frac{RT_2}{\mu V},$$

или

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{m}{\mu} \frac{RT_2}{V}. \qquad (67)$$

Проверим, дает ли формула (67) единицу давления. Для этого в ее правую часть вместо символов величин подставим их единицы. В правой части формулы два слагаемых.

Очевидно, что первое из них дает единицу давления, так как состоит из двух множителей, первый из которых (T_2/T_1) – безразмерный, а второй – давление. Проверим второе слагаемое:

$$\frac{[m][R][T]}{[\mu]} = \frac{1\text{кг}}{1\text{кг/моль}} \frac{1\text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}\cdot 1\text{К}}{1\text{м}^3} = \frac{1\text{кг}\cdot 1\text{моль}}{1\text{кг}} \times$$
$$\times \frac{1\text{Дж}\cdot 1\text{К}}{1\text{м}^3\cdot 1\text{моль}\cdot 1\text{К}} = \frac{1\text{Дж}}{1\text{м}^3} == \frac{1\text{Н}\cdot\text{м}}{1\text{м}^3} = \frac{1\text{Н}}{1\text{м}^2} = 1\text{Па}$$

Паскаль является единицей давления. Произведем вычисления учитывая, что $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$p_2 = \left(\frac{290}{300} \cdot 10^6 - \frac{10^{-2}}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{8{,}31}{10^{-2}} \cdot 290 \right) \text{Па} = 3{,}64 \cdot 10^5\,\text{Па} = 0{,}364\,\text{МПа}$$

Пример 5. Баллон содержит $m_1 =$ 80 г кислорода и $m_2 =$ 320 г аргона. Давление смеси p = 1 МПа, температура T = 300 К. Принимая данные газы за идеальные, определить объем V баллона.

Решение. По закону Дальтона, давление смеси равно сумме парциальных давлений газов, входящих в состав смеси. По уравнению Менделеева – Клапейрона, парциальные давления p_1 кислорода и p_2 аргона выражаются формулами:

$$p_1 = \frac{m_1 RT}{\mu_1 \mathrm{V}}, \qquad p_2 = \frac{m_2 RT}{\mu_2 \mathrm{V}}.$$

Следовательно, по закону Дальтона, давление смеси газов

$$p = p_1 + p_2, \text{ или } p = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{\mathrm{V}},$$

откуда объем баллона

$$V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{p} \qquad (68)$$

Произведем вычисления, учитывая, что $\mu_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\mu_2 = 40 \cdot 10^{3}$ кг/моль.

Пример 5. Найти среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon_{вр} \rangle$ вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре T = 350 К, а также кинетическую энергию $E_к$ вращательного движения всех молекул кислорода массой m = 4 г.

Решение. На каждую степень свободы молекулы газа приходится одинаковая средняя энергия

$$\langle \varepsilon_{вр} \rangle = \frac{1}{2}kT,$$

где k – постоянная Больцмана;

T – термодинамическая температура газа.

Так как вращательному движению двухатомной молекулы (молекула кислорода – двухатомная) соответствуют две степени свободы, то средняя энергия вращательного движения молекулы кислорода

$$\langle \varepsilon_{вр} \rangle = 2\frac{1}{2}kT \qquad (69)$$

Кинетическая энергия вращательного движения всех молекул газа

$$E_к = \langle \varepsilon_{вр} \rangle N. \qquad (70)$$

Число всех молекул газа

$$N = N_A \upsilon, \qquad (71)$$

где N_A – постоянная Авогадро;
υ – количество вещества .

Если учесть, что количество вещества υ = m/M, где $т$ – масса газа; μ – молярная масса газа, то формула (71) примет вид

$$N = N_A \frac{m}{\mu}.$$

Подставив выражение N в формулу (70), получаем

$$E_к = \frac{N_A m \langle \varepsilon_{вр} \rangle}{\mu}. \qquad (72)$$

Произведем вычисления, учитывая, что для кислорода μ = $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$\langle \varepsilon_{вр} \rangle = kT = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 350 Дж = 4{,}83 \cdot 10^{-21} Дж;$$

$$E_к = 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 4{,}83 \cdot 10^{-21} Дж = 364 Дж.$$

Пример 6. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме c_V и при постоянном давлении c_p неона и водорода, принимая эти газы за идеальные.

Решение: Удельные теплоемкости идеальных газов выражаются формулами (73) и (74):

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}, \qquad (73)$$

$$c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}, \qquad (74)$$

Где i – число степеней свободы молекулы газа;
μ – молярная масса.
Для неона (одноатомный газ) $i = 3$ и $M = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.
Произведем вычисления:

$$c_V = \frac{3}{2}\frac{8{,}31}{20\cdot 10^{-3}}\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)} = 6{,}24\cdot 10^2\,\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)};$$

$$c_p = \frac{3+2}{2}\frac{8{,}31}{20\cdot 10^{-3}}\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)} = 1{,}04\cdot 10^3\,\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}\cdot$$

Для водорода (двухатомный газ) i = 5 и M = 2 · 10^{-3} кг/моль. Тогда

$$c_V = \frac{5}{2}\frac{8{,}31}{2\cdot 10^{-3}}\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)} = 1{,}04\cdot 10^4\,\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)};$$

$$c_p = \frac{5+2}{2}\frac{8{,}31}{2\cdot 10^{-3}}\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)} = 1{,}46\cdot 10^4\,\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)};$$

Пример 7. Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_p смеси неона и водорода, если массовые доли неона и водорода составляют $\omega_1 = 80\%$ и $\omega_2 = 20\%$. Значения удельных теплоемкостей газов взять из предыдущего примера.

Решение. Удельную теплоемкость c_V смеси при постоянном объеме найдем следующим образом. Теплоту, необходимую для нагревания смеси на ΔT, выразим двумя способами:

$$Q = c_V(m_1 + m_2)\Delta T, \qquad (75)$$

$$Q = (c_{V,1}m_1 + c_{V,2}m_2)\Delta T, \qquad (76)$$

где $c_{V,1}$ – удельная теплоем- кость неона;

$c_{V,2}$ – удельная теплоемкость водорода.

Приравняв правые части (75) и (76) и разделив обе части полученного равенства на ΔT, получим $c_V(m_1+T_2) = c_{V,1}m_1+c_{V,2}T_2$. Отсюда

$$c_V = c_{V,1}\frac{m_1}{m_1+m_2} + c_{V,2}\frac{m_2}{m_1+m_2},$$

или

$$c_V = c_{V,1}\omega_1 + c_{V,2}\omega_2,$$

где

$$\omega_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2} \text{ и } \omega_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

Рассуждая так же, получим формулу для вычисления удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении:

$$c_p = c_{p,1}\omega_1 + c_{p,2}\omega_2$$

Произведем вычисления:

$$c_V = (6{,}24\cdot 10^2\cdot 0{,}8 + 1{,}04\cdot 10^4\cdot 0{,}2)\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)} = $$
$$= 2{,}58\cdot 10^3\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)} = 2{,}58\text{кДж/(кг}\cdot\text{К)};$$
$$c_p = (1{,}04\cdot 10^3\cdot 0{,}8 + 1{,}46\cdot 10^4\cdot 0{,}2)\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)} = $$
$$= 3{,}75\cdot 10^3\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)} = 3{,}75\text{кДж/(кг}\cdot\text{К)}$$

Пример 8. Кислород массой $т$ = 2 кг занимает объем V_1= 1 м^3 и находится под давлением p_1 = 0,2 МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема V_2 = 3 м^3, а затем при постоянном объеме до давления p_3 = 0,5 МПа. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную им работу A и теплоту Q, переданную газу. Построить график процесса.

Решение. Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = c_V m\Delta T = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}m\Delta T\,; \qquad (77)$$

где i – число степеней свободы молекул газа (для двухатомных молекул кислорода i = 5);

$\Delta T = T_3 - T_1$ – разность температур газа в конечном (третьем) и начальном состояниях.

Начальную и конечную температуру газа найдем из уравнения Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{mRT}{\mu}, \text{ откуда}$$

$$T = \frac{pV\mu}{mR}$$

Работа расширения газа при постоянном давлении выражается формулой

$$A_1 = \frac{m_1 R\Delta T}{\mu} \qquad (78)$$

Работа газа, нагреваемого при постоянном объеме, равна нулю:

$$A_2 = 0\,.$$

Следовательно, полная работа, совершаемая газом,

$$A = A_1 + A_2 = A_1$$

Согласно первому началу термодинамики, теплота Q, переданная газу, равна сумме изменения внутренней энергии ΔU и работы A:

$$Q = \Delta U + A$$

Произведем вычисления, учтя, что для кислорода μ = 32 ·

10^{-3} кг/моль:

$$T_1 = \frac{2\cdot 10^5\cdot 1\cdot 32\cdot 10^{-3}}{2\cdot 8{,}31}K = 385K;$$

$$T_2 = \frac{2\cdot 10^5\cdot 3\cdot 32\cdot 10^{-3}}{2\cdot 8{,}31}K = 1155K;$$

$$T_3 = \frac{5\cdot 10^5\cdot 3\cdot 32\cdot 10^{-3}}{2\cdot 8{,}31}K = 2887K;$$

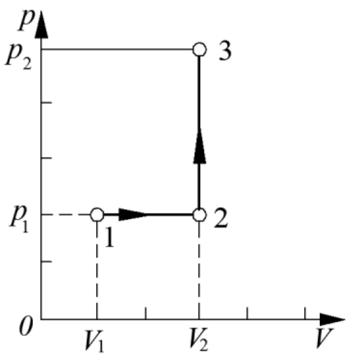
$$A_1 = \frac{8{,}31\cdot 2\cdot (1155-385)}{32\cdot 10^{-3}}\text{Дж} = 0{,}400\cdot 10^6\text{Дж} = 0{,}4\text{МДж};$$

$$A = A_1 = 0{,}4\text{МДж};$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{8{,}31\cdot 2(2887-385)}{32\cdot 10^{-3}}\text{Дж} = 3{,}24\cdot 10^6\text{Дж} = 3{,}24\text{МДж};$$

$$Q = (3{,}24+0{,}4)\text{МДж} = 3{,}64\text{МДж}.$$

График процесса приведен на рис.



Пример 9. В цилиндре под поршнем находится водород массой m=0,02 кг при температуре T_1 = 300 К. Водород сначала расширился адиабатно, увеличив свой объем в n_1 = 5 раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в n_1 = 5 раз. Найти температуру в конце адиабатного расширения и работу, совершаемую газом при этих процессах. Изобразить процесс графически.

Решение. Температуры и объемы газа, совершающего адиабатный процесс, связаны между собой соотношением

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \text{ или } \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n_1^{\gamma-1}},$$

где γ – отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме;

$n_1 = V_2/V_1$.

Отсюда получаем следующее выражение для конечной температуры:

$$T_2 = \frac{T_1}{n_1^{\gamma-1}}.$$

Работа A_1 газа при адиабатном расширении может быть определена по формуле (79):

$$A_1 = \frac{m}{\mu} c_V (T_1 - T_2) = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R(T_1 - T_2), \qquad (79)$$

где c_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Работа A_2 газа при изотермическом процессе может быть выражена в виде:

$$A_2 = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln\frac{V_3}{V_2}, \text{ или } A_2 = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln\frac{1}{n_2}$$

где $n_2 = V_2/V_3$.

Произведем вычисления, учитывая, что для водорода как двухатомного газа $\gamma = 1.4$, $i = 5$ и $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$T_2 = \frac{300}{5^{1,4-1}} K = \frac{300}{5^{0,4}} K.$$

Так как $5^{0,4} = 1,91$ (находится логарифмированием), то

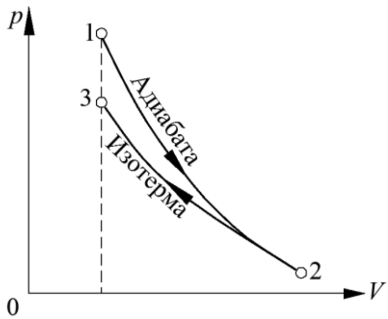
$$T_2 = \frac{300}{1{,}91} K = 157 K\,;$$

$$A_1 = \frac{0{,}02 \cdot 5 \cdot 8{,}31}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2}(300 - 157)\ \text{Дж} = 29{,}8\ \text{кДж}$$

$$A_2 = \frac{0{,}02}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot 157 \ln\frac{1}{5}\ \text{Дж} = -21\text{кДж}$$

Знак минус показывает, что при сжатии работа газа совершается над газом внешними силами.

График процесса приведен на рис.



Пример 10. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура теплоотдатчика T_1 = 500 К. Определить термический КПД η цикла и температуру T_2 теплоприемника тепловой машины, если за счет каждого килоДжоуля теплоты, полученной от теплоотдатчика, машина совершает работу A = 350 Дж.

Решение. Термический КПД тепловой машины показывает, какая доля теплоты, полученной от теплоотдатчика, превращается в механическую работу. Термический КПД выражается формулой

$$\eta = \frac{A}{Q_1}$$

где Q_1 – теплота, полученная от теплоотдатчика;
A – работа, совершенная рабочим телом тепловой машины.

Зная КПД цикла, можно по формуле $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$ определить температуру охладителя T_2:

$$T_2 = T_1(1-\eta)$$

Произведем вычисления:

$$\eta = \frac{350}{1000} = 0{,}35\,;\ T_2 = 500(1-0{,}35)\,К = 325\,К.$$

Пример 11. Найти добавочное давление внутри мыльного пузыря диаметром *d* = 10 см. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь?

Решение. Пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности: внешнюю и внутреннюю. Обе поверхности оказывают давление на воздух, заключенный внутри пузыря. Так как толщина пленки чрезвычайно мала, то диаметры обеих поверхностей практически одинаковы. Поэтому добавочное давление:

$$p = 2\frac{2\alpha}{r},$$

где α – коэффициент поверхностного натяжения;
r – радиус пузыря.
Так как *r* = d/2, то

$$p = \frac{8\alpha}{d}.$$

Работа, которую нужно совершить, чтобы, растягивая пленку, увеличить ее поверхность на ΔS, выражается формулой

$$A = \alpha\Delta S\text{, или } A = \alpha(S - S_0).$$

В данном случае *S* – общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря; S_0 – общая площадь двух поверхностей плоской пленки, затягивавшей отверстие трубки до выдувания пузыря. Пренебрегая S_0, получаем

$$A = \alpha S = 2\pi d^2\alpha.$$

Произведем вычисления:

$$p = \frac{8 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{0,1} \text{ Па} = 3,2 \text{ Па}$$

$$A = 2 \cdot 3,14 \cdot (0,1)^2 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 2,5 \text{ мДж}.$$

ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

Вариант 0.

0.1 Определить, сколько молекул водорода содержится в баллоне емкостью 50 *л* под давлением $1.5 \cdot 10^5$ *Па* при температуре 18°*С*. Какова плотность водорода?.

0.2 Газ массой $6\,кг$ занимает объем $8\,м^3$ при давлении $2*10^5$ *Па* и температуре 250 *К*. Какой объем будет занимать тот же газ массой $5\,кг$ при давлении $4*10^5$ *Па* и температуре 300 *К*.

0.3 Определить суммарную кинетическую энергию поступательного движения всех молекул газа, находящегося в сосуде объемом 3 *л* под давлением 540 *кПа*.

0.4 Вычислить удельную теплоемкость при постоянном объеме смеси кислорода и азота, если масса кислорода составляет 25% от массы смеси.

0.5 Кислород нагревается при постоянном давлении, равном 80 *кПа*. При этом его объем увеличивается от 1 $м^3$ до 3 $м^3$. Определить изменение внутренней энергии кислорода и работу, совершенную им при расширении, а также количество тепла, сообщенное газу.

0.6 Объем водорода при изотермическом расширении при температуре 300 *К*. увеличился в три раза. Определить работу, совершенную газом, и теплоту, полученную им при этом. Масса водорода равна 200 *г*.

0.7 Определить плотность водорода, если средняя длина свободного пробега его молекул равна 0.1 *см*.

0.8 Найти вязкость азота при нормальных условиях, если коэффициент диффузии для него равен $1.42 \cdot 10^{-5}$ $м^2/с$.

Вариант 1.

1.1 В баллоне емкостью 3 *м*^{3} находится 1.4 *кг* азота и 2 *кг* гелия. Определить температуру газовой смеси и парциальное давление гелия, если парциальное давление азота равно 1.3·10^5 *Па*.

1.2 При температуре $727°C$ газ занимает объем $8л$ и производит давление 2·10^5 *Па* на стенки сосуда. Определить давление этого газа при температуре 23°*С*, если он будет занимать объем 160 *л*.

1.3 Средняя кинетическая энергия молекул воздуха равна 5.5·10^{-21} *Дж*, концентрация молекул 2.8·10^{25} *м*$^{-3}$. Определить давление воздуха.

1.4 Определить удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме газообразной окиси углерода, считая этот газ идеальным.

1.5 Один килограмм углекислого газа изобарно нагрет от 268 до 400 *К*. Определить работу, совершаемую газом при увеличении его объема, и изменение внутренней энергии этого газа.

1.6 Водород занимает объем 10 *м*^{3} при давлении 0.1 *Па*. Газ нагрели при постоянном объеме до давления 0.3 *МПа*. Определить изменение внутренней энергии газа, работу, совершаемую газом, и количество тепла, сообщенное газу.

1.7 Найти среднее число столкновений молекул азота в единицу времени при давлении 50*кПа* и температуре 27°*С*.

1.8 Найти коэффициент диффузии и вязкость воздуха при давлении 100*кПа* и температуре 10°*С*. Диаметр молекул воздуха равен 0.3 *нм*.

Вариант 2.

2.1 В баллоне объемом 10 *л* находится гелий под давлением 1 *МПа* и при температуре 300 *К*. После того, как из баллона было выпущено 10 *г* гелия, температура в баллоне понизилась до 290 *К*. Определить давление гелия, оставшегося в баллоне.

2.2 Газ, при температуре 300 *К*, находится под давлением 2.8·10^5 *Па* и занимает объем
0.8 *м*^{3}. Определить изменение температуры этого газа, если при давлении 1.6·10^5 *Па* он занял объем 1.4 *м*^{3}.

2.3 Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул воздуха, при давлении 10^5 *Па*, равна 6.5·10^{-21} *Дж*. Определить концентрацию молекул воздуха.

2.4 Определить молярные теплоемкости при постоянном давлении и при постоянном объеме газа, состоящего по массе на 85% из кислорода и на 15% из озона.

2.5 Кислород массой 160 *г* нагрет изобарно на 100 *К*. Определить работу газа при его расширении, а также изменение внутренней энергии этого газа.

2.6 Баллон емкостью 20 *л* с кислородом при давлении 10^7 *Па* и температуре 7^o *С* нагревают до температуры 27^o *С*. Какое количество тепла при этом сообщено кислороду? Найти изменение внутренней энергии кислорода при нагревании.

2.7 Найти среднюю длину свободного пробега молекул углекислого газа при температуре 100^o *С* и давлении 13 *Па*. Диаметр молекул углекислого газа 0.32 *нм*.

2.8 Во сколько раз вязкость кислорода больше вязкости азота? Температура газов одинакова.

Вариант 3.

3.1 Баллон содержит 80 *г* кислорода и 320 *г* аргона. Давление смеси равно 1 *МПа*, температура смеси равна 300 *К*. Определить объем баллона.

3.2 В цилиндре двигателя температура воздуха в начале сжатия была 50^o *С*. Найти температуру воздуха в конце сжатия, если его объем уменьшается в 17 раз, а давление возрастает в 50 раз.

3.3 В сосуде объемом 2 *л* находится 10 *г* кислорода под давлением 100 *кПа*. Найти плотность газа и среднюю кинетическую энергию поступательного движения его молекул.

3.4 Определить молярную теплоемкость при постоянном давлении и при постоянном объеме смеси, содержащей 3 *кг* азота и 1 *кг* водяного пара, считая эти газы идеальными.

3.5 Определить начальную температуру 0.56 *кг* азота, если при изобарном нагревании до 370 *К* совершена работа 16.62 *кДж* на увеличение его объема.

3.6 В цилиндре под поршнем находится кислород массой 2 *кг*. Поршень закреплен. Какое количество тепла нужно сообщить кислороду, чтобы его температура повысилась на 5*К*. Найти увеличение внутренней энергии кислорода и работу газа.

3.7 Найти среднюю длину свободного пробега молекул воздуха при нормальных условиях. Диаметр молекул воздуха 0.3 *нм*.

3.8 Найти коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях, если средняя длина свободного пробега его молекул равна 0.16 *мкм*.

Вариант 4.

4.1 Баллон объемом 20 *л* заполнен азотом. Температура азота равна 400 *К*. Когда часть азота израсходовали, давление в баллоне понизилось на 200 *кПа*. Определить массу израсходованного азота, если температура в баллоне осталась неизменной.

4.2 Тонкий резиновый шар радиусом 2 *см* заполнен воздухом при температуре 20° *С* и давлении 0.1 *МПа*. Каков будет радиус шара, если его опустить в воду с температурой 4° *С* на глубину 20 *м*? Атмосферное давление нормальное.

4.3 При каком давлении внутренняя энергия всех молекул идеального газа в объеме 2 $м^3$ составит 450 *кДж*?

4.4 На сколько увеличиться средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул одноатомного газа после его нагревания от 0° *С* до 100° *С*?

4.5 Объем газа увеличился в $3 раза$ при давлении $3{*}10^5$ *Па*. Определить первоначальный объем газа, если на его расширение потребовалось совершить работу в 12.9 *кДж*.

4.6 В теплоизолированном цилиндре с поршнем находится азот массой 0.2 *кг* при температуре 240 *К*. Азот, расширяясь, совершил работу, равную 4.5 *кДж*. Найти изменение внутренней энергии азота и его температуру после расширения.

4.7 При нормальных условиях средняя длина свободного пробега молекул водорода равна 0.16 *мкм*. Определить эффективный диаметр молекулы водорода.

4.8 Найти теплопроводность воздуха при давлении 100 *кПа* и температуре 10° *С*. Диаметр молекул воздуха равен 0.3 *нм*.

Вариант 5.

5.1 Найти плотность азота при температуре 400 *К* и давлении 2 *МПа*.

5.2 Открытую с обеих сторон узкую цилиндрическую трубку длиной 0.3 *м* до половины погрузили в ртуть. Затем закрыли верхнее отверстие трубки и вынули ее из ртути. При этом в трубке остался столбик ртути длиной 0.22 *м*. Чему равно атмосферное давление?

5.3 Определить среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул газов воздуха при давлении 100 *Па*. Концентрация молекул воздуха при этих условиях $2.7 \cdot 10^{25}$ $м^3$.

5.4 Разность удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме трехатомного газа равна $0.2 \cdot 10^3$ *Дж*/(*кг***К*). Вычислить молярную и удельную теплоемкость газа.

5.5 При температуре 280 *К* и давлении $4 \cdot 10^5$ *Па* газ занимает объем 0.1 *м*^{3}. Какая работа совершается газом по увеличению его объема, если он нагрет при постоянном давлении до 420 *К*?

5.6 На сколько увеличилась внутренняя энергия 10 молей одноатомного газа при его изобарном нагревании на 100 *К*? Какую работу совершил при этом газ и какое количество теплоты ему было сообщено?

5.7 Найти число столкновений, которые происходят в течение секунды между всеми молекулами, находящимися в объеме 1 *мм*^{3} водорода при нормальных условиях.

5.8 Найти коэффициент диффузии гелия при нормальных условиях.

Вариант 6.

6.1 В сосуде объемом 10 *л* при температуре 450 *К* находится смесь азота массой 5 *г* и водорода массой 2 *г*. Определить давление смеси.

6.2 Какое давление устанавливается в цилиндре двигателя, если к концу такта сжатия температура рабочей смеси повышается от 50°*С* до 250°*С*, а объем уменьшается от 0.75 *л* до 0.12 *л*? Первоначальное давление равно 80 *кПа*.

6.3 Определить плотность кислорода, находящегося под давлением $2 \cdot 10^5$ *Па*, если средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы кислорода равна $1.2 \cdot 10^{-20}$ *Дж*.

6.4 Вычислить удельные теплоемкости неона и водорода при постоянном объеме и при постоянном давлении, считая эти газы идеальными.

6.5 При изобарном расширении двухатомного газа при давлении 10^5 *Па* его объем увеличился на 5 м^3. Определить работу расширения газа, изменение его внутренней энергии и количество теплоты, сообщенной этому газу.

6.6 Во сколько раз увеличится объем 0.4 моля водорода при изотермическом расширении, если при этом газ получит количество тепла, равное 800 *Дж*? Температура водорода равна 300 *К*.

6.7 Найти среднюю длину свободного пробега молекул водорода при давлении 133 *мПа* и температуре -173° *С*.

6.8 Найти теплопроводность водорода, вязкость которого равна 8.6 *мкПа·с*.

Вариант 7.

7.1 Смесь водорода и азота общей массой 290 *г* при температуре 600 *К* и давлении 3 *МПа* занимает объем 30 *л*. Определить массу водорода и массу азота.

7.2 Газ при давлении 0.2 *МПа* и температуре 15° *С* имеет объем 5 *л*. Чему равен объем этой массы газа при нормальных условиях?

7.3 Определить внутреннюю энергию одного моля идеального газа при нормальных условиях.

7.4 Найти среднюю кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы кислорода при температуре 350 *К*, а также кинетическую энергию поступательного движения всех молекул , содержащихся в 4 *г* кислорода при этой температуре.

7.5 Двухатомному газу при его изобарном расширении сообщено 14 *кДж* теплоты. Определить работу расширения и изменение внутренней энергии газа.

7.6 10 *г* азота изотермически расширяется при температуре - 23° *С*, причем его давление меняется от 250 *кПа* до 100 *кПа*. Найти работу, совершенную газом при расширении.

7.7 Молекулы аргона при нормальных условиях испытывают $6 \cdot 10^9$ столкновений в секунду при средней длине свободного пробега $6.35 \cdot 10^{-8}$ *м*. Определить среднюю скорость поступательного движения молекул газа.

7.8 В сосуде объемом 2 *л* находится $4 \cdot 10^{22}$ молекул двухатомного газа. Теплопроводность газа равна 14 *мВт/(м·К)*. Найти коэффициент диффузии газа.

Вариант 8.

8.1 Какое количество кислорода выпустили из баллона емкостью 10 *л*, если давление при этом изменилось от $1.4 \cdot 10^6$ *Па* до $7 \cdot 10^5$ *Па*, а температура понизилась от 27° *С* до 7° *С*?

8.2 В цилиндре под поршнем массой 1 *кг* с площадью основания 36 *см* находится газ, занимающий объем 3.8 *л* при температуре 20° *С*. После того, как на поршень поставили гирю и нагрели газ на 5° *С*, поршень поднялся на высоту 1 *см*. Найти массу гири. Давление атмосферы нормальное.

8.3 Определить среднюю кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы кислорода, если кислород находится под давлением $3 \cdot 10^5$ *Па* и имеет плотность 2 *кг/м*^{3}.

8.4 Найти энергию поступательного движения молекул, содержащихся в 1 *кг* азота при температуре 10° *С*.

8.5 Четыре моля углекислого газа нагреты при постоянном давлении на 100 *К*. Определить работу расширения, изменение внутренней энергии газа и количество теплоты, сообщенной газу.

8.6 При изотермическом расширении газа, первоначальный объем которого 2*м*^{3}, давление газа уменьшается от 0.5 *МПа* до 0.4 *МПа*. Найти работу, совершенную газом.

8.7 Молекулы углекислого газа при нормальных условиях имеют среднюю длину свободного пробега $4\cdot10^{-8}$ *м* и движутся со средней скоростью 362 *м/с*. Сколько столкновений в секунду испытывает каждая молекула?

8.8 Найти эффективный диаметр молекулы кислорода, если при температуре 0° *С* его вязкость равна 19 *мкПа·с*.

Вариант 9.

9.1 Найти молярную массу воздуха, считая, что он состоит по массе из одной части кислорода и трех частей азота.

9.2 При увеличении абсолютной температуры идеального газа вдвое. Его давление увеличилось на 25%. Во сколько раз при этом изменился объем газа?

9.3 Какой объем занимает идеальный газ, находящийся под давлением $1.5\cdot10^5$ *Па*, если его внутренняя энергия равна 400 *кДж.*

9.4 Найти среднюю кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы, а также суммарную кинетическую энергию всех молекул, содержащихся в одном килограмме гелия при температуре 70 *К*.

9.5 При изобарном расширении 20 *г* водорода его объем увеличился в 2 раза. Начальная температура газа 300 *К*. Определить работу расширения газа, изменение внутренней энергии и количество теплоты, переданной газу.

9.6 Гелий, находящийся при нормальных условиях, изотермически расширяется от объема 1 *л* до объема 2 *л*. Найти работу, совершенную газом при расширении, и количество теплоты, сообщенное газу.

9.7 В сосуде объемом 200 *см*^{3} находится 1 *г* азота. Найти среднюю длину свободного пробега молекул азота.

9.8 Коэффициент диффузии и вязкость кислорода при некоторых условиях равны, соответственно, $1.22\cdot10^{-5}$ м^2/с и 19.5 *мкПа·с*. Найти плотность кислорода и среднюю арифметическую скорость его молекул.