ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Физика»

Учебно-методическое пособие

по практическим занятиям по дисциплине

«Физика»

Авторы

Егорова С.И.,
Жданова Т.П.,
Кунаков В.С.,
Лемешко Г.Ф.,
Лещева О.А.,
Попова И.Г.,
Холодова О.М.

Ростов-на-Дону, 2022

Аннотация

Пособие предназначено для студентов очной формы обучения всех технических направлений, изучающих предмет «Физика».

Цель пособия – оказать помощь студентам в изучении курса физики. В пособие включены основные формулы и законы, примеры решения и оформления задач.

Авторы

Д.т.н, профессор кафедры «Физика» Егорова С.И.
К.ф-м.н., доцент кафедры «Физика» Жданова Т.П.
Д.т.н, профессор кафедры «Физика» Кунаков В.С.
К.ф-м.н, профессор кафедры «Физика» Лемешко Г.Ф.
Доцент кафедры «Физика» Лещева О.А.
Старший преподаватель кафедры «Физика» Попова И.Г.
Доцент кафедры «Физика» Холодова О.М.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Практические занятия служат для закрепления теоретических знаний, а также для приобретения соответствующих знаний и умений, развития навыков самостоятельной работы студентов. Задачи решаются по задачникам, разработанным преподавателями кафедры. При этом **для самостоятельной работы обязательно** использование лекций, учебных пособий по теории, изданных на кафедре.

При решении задач необходимо:

- записать краткое условие задачи, выразить все известные величины в одной и той же системе единиц (как правило, в СИ). При необходимости ввести дополнительные постоянные физические величины;
- установить, какие физические закономерности лежат в основе данной задачи, затем из формул, выражающих эти закономерности, найти решение задачи в общем виде;
- после этого можно перейти к подстановке численных данных, выраженных в одной и той же системе единиц (как правило, в Международной системе – СИ);
- иногда нет необходимости выражать все данные в одной системе, например, если некоторая физическая величина входит и в числитель, и в знаменатель;
- при подстановке в расчётную формулу значения величин представлять в виде произведения десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 1250 надо записать $1{,}25 \cdot 10^3$. В таком виде представляется и окончательный ответ задачи;
- при получении численного ответа нужно обращать внимание на степень точности окончательного результата, точность ответа не должна превышать точности, с которой даны исходные величины

1 ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ

Основные формулы

- Средняя и мгновенная скорости материальной точки:

$<\vec{\upsilon}>=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, $\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}$, где $\Delta\vec{r}$ - перемещение точки за время Δt, $\vec{r}$ - радиус-вектор, определяющий положение точки.

- Для прямолинейного равномерного движения

($\vec{\upsilon}=const$):

$\upsilon=\frac{S}{t}$,где S – путь, пройденный точкой за время t.

- Среднее и мгновенное ускорения материальной точки:

$$<\vec{a}>=\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}, \qquad \vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}.$$

- Полное ускорение при криволинейном движении:

$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$, $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$, где $a_\tau=\frac{d\upsilon}{dt}$- тангенциальная составляющая ускорения, направленная по касательной к траектории; $a_n=\frac{\upsilon^2}{R}$- нормальная составляющая ускорения, направленная к центру кривизны траектории (R - радиус кривизны траектории в данной точке).

- Путь и скорость для равнопеременного движения материальной точки ($\vec{a}=const$):

$S=\upsilon_0 t\pm\frac{at^2}{2}$; $\upsilon=\upsilon_0\pm at$, где υ_0- начальная скорость, «+» соответствует равноускоренному движению, «-» - равнозамедленному.

- Угловая скорость:

$$\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

- Угловое ускорение:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

- Угловая скорость для равномерного вращательного движения твердого тела:

$\omega = \dfrac{\varphi}{t} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$, где φ - угол поворота тела, T – период вращения; $\nu = \dfrac{N}{t}$ - частота вращения (N – число оборотов, совершаемых телом за время t).

- Угол поворота и угловая скорость для равнопеременного вращательного движения твердого тела ($\vec{\varepsilon} = const$):

$\varphi = \omega_0 t \pm \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$; $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$, где ω_0 - начальная угловая скорость, «+» соответствует равноускоренному вращению, «-» - равнозамедленному.

- Связь между линейными и угловыми величинами:

$S = R\varphi$; $\upsilon = R\omega$; $a_\tau = R\beta$; $a_n = \omega^2 R$, где R – расстояние от точки до мгновенной оси вращения.

Примеры решения задач

Задача 1. Зависимость пройденного телом пути S от времени t выражается уравнением $S = At - Bt^2 + Ct^3$ (A = 2 м/с, B = 3 м/с^2, C = 5 м/с^3). Запишите выражения для скорости и ускорения. Определите для момента времени $t = 2c$ после начала движения пройденный путь, скорость и ускорение.

Дано:	**Решение:**
$S = At - Bt^2 + Ct^3$ $A = 2\frac{м}{с}$, $B = 3\frac{м}{с^2}$, $C = 5\frac{м}{с^3}$, $t = 2с$.	Для определения зависимости скорости движения частицы от времени определяем первую производную от пути по времени: $\upsilon = \dot{S} = A - 2Bt + 3Ct^2$, или после подстановки $\upsilon = (2 - 6t + 15t^2) = (2 - 12 + 15\cdot 2^2) = 50\ (м/с)$. Для определения зависимости ускорения частицы от времени определяем первую производную от скорости по времени: $a = \dot{\upsilon} = -2B + 6Ct$, после подстановки $a = (-6 + 30t) = (-6 + 30\cdot 2) = 54 (м/с^2)$. Пройденный путь определяется как разность $S = S(2) - S(0) = 2\cdot 2 - 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 = 32 (м)$
$\upsilon(t) - ?\quad a(t) - ?$ $\upsilon - ?\ a - ?\ S - ?$	

Ответ: $\upsilon = 50\ м/с$; $a = 54 м/с^2$; $S = 32 м$.

Задача 2. Тело брошено со скоростью $\upsilon_0 = 15 м/с$ под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Принимая тело за материальную точку, определите нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорение тела через 1,2 с после начала движения.

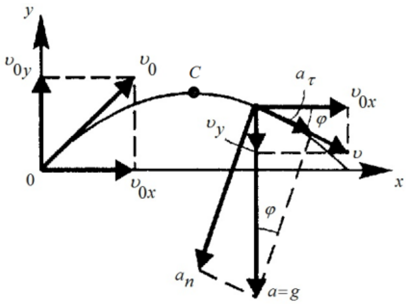
Дано:	**Решение**
$\upsilon_0 = 15 м/с$ $\alpha = 30^0$ $t = 1{,}2 с$ $g = 10 м/с^2$ $a_n - ?$ $a_\tau - ?$	

Рис.1.1

остается постоянной по величине и направлению. Проекция υ_Y на ось $0y$ изменяется. В точке С (рис.1.1) скорость направлена горизонтально, т.е. $\upsilon_y = 0$. Это означает, что $\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt' = 0$, где $t' = \frac{\upsilon_{0y}}{g} = \frac{\upsilon_0 \cdot \sin\alpha}{g}$ - время, в течение которого материальная точка поднимается до максимальной высоты. После подстановки значений $t' = \frac{15 \cdot 0{,}5}{10} = 0{,}75 c$.

К моменту времени 1,2 с тело будет находиться на спуске. Полное ускорение в процессе движения направлено вертикально вниз и равно ускорению свободного падения g. Нормальное ускорение равно проекции ускорения свободного падения на направление радиуса кривизны, а тангенциальное ускорение - проекции ускорения свободного падения на направление скорости движения (см. рис.1.1.) Из треугольников скоростей и ускорений имеем: $\cos\varphi = \frac{\upsilon_x}{\upsilon} = \frac{a_n}{g}$, $\sin\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} = \frac{a_\tau}{g}$, откуда $a_n = \frac{\upsilon_x}{\upsilon} g$, $a_\tau = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} g$, где $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + (g \cdot t_1)^2}$ - скорость в момент времени $t_1 = t - t' = 1{,}2 - 0{,}75 = 0{,}45 c.$

После подстановки значений получаем:

$$a_n = \frac{\upsilon_0 \cdot \cos\alpha}{\sqrt{(\upsilon_0 \cdot \cos\alpha)^2 + (g \cdot t_1)^2}} \cdot g = \frac{15 м/c^2 \cdot 0{,}866}{\sqrt{(15 м/c^2 \cdot 0{,}866)^2 + (10 м/c^2 \cdot 0{,}45 c)^2}} 10 \frac{м}{c^2},$$

$a_n = 9{,}4 м/c^2$.

$$a_\tau = \frac{\upsilon_0 \cdot \sin\alpha}{\sqrt{(\upsilon_0 \cdot \cos\alpha)^2 + (g \cdot t_1)^2}} \cdot g = \frac{15 м/c^2 \cdot 0{,}5}{\sqrt{(15 м/c^2 \cdot 0{,}866)^2 + (10 м/c^2 \cdot 0{,}45 c)^2}} 10 \frac{м}{c^2},$$

$a_\tau = 5{,}5 м/c^2$.

Ответ: $a_n = 9{,}4 м/c^2$, $a_\tau = 5{,}5 м/c^2$.

Задача 3. Точка движется по окружности радиусом $R = 0{,}1 м$ так, что зависимость угла поворота радиуса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $B = 2 рад/c$, $C = 1 рад/c^3$. Определите к концу второй секунды вращения: а) угловую скорость; б) линейную скорость; в) угловое ускорение; г) нормальное ускорение; д) тангенциальное ускорение.

Дано:

$R = 0{,}1\,м$

$\varphi = A + Bt + Ct^3$

$B = 2\,рад/с$

$C = 1\,рад/с^3$

$t = 2\,с$

$\omega - ?$ $\upsilon - ?$

$\varepsilon - ?$ $a_n - ?$

$a_\tau - ?$

Решение:

Зависимость угловой скорости от времени определяем, взяв первую производную от угла поворота по времени, т.е. $\omega = \dot{\varphi} = B + 3Ct^2$.

Для момента времени $t = 2\,с$

$$\omega = 2\,рад/с + 3 \cdot 1\,рад/с^3 \cdot 4с^2,$$

$$\omega = 14\,рад/с.$$

Линейная скорость точки $\upsilon = \omega \cdot \mathrm{R}$. После подстановки получим: $\upsilon = 1{,}4\,м/с$.

Зависимость углового ускорения точки от времени определится первой производной от угловой скорости по времени, т.е. $\varepsilon = \dot{\omega} = 6Ct$.

Для момента времени $t = 2\,с$ $\varepsilon = 6 \cdot 1 \cdot 2 = 12\,рад/с^2$. Нормальное a_nи a_τ тангенциальное ускорения определяются по формулам:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{1{,}4^2}{0{,}1} = 19{,}6\,(м/с^2);$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R = 12 \cdot 0{,}1 = 1{,}2\,м/с^2.$$

Ответ: $\omega = 14\,рад/с$; $\upsilon = 1{,}4\,м/с$; $\varepsilon = 12\,рад/с^2$;

$a_n = 19{,}6\,м/с^2$; $a_\tau = 1{,}2\,м/с^2$.

Задача 4. Колесо автомобиля вращается равнозамедленно. За время 2 мин оно изменило частоту вращения от 240 до 60 мин$^{-1}$. Определите: 1) угловое ускорение колеса; 2) число полных оборотов, сделанных колесом за это время.

Дано:	Решение:
$t = 2\,мин = 120\,с$ $\nu_0 = 240\,мин^{-1} = 4\,с^{-1}$ $\nu = 60\,мин^{-1} = 1\,с^{-1}$	Запишем формулы для угла поворота и угловой скорости при равнозамедленном вращении: $\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$, (1) $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$, (2)
$\varepsilon - ?\quad N - ?$	

где $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, $\omega = 2\pi\nu$ - угловые скорости в начальный и конечный моменты времени соответственно.

Из уравнения (2) получаем:

$$\varepsilon = \frac{2\pi(\nu_0 - \nu)}{t} = \frac{2\cdot 3{,}14\,рад(4\,с^{-1} - 1\,с^{-1})}{120\,с} = 0{,}157\,рад/с^2 .$$

Угол поворота $\varphi = 2\pi N$. Поэтому выражение (1) можно записать: $2\pi N = 2\pi\nu_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = 2\pi\nu_0 t - \pi(\nu_0 - \nu_1)t$.

Отсюда

$$N = \nu_0 t - \frac{(\nu_0 - \nu)t}{2} = 4\,c^{-1}\,120c - \frac{(4\,c^{-1} - 1\,c^{-1})120c}{2} = 300.$$

Ответ: $\varepsilon = 0{,}157\,\text{рад}/\text{с}^2$; $N = 300$.

2 ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные формулы

- Импульс материальной точки:

$\vec{P} = m\vec{\upsilon}$, где m - масса материальной точки, $\vec{\upsilon}$ - скорость движения.

- Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки):

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

- Это же уравнение в проекциях на касательную и нормаль к траектории движения точки:

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{d\upsilon}{dt}; \quad F_n = ma_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R,$$ где

$a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ - тангенциальное (касательное) ускорение,

$a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$ - нормальное (центростремительное) ускорение.

- Сила трения скольжения:

$F_{тр} = \mu N$, где μ — коэффициент трения скольжения; N — сила нормального давления.

- Сила упругости:

$F = -kx$, где x - величина деформации; k - коэффициент жесткости.

- Сила гравитационного притяжения двух материальных точек:

$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, м^3/(кг \cdot с^2)$ – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы взаимодействующих точек, r - расстояние между точками.

- Закон сохранения импульса для замкнутой системы:

$\vec{P}=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i = const$, где n - число материальных точек (или тел), входящих в систему.

- Общая скорость тел после **неупругого** соударения:

$\upsilon = \dfrac{m_1\upsilon_1 \pm m_2\upsilon_2}{m_1+m_2}$, где m_1 и m_2 - массы тел, υ_1 и υ_2 - их скорости до взаимодействия.

- Скорости тел после **упругого** соударения:

$$u_1 = \frac{(m_1-m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1+m_2};\quad u_2 = \frac{(m_2-m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}.$$

- Работа, совершаемая силой F на пути ds:

$dA = F_s ds = F ds \cos\alpha$, где F_s — проекция силы на направление перемещения; α — угол между направлениями силы и перемещения.

- Работа, совершаемая переменной силой, на пути s:

$$A=\int_s F_s ds = \int_s F\cos\alpha\, ds$$

- Средняя мощность за промежуток времени Δt:

$$\langle N\rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t},$$

где ΔA – работа за промежуток времени Δt.

- Мгновенная мощность:

$N=\dfrac{dA}{dt}$, или $N=\vec{F}\vec{\upsilon} = F_s\upsilon = F\upsilon\cos\alpha$.

- Кинетическая энергия тела массой m движущегося со скоростью υ:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

- Потенциальная энергия тела массой m, находящегося над поверхностью земли на высоте h:

$E_П = mgh$, где g - ускорение свободного падения.

- Потенциальная энергия упругодеформированного тела:

$$E_П = \frac{kx^2}{2}.$$

- Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия:

$$E_П = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

- Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы):

$$E_K + E_П = E = const.$$

Примеры решения задач

Задача 1. На шнуре, перекинутом через неподвижный блок, подвешены грузы массами m_1 и $m_2 (m_1 > m_2)$. Считаем нить и блок невесомыми и пренебрегаем трением в блоке. С каким ускорением движутся грузы? Какова сила натяжения шнура во время движения?

Дано:

m_1, m_2

$(m_1 > m_2)$

$a - ?$

$T - ?$

Решение:

Делаем рисунок, расставляем силы, действующие на каждое тело:

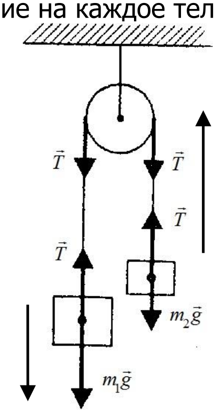


Рис.2.1

Записываем второй закон Ньютона для каждого тела в векторной форме:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T} \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T} \end{cases}$$

Поскольку $m_1 > m_2$, то тело массой m_1 движется вниз, а тело массой m_2 - вверх. Для каждого тела устанавливаем ось $0Y$, совпадающую с направлением ускорения и записываем второй закон Ньютона для каждого тела в проекции на направление оси $0Y$:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ m_2 a = T - m_2 g \end{cases}$$

Складывая почленно эти уравнения, получаем:

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}.$$

Подставляя это выражение в одно из уравнений системы, получаем выражение для силы натяжения:

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Задача 2. В установке (см. рис.2.2) угол наклонной плоскости с горизонтом $\alpha = 30^0$, массы тел $m_1 = 150\,г$ и $m_2 = 200\,г$. Считая нить и блок невесомыми, определите ускорение, с которым движутся тела и силу натяжения нити, если тело m_2 опускается. Коэффициент трения тела m_1 о плоскость равен 0,1.

Дано:

$m_1 = 150\,г$

$m_2 = 200\,г$

$\alpha = 30^0$

$\mu = 0{,}1$

$a - ?\quad T - ?$

Решение:

Делаем рисунок, расставляем силы, действующие на каждое тело:

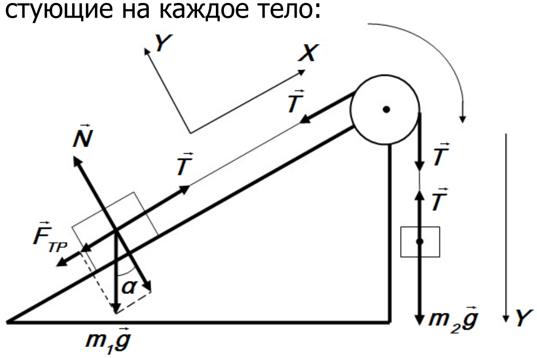


Рис.2.2

Записываем второй закон Ньютона для каждого тела в векторной форме:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{ТР.} \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T} \end{cases}$$

Для каждого тела устанавливаем оси координат и записываем второй закон Ньютона для каждого тела в проекциях на направления $0X$ и $0Y$:

$$1)\begin{cases} OX:\ m_1a = T - m_1g\sin\alpha - F_{ТР.} \\ OY:\ N = mg\cos\alpha \end{cases} \qquad 2)\ OY: m_2a = m_2g - T.$$

Учитывая, что $F_{ТР.} = \mu \cdot N = \mu \cdot mg\cos\alpha$, получаем систему:

$$\begin{cases} m_1a = T - m_1g\sin\alpha - \mu \cdot m_1g\cos\alpha \\ m_2a = m_2g - T \end{cases}.$$

Складываем почленно эти уравнения:

$$(m_1+m_2)a=(m_2-m_1\sin\alpha-\mu\cdot m_1\cos\alpha)g.$$

Отсюда получаем выражение для ускорения:

$$a=\frac{(m_2-m_1\sin\alpha-\mu\cdot m_1\cos\alpha)g}{m_1+m_2}.$$

Подставляем значения величин:

$$a=\frac{(0{,}2-0{,}15\sin 30^o-0{,}1\cdot 0{,}15\cos 30^o)10}{0{,}15+0{,}2}=0{,}4(м/с^2).$$

Из уравнения 2) выражаем силу натяжения: $T=m_2g-m_2a$.

Подставляем значения величин:

$$T=0{,}2кг(10-0{,}4)м/с^2=1{,}92\,H.$$

Ответ: $a=0{,}4м/с^2$; $T=1{,}92\,H$.

Задача 3. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар упругим и центральным, определите, какую часть своей первоначальной кинетической энергии первое тело передает второму при ударе? Задачу решите сначала в общем виде, а затем рассмотрите случаи: 1) $m_1=m_2$; 2) $m_1=9m_2$.

Дано:	Решение:
m_1, m_2, υ_1, $\upsilon_2=0$, 1) $m_1=m_2$, 2) $m_1=9m_2$.	Скорость первого тела до удара υ_1. Скорость второго тела до удара $\upsilon_2=0$. Кинетическая энергия первого тела до удара $E_{K1}=\frac{m_1\cdot\upsilon_1^2}{2}$. Пусть, скорость второго тела после удара равна u_2. Тогда кинетическая энергия второго тела после удара $E'_{K2}=\frac{m_2\cdot u_2^2}{2}$, а отношение энергий
$\frac{E'_{K2}}{E_{K1}}$ - ?	

$$\frac{E'_{K2}}{E_{K1}}=\frac{m_2\cdot u_2^2}{m_1\cdot\upsilon_1^2} \quad (1)$$

Для определения скорости второго тела после удара запишем закон сохранения импульса в проекции на направление движения и закон сохранения механической энергии, полагая, что система тел замкнута и в ней действуют только консервативные силы.

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot \upsilon_1 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \\ \frac{m_1 \cdot \upsilon_1^2}{2} = \frac{m_1 \cdot u_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot u_2^2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Преобразуем систему (2) к виду

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot \upsilon_1 - m_1 \cdot u_1 = m_2 \cdot u_2 \\ m_1 \cdot \upsilon_1^2 - m_1 \cdot u_1^2 = m_2 \cdot u_2^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Разделив одно на другое выражения системы (3), получим $u_1 = u_2 - \upsilon_1$, а после подстановки скорости u_1 в первую формулу системы (3) получим

$$u_2 = \frac{2m_1 \cdot \upsilon_1}{m_1 + m_2}. \qquad (4)$$

Из выражений (1) и (4) следует:

$$\frac{E'_{K2}}{E_{K1}} = \frac{4m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

1) Если $m_1 = m_2$, то $\frac{E'_{K2}}{E_{K1}}$ =1. При равенстве масс первое тело полностью отдает энергию второму, т.е. первое тело остановится, а второе начнет двигаться со скоростью первого тела.

2) Если $m_1 = 9m_2$, то $\frac{E'_{K2}}{E_{K1}} = \frac{4 \cdot 9m_2 \cdot m_2}{100m_2^2} = 0{,}36$.

Ответ: 1) $\frac{E'_{K2}}{E_{K1}}$ =1; 2) $\frac{E'_{K2}}{E_{K1}} = 0{,}36$.

3. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Основные формулы и законы

- Момент инерции материальной точки:

$J = m r^2$, где m — масса точки; r — расстояние до оси вращения.

- Момент инерции механической системы (тела) относительно неподвижной оси:

$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, где r_i - расстояние материальной точки массой m_i до оси вращения; в случае непрерывного распределения масс:

$$J = \int r^2 dm.$$

- Моменты инерции тел правильной геометрической формы (тела считаются однородными; m — масса тела):

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Обруч или полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии проходит через центр цилиндра	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось симметрии проходит через центр цилиндра (диска)	$\frac{1}{2} mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12} ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3} ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5} mR^2$

- Теорема Штейнера:

$J = J_c + md^2$, где J_c - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс; J - момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии d; m - масса тела.

- Момент силы относительно неподвижной точки:

$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$, где r - радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы $\vec{F}$. Модуль момента силы относительно неподвижной оси:

$M = Fl$, где l - плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения).

- Основной закон динамики вращательного движения твердого тела:

$\vec{M}dt = d(J\vec{\omega})$, где $\vec{M}$ - момент сил, приложенных к телу; J – момент инерции тела относительно оси вращения; $\vec{\omega}$ - угловая скорость тела.

- Уравнение (закон) динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси:

$M_z = J_z \dfrac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon$, где ε - угловое ускорение; J_z - момент инерции тела относительно оси *z*.

- Момент импульса (момент количества движения) твердого тела относительно оси вращения:

$L_z = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i = J_z \omega$, где r_i - расстояние от оси z до отдельной частицы тела; $m_i \upsilon_i$ - импульс этой частицы; J_z - момент инерции тела относительно оси z; ω - его угловая скорость.

- Закон сохранения момента импульса для замкнутой системы:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = const.$$

- Работа при вращательном движении тела:

$dA = M_z d\varphi,$

где $d\varphi$ - угол поворота тела; M_z - момент силы относительно оси z.

- Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z:

$E_K = \dfrac{J_z \omega^2}{2}$, где J_z - момент инерции тела относительно оси z; ω - его угловая скорость.

- Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения:

$E_K = \dfrac{1}{2} m \upsilon_c^2 + \dfrac{1}{2} J_c \omega^2$, где m - масса тела; υ_c - скорость центра масс тела; J_c - момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω - угловая скорость тела.

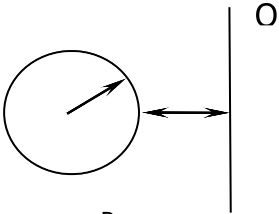
- Связь работы и кинетической энергии тела при вращательном движении:

$A = \dfrac{J \omega_2^{\,2}}{2} - \dfrac{J \omega_1^{\,2}}{2}$, где J – момент инерции тела относительно оси вращения; ω_2 – угловая скорость тела в конечном состоянии; ω_1 – угловая скорость тела в начальном состоянии.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти момент инерции шара радиусом R относительно оси OO', находящейся на расстоянии l от поверхности шара (рис.3.1).

Дано:	Решение:
R, l	Записываем теорему Штейнера:
$J = ?$	$J = J_c + md^2$, где $J_c = \dfrac{2}{5}mR^2$,



Ри
с.3.1

- момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр масс;
$d = R + l$ - расстояние между осями. Получаем: $J = \dfrac{2}{5}mR^2 + m(R+l)^2$.

Задача 2. На шнуре, перекинутом через блок в виде однородного цилиндра массой $m = 0{,}2\,кг$ подвешены грузы массами $m_1 = 0{,}3\,кг$ и $m_2 = 0{,}6\,кг$. Считаем нить невесомой и пренебрегаем трением в блоке. С каким ускорением движутся грузы? Каковы силы натяжения шнура, действующие на грузы во время движения?

Дано:	**Решение:**
$m = 0{,}2\,кг$ $m_1 = 0{,}3\,кг$, $m_2 = 0{,}6\,кг$	Делаем рисунок, расставляем силы, действующие на каждое тело и на блок:
$a - ?\quad T_1 - ?\quad T_1 - ?$	

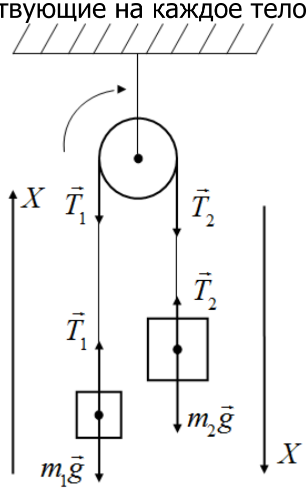


Рис.3.2

Записываем второй закон Ньютона для каждого тела в векторной и скалярной форме:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1 a = T_1 - m_1 g \\ m_2 a = m_2 g - T_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Для блока записываем основное уравнение динамики вращательного движения в векторной и скалярной форме:

$$\vec{M} = J\cdot\vec{\varepsilon}\,, \qquad M = J\cdot\varepsilon\,, \qquad (2)$$

где $M = (T_2 - T_1)R$ - момент сил, $J = \dfrac{1}{2}mR^2$ - момент инерции блока, $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$ - угловое ускорение блока. Подставляя эти выражения в (2), получаем:

$$(T_2 - T_1)R = \frac{mR^2}{2}\frac{a}{R}, \text{ т.е. } (T_2 - T_1) = \frac{m\,a}{2}\ .$$

(3)

Решая совместно уравнения (1) и (3), получаем:

$$T_2 - T_1 = m_2 g - m_2 a - m_1 a - m_1 g .$$

Отсюда: $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + m/2}$,

$$T_2 = m_2(g - a), \quad T_1 = m_1(g + a).$$

Подставляем значения величин:

$$a = \frac{(0{,}6 - 0{,}3)10}{0{,}3 + 0{,}6 + 0{,}2/2} = 3\left(м/с^2\right),$$

$$T_2 = 0{,}6(10 - 3) = 4{,}2\,Н ,$$

$$T_1 = 0{,}3(10 + 3) = 3{,}9\,Н .$$

Ответ: $a = 3\left(м/с^2\right), T_1 = 3{,}9\,Н , T_2 = 4{,}2\,Н$.

Задача 3. Шар и обруч одинаковой массы и радиуса, изготовленные из одного и того же материала, катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Во сколько раз кинетическая энергия шара меньше кинетической энергии обруча?

Дано:	**Решение:**
$m,\ R,\ \upsilon$ $\dfrac{E_1}{E_2} = ?$	Кинетическая энергия тела, катящегося по поверхности, складывается из кинетической энергии вращательного движения и поступательного движения центра масс:

$$E = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} . \qquad (1)$$

Моменты инерции относительно центра масс обруча $J_1 = mR^2$ (2) и шара $J_2 = \dfrac{2}{5} mR^2$ (3). Связь линейной и угловой скорости - $\upsilon = \omega \cdot R$ (4). Подставляя (2), (3) и (4) в (1) получаем:

$E_1 = \dfrac{mR^2\upsilon^2}{2R^2} + \dfrac{m\upsilon^2}{2} = m\upsilon^2$ - для обруча,

$E_2 = \dfrac{2mR^2\upsilon^2}{5 \cdot 2R^2} + \dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{7}{10} m\upsilon^2$ - для шара.

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m\upsilon^2 \cdot 10}{7m\upsilon^2} = \frac{10}{7} \approx 1{,}4.$$

Ответ: в 1,4 раза.

Задача 4. Через блок в форме диска радиусом 10 см и массой 30 г перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы одинаковой массы. Если на правый груз поместить перегрузок, то система придет в движение и за 1,8 с груз пройдет путь 70 см. Определить: 1) ускорение системы и скорость груза в конце пути, 2) угловую скорость и угловое ускорение блока, 3) момент инерции блока и момент силы, действующей на блок.

Дано:

$R = 10\,см = 0{,}1\,м$,

$M = 30\,г = 0{,}03\,кг$,

$M_1 = M_2$,

t = 1,8 с,

$S = 70\,см = 0{,}7\,м$,

Найти:

$a, \upsilon, \omega, \varepsilon, I, M.$

Решение:

При добавлении перегрузка система будет двигаться равноускоренно. Путь при равноускоренном движении, если начальная скорость равна нулю, находится по формуле $S = \dfrac{at^2}{2}$. Отсюда ускорение грузов равно $a = \dfrac{2S}{t^2} = \dfrac{2 \cdot 0{,}7\,м}{(1{,}8\,с)^2} = 0{,}43\,м/с^2$. Скорость груза в конце пути равна $\upsilon = at = 0{,}43\,м/с^2 \cdot 1{,}8\,с = 0{,}77\,м/с$.

Угловое ускорение равно $\varepsilon = \dfrac{a}{R} = \dfrac{0{,}43\,м/с^2}{0{,}1\,м} = 4{,}3\,рад/с^2$. Угловая скорость при равноускоренном движении находится по формуле $\omega = \varepsilon t = 4{,}3\,рад/с^2 \cdot 1{,}8\,с = 7{,}7\,рад/с$. Момент инерции блока в форме диска равен $I = \dfrac{MR^2}{2} = \dfrac{0{,}03\,кг \cdot 0{,}1\,м^2}{2} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,кг \cdot м^2$.

Используя основной закон динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси, можно найти момент силы $M = I\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-3} кг \cdot м^2 \cdot 4{,}3 рад/с^2 = 6{,}5 \cdot 10^{-3} Н \cdot м.$

Ответ: 1) 0,43 м/с^2, 0,77 м/с, 2) 7,7 рад/с, 4,3 рад/с^2, 3) 0,0015 кг·м^2, 0,0065 Н·м.

4 МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Основные формулы

- Основное уравнение молекулярно-кинетической теории:

$P = \frac{1}{3} n m_0 \langle \upsilon_{кв.}^2 \rangle = \frac{2}{3} n \langle E_к \rangle = \frac{1}{3} \rho \langle \upsilon_{кв.}^2 \rangle = nkT$, где P – давление газа, $n = N/V$ – концентрация молекул, m_0 – масса одной молекулы, $\langle \upsilon_{кв.} \rangle$ – средняя квадратичная скорость одной молекулы, $\rho = nm_0 = m/V$ - плотность газа, T – абсолютная температура, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ $Дж/К$ – постоянная Больцмана.

- Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы:

$$\langle E_k \rangle = \frac{m_0 \langle \upsilon_{кв}^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

- Изопроцессы (газовые законы) – $m = const$:

1) $T - const$ - изотермический: $P_1 V_1 = P_2 V_2$;

2) $P - const$ - изобарный: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$;

3) $V - const$ - изохорный: $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$.

- Уравнение Менделеева-Клапейрона:

$PV = \frac{m}{M} RT$, где V – объём газа, m – масса газа, M – молярная масса, $R = 8{,}31 Дж/(моль \cdot K))$ - универсальная газовая постоянная.

- Количество вещества:

$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}$, где N – общее число молекул,

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,моль^{-1}$ - постоянная Авогадро.

- Скорости молекул:

$$\langle \upsilon_{кв.} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3PV}{m}}$$ - средняя квадратичная,

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\, m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\, M}} = \sqrt{\frac{8PV}{\pi\, m}}$$ - средняя арифметическая,

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2PV}{m}}$$ - наиболее вероятная.

- Нормальные условия:

$T_0 = 273K\,(0^0C);\ P_0 \approx 10^5\,Па\,(760\,мм\,рт.ст.);$

$V_0 = 22{,}4\,м^3 / моль$ - объём одного моля газа.

- Закон распределения молекул идеального газа по скоростям:

$$f(\upsilon) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \upsilon^2 e^{\frac{-m_0\upsilon^2}{2kT}}.$$

- Закон распределения молекул идеального газа по энергиям:

$$f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2} E^{1/2} e^{-E/(kT)}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Определите, сколько молей и молекул водорода (H_2) содержится в объеме 50 м^3 под давлением 767 мм рт. ст. при температуре 18°C. Какова плотность газа?

Дано:	Решение:
V = 50 м^3 ; p = 767 мм. рт. ст. ≅ 767·133 Па; T = 291 К ; M = 2·10^{-3} кг/моль.	На основании уравнения Менделеева – Клапейрона: $pV = \nu RT$ устанавливаем число молей ν , содержащихся в заданном объеме V : $\nu = \frac{pV}{RT}$; $\nu = \frac{767 \cdot 133 \cdot 50}{8{,}31 \cdot 291} = 2{,}11\,(\text{моль})$
ν – ? N – ? ρ – ?	

Число молекул N , содержащихся в данном объеме, находим, используя число Авогадро N_A (которое определяет количество молекул содержащихся в одном моле). Общее количество молекул, находящихся в массе m данного газа, может быть установлено, так как известно число молей ν :

$$N = \nu N_A .$$

Подставляя числовые изначения, получаем:

$$N = 2{,}11 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{26} = 12{,}7 \cdot 10^{26} .$$

Плотность газа определяем из уравнения Менделеева - Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT; \qquad \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Подставляя числовые значения в единицах СИ в формулу, определим плотность газа:

$$\rho = \frac{767 \cdot 1{,}33 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 291} = 8{,}44 \cdot 10^{-2}\,(\text{кг/м}^3).$$

Ответ: $\nu = 2{,}11\,(\text{моль})$; $N = 12{,}7 \cdot 10^{26}$; $\rho = 8{,}44 \cdot 10^{-2}\,(кг/м^3)$.

Задача 2. В сосуде объемом 2 м^3 находится смесь 4 кг гелия (He) и 2 кг водорода (H_2) при температуре 27°С. Определите давление и молярную массу смеси газов.

Дано:

V = 2 м^3

$m_1 = 4$ кг

$M_1 = 4\cdot10^{-3}$ кг/моль

$m_2 = 2$ кг

$M_2 = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль

$T_1 = 300$ К

p - ? M -?

Решение:

Воспользуемся уравнением Менделеева - Клапейрона, применив его к гелию и водороду:

$$p_1V = \frac{m_1}{M_1}RT \qquad (1)$$

$$p_2V = \frac{m_2}{M_2}RT \qquad (2)$$

где p_1 – парциальное давление гелия; m_1 – масса гелия; M_1 - его молярная масса; V - объем сосуда; T - температурагаза; R = 8,31 Дж/(моль·К) - газовая постоянная;

p_2 – парциальное давление водорода; m_2 – масса водорода; M_2 – его молярная масса.

По закону Дальтона: $p = p_1 + p_2$

Из уравнений (1) и (2) выразим p_1 и p_2 и подставим в уравнение (3):

$$p = \frac{m_1RT}{M_1V} + \frac{m_2RT}{M_2V} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V} \quad . \qquad (4)$$

С другой стороны, уравнение Менделеева - Клапейрона для смеси газов имеет вид:

$$pV = \left(\frac{m_1 + m_2}{M}\right)RT \quad . \qquad (5)$$

Сравнивая (4) и (5) найдем молярную массу смеси газов по формуле:

$$M = \frac{m_1 + m_2}{\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}} = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2}, \qquad (6)$$

где ν_1 и ν_2 – число молей гелия и водорода соответственно.

Подставляем числовые значения:

$$p=\left(\frac{4}{4\cdot 10^{-3}}+\frac{2}{2\cdot 10^{-3}}\right)\cdot\frac{8{,}31\cdot 300}{2}\approx 2{,}5\cdot 10^{6}\,(\text{Па}).$$

$$M=\frac{4+2}{\dfrac{4}{4\cdot 10^{-3}}+\dfrac{2}{2\cdot 10^{-3}}}=3\cdot 10^{-3}\,(кг/моль).$$

Ответ: $p=2{,}5\cdot 10^{6}$ *Па*; $M=3\cdot 10^{-3}$ *кг / моль.*

Задача 3. Определите число молекул воздуха в аудитории объемом V=180 м^3 при температуре t=22^{0}C и давлении P=0,98·10^5 Па. Какова концентрация молекул воздуха при этих условиях?

Дано:	Решение:
V=180 м^3; T=295 К; R=8,31 $\frac{Дж}{моль\,K}$; P=0,98· 10^5 Па; N_A=6,02·10^2 $\frac{1}{моль}$	Число молей воздуха в аудитории $$\nu=\frac{N}{N_A}=\frac{m}{M},\qquad(1)$$ где – N_A - число Авогадро, m – масса воздуха в аудитории, M – молярная масса воздуха. Из выражения (1) $$N=\frac{m}{M}N_A.\qquad(2)$$
N - ? , n - ?	

Число молей воздуха в аудитории можно выразить, используя уравнение Менделеева - Клапейрона $PV=\frac{m}{M}RT$, откуда $\frac{m}{M}=\frac{PV}{RT}$. После подстановки $\frac{m}{M}$ из последней формулы в выражение (2) получим

$$N=N_A\frac{PV}{RT}.\qquad(3)$$

Используя числовые значения, определим N = 0,43·10^{28}. Проверим единицы измерения правой части выражения (3)

$[N]=\dfrac{Н\cdot м^3\cdot моль\cdot К}{моль\cdot м^2\cdot Дж\cdot К}=1$. Концентрацию (число молекул в единице объема) определим по формуле $n=\dfrac{N}{V}$. После подстановки значений, получим $n=0{,}24\cdot10^{26}\ 1/м^3$.

Ответ: $N = 0{,}43\cdot10^{28}$, $n=0{,}24\cdot10^{26}\ 1/м^3$.

Задача 4. Определите среднюю квадратичную скорость молекул некоторого газа, плотность которого при давлении $P=1{,}1\cdot10^5$ Па равна $\rho=0{,}024\ \dfrac{кг}{м^3}$. Какова масса одного моля этого газа, если значение плотности дано для температуры 27^0 С?

Дано:	Решение:
$P = 1{,}1\cdot10^5$ Па; $\rho = 0{,}024\ \dfrac{кг}{м^3}$; $T = 300$ К. ——— $V_{КВ.}$ - ? M -?	Для определения средней квадратичной скорости движения молекул используем основное уравнение молекулярно-кинетической теории: $P=\dfrac{1}{3}m_0 n V^2_{КВ.}$, (1) где m_0 – масса одной молекулы газа, n – концентрация молекул. Так как $m_0 n = \rho$, то уравнение (1) можно записать

в виде: $P=\dfrac{1}{3}\rho\overline{V}^2$, откуда $V_{КВ.}=\sqrt{\dfrac{3P}{\rho}}$, после подстановки числовых значений и вычисления получим:

$$V_{КВ.}=\sqrt{\frac{3\cdot1{,}1\cdot10^5}{0{,}24}}=1172{,}6\ \frac{м}{с}.\qquad [V_{КВ.}]=\sqrt{\frac{Н\cdot м^3}{м^2\cdot кг}}=\sqrt{\frac{кг\cdot м\cdot м}{с^2\cdot кг}}=\frac{м}{с}.$$

Для определения массы одного моля газа используем уравнение Клапейрона-Менделеева - $PV=\dfrac{m}{M}RT$, откуда $P=\dfrac{m}{V}\cdot\dfrac{RT}{M}$. Так как $\dfrac{m}{V}=\rho$, то $P=\rho\dfrac{RT}{M}$, или $M=\dfrac{\rho RT}{P}$. После подстановки числовых значений и вычисления

$$M=\frac{0{,}24\cdot8{,}31\cdot300}{1{,}1\cdot10^5}=0{,}005\frac{кг}{моль}.$$

$$[M]=\frac{кг\cdot Дж\cdot К\cdot м^{2}}{м^{3}\cdot моль\cdot К\cdot Н}=\frac{кг\cdot Н\cdot м}{м\cdot Н\cdot моль}=\frac{кг}{моль}.$$

Ответ: $V_{КВ.}=1172{,}6\,м/с$; $M=0{,}005\ кг/моль.$

5 ОСНОВЫ РАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

Основные формулы

- Молярные теплоёмкости при постоянном объёме (C_V) и постоянном давлении (C_P):

$C_V = \frac{i}{2}R, \qquad C_P = \frac{i+2}{2}R$, где i – число степеней свободы, $R = 8{,}31\,Дж/(моль \cdot К)$ - универсальная газовая постоянная.

- Связь между удельной (c) и молярной (C) теплоёмкостями:

$c = C/M$,где M – молярная масса.

- Внутренняя энергия идеального газа:

$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = \frac{m}{M}C_V T$, где m - масса газа, T - абсолютная температура.

- Изменение внутренней энергии идеального газа:

$$\Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T,$$

- Работа расширения газа:

$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV$, где P - давление газа, V - объём газа.

$A = P(V_2 - V_1)$ - при изобарном процессе.

$A = \frac{m}{M}RT\,ln\frac{V_2}{V_1}$ - при изотермическом процессе.

$A = -\Delta U = -\frac{m}{M}C_V\Delta T = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right]$ - при адиабатном процессе, где $\gamma = C_p/C_V = (i+2)/i$.

- Первое начало термодинамики:

$Q = \Delta U + A$, где Q – количество теплоты, сообщённое системе, ΔU - изменение внутренней энергии системы, A – работа, совершённая системой против внешних сил.

- Уравнение Пуассона для адиабатного процесса:

$$PV^{\gamma} = const.$$

- Уравнение адиабаты идеального газа в переменных T и V

$$TV^{\gamma-1} = const.$$

- Коэффициент полезного действия цикла Карно:

$\eta = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$, где Q_1 - количество теплоты, полученное от нагревателя, Q_2 - количество теплоты, переданное холодильнику, T_1 - температура нагревателя, T_2 - температура холодильника.

- Изменение энтропии при равновесном переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$\Delta S_{1\to2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Кислород, занимающий при давлении P=10^5 Па объем V = 0,04 м^3, расширяется так, что объем увеличивается в два раза. Определите конечное давление и работу, совершенную газом при изобарном, изотермическом и адиабатном процессах.

Дано:	**Решение:**
$P = 10^5$ Па; $V = 0{,}04$ м^3; $V_1 = 2V = 0{,}08$ м^3.	1. При изобарном процессе P=const, следовательно, $P_1=P=10^5$ Па. Работа при изобарном процессе $A_1=P\Delta V=10^5\frac{н}{м^2}(0{,}08м^3-0{,}04м^3)=0{,}4\cdot 10^4$ Дж.
P_1 - ? P_2 - ? P_3 - ? A_1 - ? A_2 - ? A_3 - ?	2. При изотермическом процессе начальные и конечные значения давления и объема связаны между собой выражением $PV=P_2V_1$, откуда $P_2=\frac{PV}{V_1}=\frac{10^5\,Па\cdot 0{,}04м^3}{0{,}08м^3}=0{,}5\cdot 10^5\,Па.$

Для определения работы газа при изотермическом процессе воспользуемся выражением $A_2=\frac{mRT}{M}ln\frac{V_1}{V}$. Из уравнения Клапейрона-Менделеева $\frac{mRT}{M}=PV$, следовательно $A_2=P\,ln\frac{V_1}{V}$. После подстановки числовых значений и вычисления получаем: $A_2=10^5\frac{Н}{м^2}0{,}04м^3\ln\frac{0{,}08м^3}{0{,}04м^3}=0{,}27\cdot 10^4\,Дж.$.

3. При адиабатном процессе давление и объем связаны между собой уравнением Пуассона $PV^{\gamma}=P_3V_1^{\gamma}$, где $\gamma=\frac{C_P}{C_V}$, $C_P=\frac{i}{2}R+R$ -молярная теплоемкость газа при постоянном давлении, $C_V=\frac{i}{2}R$ - молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. Так как молекула кислорода состоит из двух атомов, то $i=5$, а отношение $\frac{C_P}{C_V}=1{,}4.$ Из уравнения Пуассона $P_3=P\left(\frac{V}{V_1}\right)^{\gamma}$, или после подстановки значений и вычисления

$P_3=10^5\left(\frac{0{,}04м^3}{0{,}08м^3}\right)^{1{,}4}=0{,}38\cdot 10^5\,Па$. Работа, совершаемая газом при адиабатном расширении, равна убыли внутренней энергии, т.е.

$A_3 = -\Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R(T - T_3)$, где T_3 – абсолютная температура газа после адиабатного расширения. Запишем уравнение состояния до и после адиабатного расширения газа $PV = \frac{mRT}{M}$ и $P_3V_1 = \frac{mRT_3}{M}$.

Из последних двух уравнений $T - T_3 = (PV - P_3V_1)\frac{M}{mR}$. Следовательно, получим: $A_3 = \frac{i}{2}(PV - P_3V_1)$. После подстановки числовых значений и вычисления:

$A_3 = \frac{5}{2}(10^5\,\frac{Н}{м^2}\,0{,}04 м^3 - 0{,}38 \cdot 10^5\,\frac{Н}{м^2}\,0{,}08 м^3) = 0{,}25 \cdot 10^4\ Дж.$

Ответ: P_1=10^5 Па, $P_2 = 0{,}5 \cdot 10^5\ Па$, $P_3 = 0{,}38 \cdot 10^5$ Па, A_1=$0{,}4 \cdot 10^4$Дж, A_2= $0{,}27 \cdot 10^4\ Дж.$, $A_3 = 0{,}25 \cdot 10^4\ Дж$.

6.ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Основные формулы

- Закон Кулона:

$F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2}$, где F – модуль силы взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2; r – расстояние между зарядами; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} Ф/м$ - электрическая постоянная, ε - диэлектрическая проницаемость среды, в которой находятся заряды (для вакуума $\varepsilon = 1$)

- Напряженность и потенциал электростатического поля:

$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0}$; $\varphi = \dfrac{W_п}{q_0}$,или $\varphi = \dfrac{A_\infty}{q_0}$, где $\vec{F}$ – сила, действующая на точечный положительный заряд q_0, помещенный в данную точку поля; $W_п$ – потенциальная энергия заряда q_0; A_∞ – работа по перемещению заряда q_0 из данной точки поля в бесконечность.

- Напряженность и потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от него:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}; \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r}.$$

- Поток вектора напряженности через элементарную площадку dS:

$d\Phi_E = \vec{E}d\vec{S} = E_n dS$, где $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ – вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с нормалью $\vec{n}$ к площадке; E_n – составляющая вектора $\vec{E}$ по направлению нормали $\vec{n}$ к площадке.

- Поток вектора напряженности через произвольную поверхность S:

$$\varPhi_E = \int_S \vec{E}d\vec{S} = \int_S E_n dS.$$

- Напряженность и потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов (принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей):

$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$; $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$, где $\vec{E}_i$, φ_i – соответственно напряженность и потенциал поля, создаваемого зарядом q_i, n – число зарядов, создающих поле.

- Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля:

$\vec{E} = -grad\varphi$, или $\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы координатных осей.

- В случае поля, обладающего центральной или осевой симметрией:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

- Для однородного поля (поля плоского конденсатора):

$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}$, где $(\varphi_1 - \varphi_2)$- разность потенциалов между пластинами конденсатора, d - расстояние между ними.

- Электрический момент диполя (дипольный момент):

$\vec{p} = |q|\vec{l}$, где $\vec{l}$ – плечо диполя (векторная величина, направленная от отрицательного заряда к положительному).

- Линейная, поверхностная и объемная плотность зарядов, т.е. заряд, приходящийся соответственно на единицу длины, площади и объема:

$$\tau = \frac{dq}{dl};\ \sigma = \frac{dq}{dS};\ \rho = \frac{dq}{dV}.$$

- Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме:

$$\Phi_E = \oint\limits_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_V \rho\, dV,$$ где $\sum_{i=1}^{n} q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности S; N – число зарядов; ρ – объемная плотность зарядов.

- Напряженность поля, создаваемая равномерно заряженной бесконечной плоскостью:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

- Напряженность и потенциал поля, создаваемого проводящей заряженной сферой радиусом R с зарядом q на расстоянии r от центра сферы:

$$E = 0;\ \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon R} \quad \text{при} \quad r < R \quad \text{(внутри сферы)};$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2};\ \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r} \quad \text{при} \quad r \ge R \quad \text{(вне сферы)}.$$

- Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной цилиндрической поверхностью радиусом R на расстоянии r от оси цилиндра:

$$E = 0 \quad \text{при} \quad r < R \quad \text{(внутри цилиндра)};$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\varepsilon r} \quad \text{при} \quad r \ge R \quad \text{(вне цилиндра)}.$$

- Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда q из точки 1 (потенциал φ_1) в точку 2 (потенциал φ_2):

$$A_{12} = q\,(\varphi_1 - \varphi_2),$$ или $$A_{12} = q\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = q\int_1^2 E_l \cdot dl,$$ где E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$.

- Вектор поляризации диэлектрика:

$$\vec{P}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i}{V}$$, где V – объем диэлектрика; $\vec{p}_i$ – дипольный момент i -й молекулы, N – число молекул.

- Связь между вектором поляризации и напряженностью электростатического поля в той же точке внутри диэлектрика:

$\vec{P} = æ\,\varepsilon_0\,\vec{E}$, где æ – диэлектрическая восприимчивость вещества.

- Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью æ:

$\varepsilon = 1 + æ$.

- Связь между напряженностью E поля в диэлектрике и напряженностью внешнего поля E_0:

$$E=\frac{E_0}{\varepsilon}.$$

- Связь между векторами электрического смещения и напряженности электростатического поля:

$$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\,\vec{E}.$$

- Связь между векторами $\vec{D}$, $\vec{E}$ и $\vec{P}$:

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}.$$

- Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике:

$$\Phi_D=\oint_S\vec{D}d\vec{S}=\oint_S D_n dS=\sum_{i=1}^{n}q_i,$$ где $\sum_{i=1}^{n}q_i$ – алгебраическая сумма заключенных внутри замкнутой поверхности S свободных электрических зарядов; D_n – составляющая вектора $\vec{D}$ по направлению нормали $\vec{n}$ к площадке $d\vec{S}$; $d\vec{S}=dS\,\vec{n}$ – вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с нормалью $\vec{n}$ к площадке. Интегрирование ведется по всей поверхности.

- Электроемкость уединенного проводника и конденсатора:

$C = \dfrac{q}{\varphi}$, $\quad C = \dfrac{q}{U}$, где q – заряд, сообщенный проводнику; φ – потенциал проводника; U – разность потенциалов между пластинами конденсатора.

- Электроемкость плоского конденсатора:

$C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$, где S – площадь пластины конденсатора; d – расстояние между пластинами.

- Электроемкость батареи конденсаторов: при последовательном (а) и параллельном (б) соединениях:

а) $\dfrac{1}{C} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{C_i}$ $\quad$ б) $C = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i$, где C_i – электроемкость i-го конденсатора; n – число конденсаторов.

- Энергия уединенного заряженного проводника:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

- Потенциальная энергия системы точечных зарядов:

$W = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} q_i \varphi_i$, где φ_i – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме i-го в той точке, где находится заряд q_i, n - число зарядов.

- Энергия заряженного конденсатора:

$W = \dfrac{CU^2}{2} = \dfrac{qU}{2} = \dfrac{q^2}{2C}$, где q – заряд конденсатора; C – его электроёмкость; U – разность потенциалов между обкладками.

- Сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками плоского конденсатора:

$$|F| = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 S}{2}.$$

- Энергия электростатического поля плоского конденсатора:

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V,$$ где S – площадь одной пластины; U – разность потенциалов между пластинами; $V = Sd$ – объем области между пластинами конденсатора.

- Объемная плотность энергии электростатического поля:

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2},$$ где E – напряжённость поля, D – электрическое смещение.

Примеры решения задач

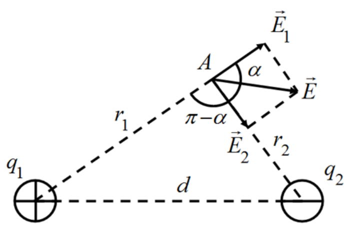
Задача 1. Два точечных электрических заряда q_1=1 нКл и q_2=–2 нКл находятся в вакууме на расстоянии d = 10 см друг от друга. Определить напряженность E и потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке A, удаленной от заряда q_1 на расстояние r_1 =9 см и от заряда q_2 на расстояние r_2 =7 см. Какая сила, будет действовать на точечный заряд q' =1 пКл, если его поместить в точку A?

Дано:

q_1 = 1 нКл;
q_2 = -2 нКл;
d = 10 см;
r_1 = 9 см;
r_2 = 7 см;
q' = 1 пКл

$E = ?$;
$F = ?$; $\varphi = ?$

Решение:



Согласно принципу суперпозиции электрических полей каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов.

Рис.6.1

Напряженность $\vec{E}$ электрического поля в искомой точке будет равна геометрической сумме напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Модуль вектора $\vec{E}$ найдем по теореме косинусов (рис.6.1):

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}\,, \qquad (1)$$

где a – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, который может быть найден из треугольника со сторонами r_1, r_2 и d: $\cos\alpha = \dfrac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$. В данном случае во избежание громоздких записей удобно значение $\cos\alpha$ вычислить отдельно:

$$\cos\alpha = \frac{(10^2 - 9^2 - 7^2)}{2\cdot 9\cdot 7} = -0.238.$$

Напряженность электрических полей, создаваемых соответственно зарядами q_1 и q_2:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\,; \qquad E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\,. \qquad (2)$$

Подставляя выражения для E_1 и E_2 из (2) в (1) и вынося общий множитель $1/(4\pi\varepsilon_0)$ за знак корня, получаем

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + 2\frac{q_1}{r_1^2}\frac{q_2}{r_2^2}\cos\alpha}\,. \qquad (3)$$

Сила, действующая на заряд q':

$$F = q'E. \qquad (4)$$

В соответствии с принципом суперпозиции электростатических полей потенциал φ результирующего поля, создаваемого двумя зарядами q_1 и q_2, равен алгебраической сумме потенциалов, т.е.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2\,. \qquad (5)$$

Потенциал поля точечного заряда q на расстоянии r от него выражается формулой:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,. \qquad (6)$$

В нашем случае согласно формулам (5) и (6) получаем:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right). \qquad (7)$$

Подставив в формулы (3), (4) и (7) численные значения физических величин, произведем вычисления:

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{(10^{-9})^2}{(0.09)^4} + \frac{(2 \cdot 10^{-9})^2}{(0.07)^4} + 2\frac{10^{-9}}{(0.09)^2}\frac{2 \cdot 10^{-9}}{(0.07)^2}(-0.238)} =$$

$$= 3.53 \cdot 10^3 \, \frac{В}{м} = 3.58 \frac{кВ}{м};$$

$$F = 10^{-12} \cdot 3.58 \cdot 10^3 = 3.53 \cdot 10^{-9}\,\text{Н} = 3.53\,нН;$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{10^{-9}}{0.09} + \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{0.07}\right) = -157 В.$$

Ответ: $E = 3.58\frac{кВ}{м}$; $F = 3{,}53\,нН$; $\varphi = -157\,В$.

7 ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Основные формулы

- Сила тока

$I = \dfrac{dq}{dt}$; $\quad I = \dfrac{q}{t}$ (если $I = const$).

- Плотность тока

$j = \dfrac{I}{S}$, $\quad \vec{j} = ne\langle\vec{\upsilon}\rangle$, где S – площадь поперечного сечения проводника, $\langle\vec{\upsilon}\rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике, n – концентрация зарядов, e – элементарный заряд.

- Зависимость сопротивления от параметров проводника

$R = \rho\dfrac{l}{S}$, где l – длина проводника, S – площадь поперечного сечения проводника, $\rho = \dfrac{1}{\gamma}$ – удельное сопротивление, γ – удельная проводимость.

- Зависимость удельного сопротивления от температуры для металлических проводников

$\rho = \rho_0(1+\alpha t)$, где α – температурный коэффициент сопротивления, ρ_0 – удельное сопротивление при $0^o C$, t – температура проводника.

- Сопротивление системы проводников: при последовательном (а) и параллельном (б) соединениях

а) $R = \sum\limits_{i=1}^{n} R_i$, $\quad$ б) $\dfrac{1}{R} = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{R_i}$, где R_i – сопротивление i -го проводника, n – число проводников.

- Сопротивления, необходимые для расширения пределов измерения приборами силы тока ($R_{ШУНТА}$) и напряжения ($R_{ДОБ.}$) в n раз

$$R_{ШУНТА} = \frac{R}{n-1}, \qquad R_{ДОБ.} = R(n-1).$$

- Законы Ома:
  1. для однородного участка цепи:

$$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R}=\frac{U}{R},$$

  2. для неоднородного участка цепи:

$$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2+\mathcal{E}_{1,2}}{R},$$

  3. для замкнутой цепи

$I=\dfrac{\mathcal{E}}{R+r}$, где U – напряжение на однородном участке цепи, $(\varphi_1-\varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи, $\mathcal{E}$ – ЭДС источника, r – внутреннее сопротивление источника тока.

  4. в дифференциальной форме:

$\vec{j}=\gamma\vec{E}$, где $\vec{j}$ – плотность тока, γ – удельная проводимость, $\vec{E}$ – напряжённость поля.

- Сила тока короткого замыкания:

$$I=\frac{\mathcal{E}}{r}.$$

- Работа тока за время t:

$$A=IUt=I^2Rt=\frac{U^2}{R}t.$$

Закон Джоуля-Ленца (количество теплоты, выделяемой при прохождении тока через проводник):

$$Q=I^2Rt.$$

- Мощность тока, выделяемая в нагрузке (полезная):

$$P=IU=I^2R=\frac{U^2}{R}.$$

- Полная мощность, выделяемая в цепи:

$$P=\mathcal{E}\cdot I.$$

- Мощность, теряемая в источнике:

$P = I^2 r$.

- Коэффициент полезного действия источника тока:

$$\eta = \frac{P_{полезная}}{P_{полная}} = \frac{R}{R+r} .$$

- Правила Кирхгофа:

1) $\sum_i I_i = 0$ – для узлов;

2) $\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k$ – для контуров, где $\sum_i I_i$ – алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, $\sum_k \mathcal{E}_k$ – алгебраическая сумма ЭДС в контуре.

Примеры решения задач

Задача 1. ЭДС источника тока $\mathcal{E}$ =6 В. Наибольшая сила тока, которую может дать источник тока, I_{max} =5А. Какая наибольшая мощность P_{max} может выделиться на подключенном к источнику тока резисторе с переменным сопротивлением? Каким при этом будет КПД источника тока и какая мощность $P_{потерь}$ будет расходоваться на нагревание самого источника?

Дано:

$\mathcal{E}$ = 6 В;

I_{max} = 5 А.

P_{max} = ?

η =?

$P_{потерь}$ =?

Решение:

Мощность тока на внешнем участке цепи находится по формуле

$$P = IU = I^2 R , \qquad (1)$$

где R – сопротивление резистора при условии очень малого сопротивления подводящих ток проводников.

Силу тока I можно найти на основе закона Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \qquad (2)$$

где R и r – сопротивления внешнего и внутреннего участков цепи соответственно.

Подставив формулу (2) в формулу (1), получим:

$$P = \frac{\text{Е}^{\cdot} R}{(R+r)^2} \quad . \qquad (3)$$

Из формулы (3) видно, что при постоянных величинах Е и r мощность является функцией одной переменной – внешнего сопротивления R. Известно, что эта функция имеет максимум при условии $R = r$. В этом можно убедиться, применив общий метод исследования функций на экстремум с помощью производной.

Следовательно,

$$P_{\max} = \frac{\text{Е}^{\cdot} r}{(r+r)^2} = \frac{\text{Е}^{\cdot}}{4r} \, . \qquad (4)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию сопротивления r внутреннего участка цепи (источника тока). Если учесть, что согласно закону Ома (2) для замкнутой цепи наибольшая сила тока I_{max} будет при внешнем сопротивлении $R = 0$ (ток короткого замыкания), то

$$I_{\max} = \frac{\text{Е}}{r} \quad . \qquad (5)$$

Подставив найденное из (5) значение внутреннего сопротивления r в формулу (4), получим:

$$P_{\max} = \frac{\text{Е} \, \mathrm{Im}\,ax}{4} = \frac{6 \cdot 5}{4} = 7{,}5\,Вт \, .$$

Мощность тока, выделяемая на внешнем участке цепи, является полезной по отношению к полной мощности источника тока, которая находится по формуле $P_{полн} = \text{Е} \cdot I$ и в нашем случае будет равна:

$$P_{полн} = \frac{\text{Е}^{\cdot}}{2r} = 2P_{\max} \quad . \qquad (6)$$

КПД источника тока равен отношению полезной мощности, выделяемой на внешнем участке цепи, к полной мощности источника тока:

$$\eta = \frac{P_{полезная}}{P_{полная}} \quad . \qquad (7)$$

В нашем случае $\eta = \frac{P_{полезная}}{2P_{полная}} 100\,\% = 50\,\%.$

Мощность, теряемую в источнике тока, можно найти по формуле $P_{потерь} = P_{полная} - P_{полезная} = I^2 r$.

В нашем случае: $P_{потерь} = 2P_{\max} - P_{\max} = P_{\max} = 7{,}5\,Вт$

Ответ: $P_{max} = 7{,}5\,Вт$; $\eta = 50\%$; $P_{потерь} = 7{,}5\,Вт$.

Задача 2. Электрическая цепь состоит из двух источников тока, трех сопротивлений и амперметра (рис.7.1). В этой цепи R_1=100 Ом, R_2=50 Ом, R_3=20 Ом, ЭДС одного из источников тока $\mathcal{E}_1$=2 В. Амперметр регистрирует ток I_3=50 мА, идущий в направлении, указанном стрелкой. Определите ЭДС второго источника тока $\mathcal{E}_2$. Сопротивлением амперметра и внутренним сопротивлением источников тока пренебречь.

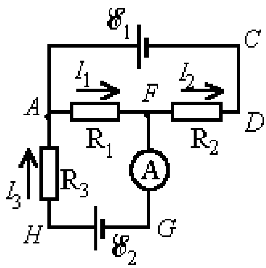


Рис.7.1

Указания: Для расчета разветвленных цепей применяются правила Кирхгофа:

а) $\sum_i I_i = 0$ – первое правило Кирхгофа;

б) $\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k$ - второе правило.

На основании этих правил можно составить уравнения, необходимые для определения искомых величин (силы тока, сопротивления и ЭДС). Применяя правила Кирхгофа, следует соблюдать следующие указания:

1. Перед составлением уравнений произвольно выбрать: а) направления токов (если они не заданы по условию задачи) и указать их стрелками на чертеже; б) направления обхода контуров (например, по часовой стрелке).

2. При составлении урав- нений по первому правилу

Кирхгофа считать токи, подходящие к узлу, положительными, а токи, отходящие от узла, отрицательными. Число уравнений, составляемых по первому правилу Кирхгофа, должно быть на единицу меньше числа узлов, содержащихся в цепи.

3. При составлении уравнений по второму правилу Кирхгофа надо считать, что а) произведение силы тока на сопротивление участка контура $I_к R_к$ входит в уравнение со знаком "плюс", если направление тока в данном участке совпадает с выбранным направлением обхода контура, в противном случае произведение $I_к R_к$ входит в уравнение со знаком "минус", б) ЭДС входит в уравнение со знаком "плюс", если она повышает потенциал в направлении обхода контура, т.е. если при обходе приходится идти от минуса к плюсу внутри источника тока; в противном случае ЭДС входит в уравнение со знаком "минус". Число уравнений, которые |должны быть составлены по второму правилу Кирхгофа должно быть равно числу независимых контуров, имеющихся в цепи. Для составления уравнений первый контур можно выбирать произвольно. Все последующие контуры следует выбрать таким образом, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь цепи, не участвовавшая ни в одном из ранее использованных контуров. Если при решении уравнений, составленных указанным выше способом, получены отрицательные значения силы тока или сопротивления, то это означает, что ток через данное сопротивление в действительности течет в направлении, противоположном произвольно выбранному. При этом числовые значения силы тока будут правильными. Однако в этом случае неверным окажется вычисленное значение сопротивления. Тогда необходимо, изменив на чертеже направление тока в сопротивлении, составить новую систему уравнений и, решив ее, определить искомое сопротивление.

Дано:
R_1 = 100 Ом;
R_2 = 50 Ом;
R_3 = 20 Ом;
$\mathcal{E}_1$= 2 В;
I_3= 50 мА.
ε_2 = ?
$\mathcal{E}_2$ =?

Решение:

Выберем направления токов, как они показаны на рисунке, и условимся обходить контуры по часовой стрелке. По первому правилу Кирхгофа для узла F имеем:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \qquad (1)$$

По второму правилу Кирхгофа имеем для контура $ACDFA$: $-I_1R_1 - I_2R_2 = -\mathcal{E}_1$, или после умножения обеих частей равенства на – 1:

$$I_1R_1 + I_2R_2 = \mathrm{E}_1 . \qquad (2)$$

Соответственно для контура *AFGHA* найдем:

$$I_1R_1 + I_3R_3 = \mathrm{E}_2 . \qquad (3)$$

После подстановки известных числовых значений в формулы (1), (2) и (3) получим систему уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + \quad 0 = 0{,}05 \\ 50I_1 + 25I_2 + 0 = 1 \\ 100I_1 + 0 - \text{☜}_2 = -1. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы I_2 и подставим во второе:

$$I_2 = I_1 - 0{,}05, \quad 50I_1 + 25(I_1 - 0{,}05) = 1 \quad \Rightarrow I_1 = 0{,}03.$$

Подставляя I_1 в третье уравнение, получаем E_2 =4 В.

Ответ: E_2 =4 В.

Задача 3. В схеме, представленной на рис. X сопротивления R_2 =4 Ом, R_3 =3 Ом, R_4 =8 Ом. Внутренним сопротивлением источника тока, сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь. Измерительные приборы амперметр и вольтметр считать идеальными. Показания амперметра 2,4 А, а вольтметра 12 В. Определить: 1) полное сопротивление цепи, сопротивление R_1, 2) падение напряжения на сопротивление R_1, 3)мощность, выделяемую в цепи и на сопротивлении R_1, 4) количество теплоты, выделенное на сопротивлении R_1 за 5 с.

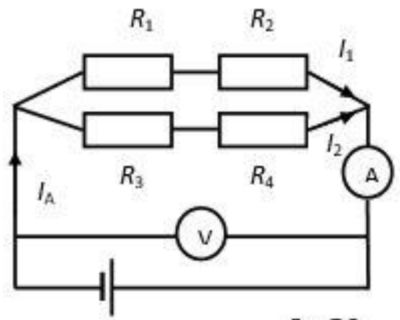


Рис.7.2

Дано:	**Решение:**
$R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 8$ Ом, $I_A = 2{,}4$ А, $U_V = 12$ В, $t = 5$ с. Найти: R, R_1, U_1, P, P_1, Q_1.	Полное сопротивление определим из закона Ома для однородного участка цепи: $R = \frac{U_V}{I_A} = \frac{12 B}{2{,}4 A} = 5\ Ом$ При параллельном соединении $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}$. Отсюда $R_1 = \frac{(R_3 + R_4)R}{R_3 + R_4 - R} - R_2 = \frac{(3\ Ом + 8\ Ом)5\ Ом}{3\ Ом + 8\ Ом - 5\ Ом} - 4\ Ом = 5{,}2\ Ом$

Падение напряжения на сопротивлениях $(R_1 + R_2)$ и $(R_3 + R_4)$ равно $U_V = 12\ B$.

Следовательно, $I_1(R_1 + R_2) = I_2(R_3 + R_4)$.

По правилу Кирхгофа: $I_A = I_1 + I_2$. Из последних двух уравнений определим $I_1 = \frac{I_A}{1 + \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4}} = \frac{2{,}4\ A}{1 + \frac{5{,}2\ Ом + 4\ Ом}{3\ Ом + 8\ Ом}} = 1{,}3\ A$.

Из закона Ома определим падение напряжения на сопротивлении R_1: $U_1 = I_1 R_1 = 1{,}3\ A \cdot 5{,}2\ Ом = 6{,}8\ B$.

Мощность, выделяемая в цепи равна

$$P = \frac{U_V^2}{R} = \frac{(12\ B)^2}{5\ Ом} = 28{,}8\ Вт.$$

Мощность, выделяемая на сопротивлении R_1 равна $P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{(6{,}8\ B)^2}{5{,}2\ Ом} = 8{,}9\ Вт$. По закону Джоуля-Ленца на сопротивлении R_1 за время t выделится количество теплоты равное $Q_1 = P_1 t = 8{,}9\ Вт \cdot 5\ с = 44{,}5\ Дж$.

Ответ: 1)5 Ом, 5,2 Ом, 2) 6,8 В, 3)28,8 Вт, 8,9 Вт, 4) 44,5 Дж

8 ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Основные формулы

• Сила взаимодействия между двумя прямолинейными параллельными бесконечно длинными проводниками с токами I_1 и I_2, приходящаяся на единицу длины:

$F = \dfrac{\mu_0 \mu\, I_1 I_2}{2\pi r}$, где r – расстояние между проводниками, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Гн/м$ – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость изотропной среды (для вакуума $\mu = 1$).

• Связь магнитной индукции $\vec{B}$ с напряженностью $\vec{H}$ магнитного поля:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu\, \vec{H}.$$

• Принцип суперпозиции магнитных полей:

$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$, $\vec{H} = \sum_i \vec{H}_i$, где $\vec{B}_i\,(\vec{H}_i)$ – магнитная индукция (напряжённость), создаваемая каждым током или движущимся зарядом в отдельности.

• Магнитная индукция поля, создаваемая бесконечно длинным прямолинейным проводником с током:

$B = \dfrac{\mu_0 \mu}{2\pi} \cdot \dfrac{I}{r}$, где r – расстояние от проводника с током до точки, в которой определяется магнитная индукция.

• Магнитная индукция поля, создаваемого прямолинейным проводником с током конечной длины:

$B = \dfrac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \dfrac{I}{r}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$, где α_1, α_2 – углы между элементом тока и радиус-вектором, проведенным из рассматриваемой точки к концам проводника.

• Магнитная индукция поля в центре кругового проводника с током:

$B = \dfrac{\mu_0 \mu\, I}{2R}$, где R – радиус кругового витка.

• Магнитная индукция поля на оси кругового проводника с током:

$$B=\frac{\mu_0\mu IR^2}{2\left(R^2+a^2\right)^{3/2}},$$ где R – радиус кругового витка, a – расстояние от центра витка до точки, в которой определяется магнитная индукция.

• Магнитная индукция поля внутри тороида:

$$B=\mu_0\mu In\frac{R}{r},$$ где n – число витков на единицу длины, $I\cdot n$ – число ампер-витков, R – радиус тороида, r – радиус витка.

• Магнитная индукция поля бесконечно длинного соленоида и внутри тороида, радиус которого значительно больше радиуса витка:

$$B=\mu_0\mu In.$$

• Магнитная индукция поля на оси соленоида конечной длины:

$$B=\frac{\mu_0\mu}{2}In\left(\cos\beta_1-\cos\beta_2\right),$$ где β_1,β_2 – углы между осью катушки и радиус-вектором, проведенным из данной точки к концам катушки.

• Сила Ампера, действующая на элемент dl проводника с током I в магнитном поле:

$$dF=BI\sin\alpha\cdot dl,$$ где α – угол между направлениями тока и магнитной индукции поля.

• Магнитный момент контура с током:

$$\vec{p}_m=IS\vec{n} \quad или \quad p_m=IS,$$

где S – площадь контура, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали (положительный) к плоскости контура.

• Вращающий момент сил, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле:

$$M=p_mB\sin\alpha,$$ где α – угол между направлением нормали к плоскости контура и магнитной индукцией поля.

• Магнитный поток через площадку dS:

$$d\Phi=B_ndS,$$

где $B_n = B\cos\alpha$, α – угол между направлениями вектора магнитной индукции и нормалью к площадке dS.

• Магнитный поток неоднородного поля через произвольную поверхность:

$\Phi = \int\limits_s B_n dS$,где интегрирование ведется по всей поверхности.

• Магнитный поток однородного поля через плоскую поверхность площадью S:

$\Phi = BS\cos\alpha$.

• Работа перемещения проводника с током в магнитном поле:

$dA = I \cdot d\Phi$, где $d\Phi$ – поток магнитной индукции, пересеченный проводником при его движении.

• Работа перемещения контура с током в магнитном поле:

$A = I \cdot \Delta\Phi$, где $\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром при его движении.

• Сила Лоренца, действующая на движущуюся заряженную частицу в магнитном поле:

$F = qB\upsilon\sin\alpha$, где q – заряд частицы, υ – скорость частицы, α – угол между направлениями скорости частицы и магнитной индукции поля.

• Радиус окружности и период вращения частицы, влетевшей в магнитное поле под углом 90° к силовым линиям индукции:

$R = \dfrac{m\upsilon}{qB}$, $T = \dfrac{2\pi R}{qB}$, m – масса частицы, q - заряд частицы.

• Шаг винтовой траектории, по которой движется заряженная частица, влетевшая в магнитное поле под углом α к силовым линиям магнитного поля:

$h = T \cdot \upsilon\cos\alpha$.

• ЭДС индукции, возникающая в контуре при изменении магнитного потока $d\Phi$ (закон Фараденя):

$\mathrm{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, или $\mathrm{E} = -N\dfrac{d\Phi}{dt}$, где N – общее число витков в контуре.

• Разность потенциалов на концах проводника, движущегося в магнитном поле:

$U = Bl\upsilon \sin\alpha$, где υ – скорость движения проводника, l – длина проводника, α - угол между направлениями скорости движения проводника и магнитной индукцией поля.

• ЭДС индукции, возникающая в рамке, содержащей N витков площадью S, при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле:

$$\mathcal{E} = BNS\omega \sin\alpha .$$

• Заряд, протекающий в контуре при изменении потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром:

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R}.$$

• ЭДС самоиндукции:

$\mathcal{E} = -L\dfrac{dI}{dt}$, где $L = \Phi / I$ – индуктивность контура.

• Индуктивность соленоида:

$L = \mu_0\mu\, n^2 l S = \mu_0\mu \dfrac{N^2}{l} S$, где S – площадь поперечного сечения соленоида, l – длина соленоида, N – полное число витков.

• Энергия магнитного поля контура с током:

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

• Объемная плотность энергии магнитного поля:

$$w = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_0\mu\, H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Два параллельных бесконечно длинных провода, по которым текут в одном направлении токи силой I = 60 А, расположены на расстоянии d = 10 см друг от друга. Определить магнитную индукцию B в точке А, отстоящей от одного проводника на расстоянии r_1 =5 см и от другого – на расстоянии r_2 = 12 см.

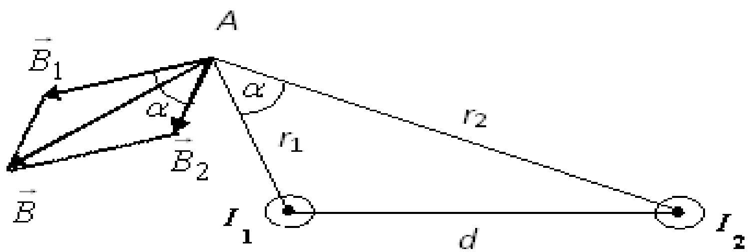
Дано:
I=60 А
d=10 см =0,1 м
r_1 =5 см=0,05 м
r_2 = 12 см=0,12 м
B = ?
r_2=12 см=0,12м.
B = ?

Решение:

Для нахождения магнитной индукции B в точке А определим направления векторов индукции $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ полей (по правилу «правого винта»), создаваемых каждым проводником в отдельности, и сложим их геометрически, т.е. $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

Абсолютное значение индукции найдем по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^{\ 2} + B_2^{\ 2} - 2B_1B_2\cos(\pi - \alpha)}$$



Учитывая, что $cos(\pi - \alpha) = -cos\,\alpha$, получаем:

$$B = \sqrt{B_1^{\ 2} + B_2^{\ 2} + 2B_1B_2\cos\alpha} \qquad (1)$$

Значения индукции B_1 и B_2 выражаются соответственно через силу тока I и расстояния r_1 и r_2 от провода до точки, индукцию в которой мы вычисляем:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1},\ B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}.$$

Подставив B_1 и B_2 в формулу (1) и вынеся $\frac{\mu_0 I}{2\pi}$ за знак корня, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2}\cos\alpha}\,. \qquad (2)$$

Проверяем наименования:

$$[B]=\frac{Гн\cdot А}{м\cdot м}=\frac{В\cdot с\cdot А}{А\cdot м\cdot м}=\frac{Н}{А\cdot м}=Тл\,.$$

Вычислим угол α. По теореме косинусов запишем $d^2= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha$, где d – расстояние между проводами. Отсюда $cos\,\alpha=\dfrac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}$.

Подставив данные, вычислим значение косинуса:

$$\cos\alpha=\frac{(0.05)^2+(0.12)^2-(0.1)^2}{2\cdot0.05\cdot0.12}=0.576\,.$$

Подставив в формулу (2) числовые значения, найдем

$$B=\frac{4\pi\cdot60}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{(0{,}05)^2}+\frac{1}{(0{,}12)^2}+\frac{2}{0{,}05\cdot0{,}12}0{,}576}\,,$$

$$B=308{,}6\,мкТл\,.$$

Ответ: $B=308{,}6\,мкТл$

Задача 2. По двум параллельным прямым проводникам длиной l = 2м каждый, находящимся в вакууме на расстоянии r = 10 см друг от друга, в противоположных направлениях текут токи I_1 = 50А и I_2 = 100А. Определить силу взаимодействия проводников между собой.

Дано:

l =2 м

r =10см=0,1м

I_1 =50 А

I_2 =100 А

$F-?$

Решение:

Согласно закону Ампера, на каждый элемент длины проводника dl с током I_2 действует в магнитном поле, создаваемом током I_1, сила

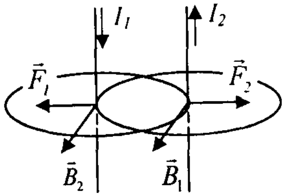
$$dF_1=I_2B_1dl \qquad (1)$$

(направление силы определено по правилу левой руки и указано на рисунке).

Аналогичные рассуждения (ток I_1 находится в магнитном поле, создаваемом током I_2) приводят к выражению:

$$dF_2=I_1B_2dl \qquad (2)$$

Модули магнитных индукций $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ определяются соотноше-



ниями: $B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$, $B_2 = \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$.

Подставив эти выражения в (1) и (2), получим, что по модулю:

$$dF_1 = dF_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dl = dF \qquad (3)$$

(направления сил указаны на рисунке).

Проинтегрировав выражение (3), найдем искомую силу взаимодействия: $F = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\displaystyle\int_0^l dl = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} l$.

Проверим размерность:

$$[F] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}\cdot\text{А}\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{Кл}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}} = \text{Н}.$$

Вычисляя, получаем:

$$F = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 50\cdot 100\cdot 2}{2\pi\cdot 0.01} = 20\cdot 10^{-3}\,\text{Н} = 20\,\text{мН}.$$

Ответ: $F = 20\ мН$.

Задача 3. В однородном магнитном поле с индукцией B =0,1Тл равномерно вращается рамка, содержащая N =1000 витков, с частотой ν =10с$^{-1}$. Площадь рамки равна 150 см^2. Определить мгновенное значение ЭДС индукции, соответствующее углу поворота рамки на 30^0.

Дано:

B =0,1 Тл;

N =1000;

ν =10 с$^{-1}$;

S =150см^2

α =30^0.

E_i – ?

Решение:

Мгновенное значение ЭДС индукции определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея-Максвелла:

$$E_i = -N\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (1)$$

где N – число витков, пронизываемых магнитным потоком Φ.
При вращении рамки магнитный поток, пронизывающий рамку в момент времени *t*, изменяется по закону

$$\Phi = BS\cos\omega t, \qquad (2)$$

где B – магнитная индукция; S – площадь рамки; ω – круговая частота.

Решив совместно уравнения (1)–(2), найдем мгновенное значение ЭДС индукции

$$E_i = BNS\omega\sin\alpha = 2\pi\nu BNS\sin 30^0 .$$

Проверим наименования:

$$E_i = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = B.$$

Произведя вычисления, получим:

$$E_i = 2\pi\cdot 10\cdot 1000\cdot 0{,}1\cdot 150\cdot 10^{-4}\cdot \sin 30^0 = 47{,}1\ \text{В}.$$

Ответ: 47,1 В.

Задача 4. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов *U*=400 В, попал в однородное магнитное поле с индукцией *B*=1,5 мТл. Определите: 1) радиус *R* кривизны траектории; 2) частоту ν вращения электрона в магнитном поле. Вектор скорости электрона перпендикулярен линиям индукции.

Дано:
U = 400 В;
B = 1,5мТл.
$\vec{\upsilon}\perp\vec{B}$
R = ?

ν - ?

Решение:

1. На движущийся в магнитном поле электрон действует сила Лоренца, модуль которой равен:

$$F = e\upsilon B\sin\alpha,$$

(Действием силы тяжести можно пренебречь.)

Вектор силы Лоренца перпендикулярен вектору скорости и, следовательно, по второму закону Ньютона сила Лоренца является центростремительной силой, т.е. $e\upsilon B\sin\alpha = m\upsilon^2/R$,

(1)

где e, υ, m – заряд, скорость, масса электрона; B – индукция магнитного поля;

R – радиус кривизны траектории; α – угол между направлениями вектора скорости $\vec{\upsilon}$ и индукции $\vec{B}$ (в нашем случае $\vec{\upsilon}\perp\vec{B}$ α = 90^0, $\sin\alpha$ = 1).

Из формулы (1) найдем:

$$R=\frac{m\upsilon}{e\,B}. \qquad (2)$$

Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов U, получает энергию eU, которая переходит в кинетическую энергию $m\upsilon^2/2$, т.е. $eU=m\upsilon^2/2$. Отсюда $\upsilon=\sqrt{2eU/m}$.

Подставив это выражение в формулу (2), получим выражение для радиуса кривизны:

$$R=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}. \qquad (3)$$

Подставляем числа в выражение (3):

$$R=\frac{1}{1{,}5\cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 400}{1{,}6\cdot 10^{-19}}}=45\cdot 10^{-3}\,м.$$

Проверим наименования:

$$[R]=\frac{1}{Тл}\sqrt{\frac{кг\cdot В}{Кл}}=\frac{А\cdot м}{Н}\sqrt{\frac{кг\cdot Дж}{Кл^2}}=\frac{А\cdot м\cdot с^2}{кг\cdot м}\sqrt{\frac{кг^2\cdot м^2}{с^2\cdot Кл^2}}=м.$$

2. Для определения частоты вращения воспользуемся формулой, связывающей частоту со скоростью и радиусом кривизны траектории: $\nu=\dfrac{\upsilon}{2\pi R}$. Подставив R из выражения (2) в эту формулу, получим $\nu=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{e}{m}B$. Производим вычисления:

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}}{9{,}1\cdot 10^{-31}}1{,}5\cdot 10^{-3}=4{,}2\cdot 10^{7}\ \text{Гц}.$$

Проверим размерность:

$$[\nu]=\frac{\text{Кл}\cdot\text{Тл}}{\text{кг}}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{кг}}=\frac{\text{Кл}}{\text{А}\cdot\text{с}^2}=\text{с}^{-1}.$$

Ответ: $R = 45 \cdot 10^{-3}$ м , $\nu = 4{,}2 \cdot 10^{7}$ Гц.

Задача 5. Электрон, имея скорость υ=2 Мм/с, влетел в однородное магнитное поле с индукцией B =30 мТл под углом α =30^0 к направлению линий индукции. Определите радиус R и шаг h винтовой линии, по которой будет двигаться электрон.

Дано:
υ =2 Мм/с;
B =30 мТл;
α = 30^0.

R = ?
h = ?

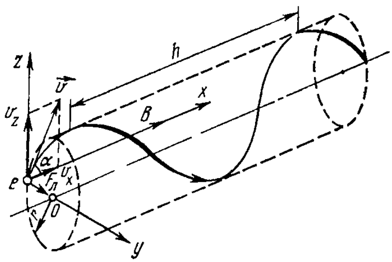
Решение:

На движущийся в магнитном поле электрон действует сила Лоренца, модуль которой равен:

$$F = e\upsilon B \sin\alpha, \quad (1)$$

Эта сила перпендикулярная векторам магнитной индукции $\vec{B}$ и скорости $\vec{\upsilon}$ частицы.

Так как вектор силы Лоренца перпендикулярен вектору скорости, то модуль скорости не будет изменяться под действием этой силы. Но при постоянной скорости, как это следует из формулы (1), останется постоянным и значение силы Лоренца. Из механики известно, что постоянная сила, перпендикулярная скорости, вызывает движение по окружности. Следовательно, электрон, влетевший в магнитное поле, будет двигаться по окружности в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, со скоростью, равной поперечной составляющей υ_Z скорости (рис.). Одновременно он будет двигаться и вдоль поля со скоростью υ_X. При этом $\upsilon_Z = \upsilon \sin\alpha$, $\upsilon_X = \upsilon \cos\alpha$. В результате одновременного участия в движениях по окружности и по прямой электрон будет двигаться по винтовой линии. Радиус окружности, по которой движется электрон, найдем следующим образом.



Сила Лоренца F сообщает электрону нормальное ускорение a_n. По второму закону Ньютона: $F = ma_n$, где $F = e\upsilon_Z B$, $a_n = \upsilon_Z^2 / R$. Тогда

$$e\upsilon_z B = \frac{m\upsilon_z^2}{R},$$ откуда находим радиус винтовой линии:

$R = \dfrac{m\upsilon_z}{eB} = \dfrac{m\upsilon \sin\alpha}{eB}$, где m и e - масса и заряд электрона.

Проверим размерность:

$$[R] = \frac{кг \cdot м}{с \cdot Кл \cdot Тл} = \frac{кг \cdot м \cdot м \cdot А}{с \cdot Кл \cdot Н} = м.$$

Подставив значения величин $m, e, \upsilon, \alpha, B$ и произведя вычисления, получим: $R = \dfrac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^{6} \cdot 0{,}5}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 30 \cdot 10^{-3}} = 0{,}19\, мм =$ 0,19 мм.

Шаг винтовой линии равен пути, пройденному электроном вдоль поля со скоростью υ_X за время, которое понадобится электрону для того, чтобы совершить один оборот, $h = \upsilon_X T$, где $T = 2\pi R / \upsilon_Z$. Получаем: $h = \dfrac{2\pi R \upsilon \cos\alpha}{\upsilon \sin\alpha} = 2\pi R\, ctg\alpha$.

Проверим размерность: $[h] = м$.

Подставим в эту формулу числовые значения:

$h = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}19 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{3} = 2{,}06\, мм$.

Ответ: $h = 2{,}06\, мм$.

9 МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Основные формулы

- Уравнение гармонических колебаний:

$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, где x – смещение точки от положения равновесия, A – амплитуда колебаний, ω_0 – круговая (циклическая частота), t – время, φ_0 – начальная фаза колебаний.

- Круговая (циклическая частота):

$\omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi / T$, где ν – частота колебаний, T – период колебаний.

- Скорость и ускорение при гармонических колебаниях:

$$\upsilon_x = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$a_x = \dot{\upsilon}_x = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x.$$

- Возвращающая сила:

$$F_x = -kx = -kA\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$F_x = ma_x = -mA\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, где $k = m\omega_0^2$ – коэффициент упругой (квазиупругой) силы, m – масса материальной точки.

- Максимальная возвращающая сила:

$$F_{max} = kA = m\omega_0^2 A.$$

- Кинетическая энергия колеблющейся точки:

$$E_K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{kA^2}{2}\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

- Потенциальная энергия колеблющейся точки:

$$E_П = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

- Полная энергия при гармонических колебаниях:

$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

- Периоды колебаний:

$T = 2\pi\sqrt{l / g}$ – математический маятник (l – длина нити, g -

ускорение свободного падения),

$T=2\pi\sqrt{m/k}$ – пружинный маятник (m – масса тела, k – жесткость пружины),

$T=2\pi\sqrt{I/(mgd)}$ – физический маятник (I – момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку подвеса, m – масса тела, d – расстояние от точки подвеса до центра масс).

- Уравнение затухающих колебаний:

$x=A_0e^{-\beta\cdot t}\sin(\omega t+\varphi_0)$, где A_0 – амплитуда колебаний в начальный момент времени, $A_0e^{-\beta\cdot t}=A$ - амплитуда затухающих колебаний, $\beta=r/2m$ -коэффициент затухания (r - коэффициент сопротивления, m - масса точки), ω - частота затухающих колебаний.

- Логарифмический декремент затухания:

$$\chi=\ln\frac{A(t)}{A(t+T)}=\beta\cdot T\ .$$

- Амплитуда результирующего колебания, полученного при сложении двух колебаний одинаковой частоты и одного направления:

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$, где A_1 и A_2 - амплитуды слагаемых колебаний, $\Delta\varphi$ - разность фаз слагаемых колебаний.

- Начальная фаза результирующего колебания определяется из формулы:

$$tg\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}\ .$$

- Уравнение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с одинаковыми частотами:

$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$, где $(\varphi_2-\varphi_1)$ - разность фаз складываемых колебаний.

Примеры решения задач

Задача 1. Материальная точка совершает гармоническое колебание, описываемое уравнением $x = 0{,}15\sin\frac{\pi}{4}t$ (м). Определите амплитуду, период, частоту, циклическую частоту и начальную фазу колебания. Определите моменты времени, в которые достигаются максимальная скорость и максимальное ускорение точки.

Дано:	Решение:
$x = 0{,}15\sin\frac{\pi}{4}t$ (м)	Запишем уравнение гармонических колебаний в общем виде: $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, где A - амплитуда колебания; ω - циклическая частота колебания; φ_0 – начальная фаза. Сравнивая это уравнение с заданным, получим A =0,15м; φ_0=0.
A -? T -? ν -? φ_0 - ? ω -?	$\omega=\frac{\pi}{4}$. Учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$, получаем $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$, т.е. T = 8 с. Частота колебаний $\nu = \frac{1}{T}$, т.е. ν =0,125 Гц.

Находим выражения для скорости и ускорения:

$$\upsilon = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$a = \dot{\upsilon} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Максимальная скорость точки $\upsilon_{max} = A\omega$ будет в те моменты времени, при которых $|\cos(\omega t + \varphi_0)| = 1$, т.е. $\left|\cos\frac{\pi}{4}t\right| = 1$. Это значит, что $\frac{\pi}{4}t = k\pi$, где $k = 0,1,2...$ т.е. $t = 0, 4c, 8c...$ и т.д. Максимальное ускорение точки $a_{max} = A\omega^2$ будет в те моменты времени, при которых $|\sin(\omega t + \varphi_0)| = 1$, т.е. $\left| \sin\frac{\pi}{4}t \right| = 1$. Это значит, что $\frac{\pi}{4}t = k\frac{\pi}{2}$, где $k = 1,2...$

т.е. $t = 2c, 6c, 10c...$ и т.д.

Ответ: A =0,15м; φ_0=0; ν =0,125 Гц; T = 8 с; $\omega = \frac{\pi}{4}$; максимальная скорость точки в моменты времени: $t = 0, 4c, 8c...$; максимальное ускорение в моменты времени: $t = 2c, 6c, 10c...$

10. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Основные формулы

● Связь периода T, частоты ν и циклической частоты ω колебаний:

$$T = 1/\nu, \quad T = 2\pi/\omega, \quad \omega = 2\pi\nu.$$

● Период электромагнитных колебаний в идеальном колебательном контуре:

$T = 2\pi\sqrt{LC}$, где L – индуктивность катушки, C – электроёмкость конденсатора.

● Зависимость заряда на пластинах конденсатора, разности потенциалов между ними и силы тока от времени в идеальном контуре:

$$q = q_m \cos(\omega t + \alpha),$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega t + \alpha) = U_m \cos(\omega t + \alpha),$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega \sin(\omega t + \alpha) = -I_m \sin(\omega t + \alpha),$$ где q_m – амплитуда заряда, $U_m = q_m / C$ – амплитуда напряжения, $I_m = q_m \omega$ – амплитуда силы тока, α – начальная фаза колебаний.

● Период электромагнитных колебаний в колебательном контуре при наличии сопротивления:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}},$$ где L – индуктивность катушки, C – электроёмкость конденсатора, R – сопротивление контура.

● Зависимость заряда на пластинах конденсатора, разности потенциалов между ними и силы тока от времени в колебательном контуре при наличии сопротивления (затухающие колебания):

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

$$U = U_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

$$I = I_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi)$$

$\beta = R/2L$ - коэффициент затухания, α - начальная фаза колебаний, ψ - разность фаз между током и напряжением в контуре.

- Логарифмический декремент затухания:

$\chi = \beta \cdot T$.

- Полное сопротивление цепи переменного тока, содержащей последовательно включённые резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и конденсатор электроёмкостью C, на концы которой подаётся переменное напряжение $U = U_m \cos\omega t$:

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$, где R – активное сопротивление, ωL – реактивное индуктивное сопротивление, $1/(\omega C)$ – реактивное емкостное сопротивление цепи.

- Разность фаз между напряжением и силой тока:

$$tg\psi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

- Действующие (эффективные) значения силы тока и напряжения:

$I_Д = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$, $U_Д = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$, где I_m и U_m – амплитудные значения силы тока и напряжения.

- Средняя мощность в цепи переменного тока:

$\langle P \rangle = \dfrac{1}{2} I_m U_m \cos\psi$, где

$$\cos\psi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

- Скорость электромагнитной волны в среде:

$\upsilon = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, где $c = 3\cdot 10^8\ м/с$ – скорость электромагнитной волны в вакууме, ε – диэлектрическая проницаемость среды, μ – магнитная проницаемость среды.

- Длина электромагнитной волны:

$\lambda = \upsilon\cdot T$.

- Плотность энергии электромагнитной волны равна сумме плотностей энергий электрического и магнитного полей:

$w = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{\mu\mu_0 H^2}{2}$, где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ Ф/м$ – электрическая постоянная, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ *Гн/м* – магнитная постоянная, E - напряжённость электрического поля, H - напряжённость магнитного поля.

- Связь между мгновенными значениями напряжённостей электрического и магнитного полей электромагнитной волны:

$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$.

- Энергия, переносимая волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению распространения волны:

$S = w\cdot\upsilon = E\cdot H$.

Примеры решения задач

Задача 1. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 1мкФ и катушки индуктивностью 4 Гн. Амплитуда колебаний заряда на конденсаторе 100 мкКл. Напишите уравнения $q = q(t)$, $I = I(t)$, $U = U(t)$. Найдите амплитуду колебаний силы тока и напряжения. Начальная фаза равна нулю.

Дано:	**Решение:**
C =1 мкФ L =4 Гн q_m =100 мкКл	Общий вид уравнений колебаний заряда, напряжения и силы тока определяется формулами:
$q=q(t)$-? $I=I(t)$-? $U=U(t)$-? $I_m=$? $U_m=$?	$q=q_m\cos(\omega t+\alpha)$ (1), $U=\dfrac{q}{C}=\dfrac{q_m}{C}\cos(\omega t+\alpha)$ (2),

$I=\dfrac{dq}{dt}=-q_m\omega\sin(\omega t+\alpha)$ (3), где q_m– амплитуда заряда, $U_m=q_m/C$ – амплитуда напряжения, $I_m=q_m\omega$– амплитуда силы тока, α– начальная фаза колебаний, $\omega=1/\sqrt{LC}$.

Подставляем числовые данные: $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{4\cdot10^{-6}}}=500$(рад/с).

Находим амплитуды силы тока и напряжения:

$I_m=100\cdot10^{-6}\cdot0{,}5\cdot10^{3}=5\cdot10^{-2}$(А),

$U_m=\dfrac{q_m}{C}=\dfrac{100\cdot10^{-6}}{10^{-6}}=100$ (В).

Подставляя в формулы (1), (2), (3) числовые данные , получаем:

$q(t)=10^{-4}\cos(500t)$, $I(t)=-0{,}05\sin(500t)$,

$U(t)=100\cos(500t)$.

11. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Основные формулы

• Скорость света и длина волны в среде:

$\upsilon = \frac{c}{n}$, $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, где $c = 3 \cdot 10^8\ м/с$ – скорость света в вакууме; n – абсолютный показатель преломления среды, который показывает, во сколько раз скорость света в среде меньше, чем в вакууме; λ_0 – длина волны в вакууме.

• Оптическая длина пути световой волны:

$L = nl$, где l – геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n.

• Оптическая разность хода двух световых волн:

$\Delta = L_2 - L_1$.

• Зависимость разности фаз δ от оптической разности хода Δ световых волн:

$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$, где λ – длина световой волны.

• Условие интерференционных максимумов:

$\Delta = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$.

• Условие интерференционных минимумов:

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

• Координаты максимумов и минимумов интенсивности в опыте Юнга:

$x_{max} = \pm m\frac{L}{d}\lambda$; $x_{min} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{L}{d}\lambda$, где m = 0, 1, 2… – номер интерференционной полосы; d – расстояние между двумя когерентными источниками, находящимися на расстоянии L от экрана $(L \gg d)$.

• Ширина интерференционной полосы:

$$\Delta x = \frac{L}{d}\lambda.$$

• Оптическая разность хода при интерференции в тонких плёнках в проходящем свете:

$$\Delta = 2dn\cos r \quad \text{или} \quad \Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i},$$

в отражённом свете:

$$\Delta = 2dn\cos r + \frac{\lambda}{2} \quad \text{или} \quad \Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2},$$ где

d – толщина пленки; n – ее показатель преломления; i – угол падения; r – угол преломления.

• Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем свете):

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda R} \quad (m = 1, 2, \ldots),$$ где m – номер кольца; R – радиус кривизны линзы.

• Радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете (или светлых в проходящем свете):

$$r_m = \sqrt{m\lambda R} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

• В случае «просветления оптики» интерферирующие лучи в отраженном свете гасят друг друга при условии:

$$n = \sqrt{n_c},$$ где n_c – показатель преломления стекла; n – показатель преломления пленки.

Примеры решения задач

Задача 1. В опыте Юнга расстояние между щелями равно 1 мм, а расстояние от щелей до экрана равно 2 м. Определить положение третьих светлой и темной полос, если щели освещать монохроматическим светом с длиной волны 0,5 мкм.

Дано:

$L = 2м$

$d = 1мм = 0{,}001м$

$\lambda = 0{,}5мкм = 5 \cdot 10^{-7}\ м$

$m = 3$

$x_{3max} - ?\quad x_{3min} - ?$

Решение:

Координаты максимумов и минимумов интенсивности в опыте Юнга

$x_{max} = \pm m \dfrac{L}{d}\lambda$;

$x_{min} = \pm\left(m + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{L}{d}\lambda$, где $m = 3$ – номер интерференционной полосы.

Получаем:

$$x_{3\max} = \pm 3 \frac{2}{0{,}001} 0{,}5 \cdot 10^{-6} = \pm 3 \cdot 10^{-3}\ м = \pm 3\ мм,$$

$$x_{3\min} = \pm\left(3 + \frac{1}{2}\right)\frac{2}{0{,}001} 0{,}5 \cdot 10^{-6} = \pm 3{,}5 \cdot 10^{-3}\ м = \pm 3{,}5\ мм.$$

Ответ: $x_{3max} = \pm 3\ мм;\quad x_{3min} = \pm 3{,}5\ мм.$

Задача 2. На плоскопараллельную пленку с показателем преломления $n = 1{,}33$ под углом $i = 30^0$ падает параллельный пучок белого света. Определить, при какой наименьшей толщине пленки отраженный свет наиболее сильно окрасится в желтый свет ($\lambda = 0{,}6\ мкм$).

Дано:

$n = 1{,}33$

$i = 30^0$

$\lambda = 0{,}6мкм$

$= 6 \cdot 10^{-7}\ м$

$d_{min} - ?$

Решение:

Оптическая разность хода при интерференции в тонких плёнках в отраженном свете:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

Условие интерференционных максимумов:

$$\Delta = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \quad (2)$$

Приравнивая (1) и (2) получаем:

$2d\sqrt{n^2 - sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = m\lambda$. Отсюда $d = \frac{m\lambda - \lambda/2}{2\sqrt{n^2 - sin^2 i}}$.

Минимальная толщина будет при $m = 1$. Таким образом,

$$d_{min} = \frac{\lambda(1 - 1/2)}{2\sqrt{n^2 - sin^2 i}} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2\ sin^2 i}}.$$

Подставляем числовые значения:

$$d_{min} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{4\sqrt{1{,}33^2 - (1/2)^2}} = 1{,}22 \cdot 10^{-7}\ м.$$

Ответ: $d_{min} = 1{,}22 \cdot 10^{-7}\ м$.

Задача 3. Плосковыпуклая линза с радиусом сферической поверхности 12,5 см прижата к стеклянной пластине. Диаметр десятого темного кольца Ньютона в отраженном свете равен 1 мм. Определить длину волны света и радиус десятого светлого кольца в отраженном свете.

Дано:

$R = 12{,}5 см = 0{,}125 м$

$d_{10} = 1 мм = 0{,}001 м$ (темное)

$\lambda - ?\ d_{10} - ?$ (светлое)

Решение:

Радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете:

$$r_m = \sqrt{m\lambda\ R} \quad (m = 1{,}2{,}...),$$

где m – номер кольца; R – радиус кривизны линзы. Отсюда: $\lambda = \frac{r_m^2}{m R}$. В нашем случае $m = 10$, поэтому

$$\lambda = \frac{r_{10}^2}{10\,R} = \frac{(d_{10}/2)^2}{10R} = \frac{0.25 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 0{,}125} = 0.2 \text{ мкм}.$$

Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете:

$r_m = \sqrt{(m - \frac{1}{2})\lambda R} \quad (m = 1{,}2{,}...)$, где m – номер кольца; R – радиус кривизны линзы. Для $m = 10$ получаем:

$r_{10} = \sqrt{(10 - \frac{1}{2}) 2 \cdot 10^{-7} 0{,}125} = 0{,}487 мм$. Диаметр светлого кольца: $d_{10} = 2 r_{10} = 0{,}97\ мм$. Ответ: $\lambda = 0.2\ мкм$; $d_{10} = 0{,}97\ мм$.

12 ДИФРАКЦИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Основные формулы

• Радиус внешней границы m - й зоны Френеля для сферической волны:

$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}$, где m – номер зоны Френеля; λ – длина волны; a и b – расстояния от волновой поверхности соответственно до точечного источника и до экрана, на котором дифракционная картина наблюдается.

• Радиус внешней границы m - й зоны Френеля для плоской волны:

$r_m = \sqrt{bm\lambda}$, где m – номер зоны Френеля; λ – длина волны; b – расстояние от диафрагмы с круглым отверстием до экрана, на котором дифракционная картина наблюдается.

• Условия дифракционных максимумов и минимумов от одной щели, на которую свет падает нормально:

$a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}$ – условие максимума

$a\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}$ – условие минимума (m = 1, 2, 3, ...), где a – ширина щели; φ – угол дифракции; m – порядок спектра; λ – длина волны.

• Условия главных максимумов и минимумов, а также дополнительных минимумов дифракционной решетки, на которую свет падает нормально:

$d\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}$ (m = 0, 1, 2,...) – условие максимума;

$a\sin\varphi = \pm 2k\frac{\lambda}{2}$ (k = 1, 2, 3...) – условие минимума;

$d\,sin\varphi = \pm m'\dfrac{\lambda}{N}$ (m' = 1, 2, 3,...,кроме *0, N, 2N*,...) – условие добавочных минимумов, где d – период (постоянная) дифракционной решетки; N – число штрихов решетки.

- Период дифракционной решетки:

$d = \dfrac{1}{N_0}$, где N_0 – число щелей, приходящихся на единицу длины решетки.

- Условие дифракционных максимумов от пространственной решетки (формула Вульфа – Брэггов):

$2d\,sin\theta = \pm m\lambda$ (m = 1, 2, 3, ...), где d – расстояние между атомными плоскостями кристалла; θ – угол скольжения.

- Угловая дисперсия дифракционной решетки:

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}.$$

- Разрешающая способность дифракционной решетки:

$R = \dfrac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$, где λ, $(\lambda + \delta\lambda)$ – длины волн двух соседних спектральных линий, разрешаемых решеткой; m – порядок спектра; N – общее число штрихов решетки.

- Закон Малюса:

$I = I_0\cos^2\varphi$, где I – интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через анализатор; I_0 – интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; φ – угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора.

Если в анализаторе часть (k) световой энергии поглощается и отражается (теряется на поглощение и отражение), то закон Малюса выглядит так:

$$I = I_0(1-k)\cos^2\varphi\ .$$

- Закон Брюстера:

$tg i_B = n_{2,1}$, где i_B – угол падения, при котором отраженный от диэлектрика луч является плоскополяризованным; $n_{2,1}$ – относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

- Угол поворота плоскости поляризации:

– для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей:
$\varphi = \alpha\, d$;
– для оптически активных растворов:
$\varphi = [\alpha]\, C\, d$, где d – длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе; α - постоянная вращения; $[\alpha]$ – удельная постоянная вращения; C – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

Примеры решения задач

Задача 1. Определить наибольший порядок спектра, который может образовать дифракционная решетка, имеющая 500 штрихов на 1 мм, если длина волны падающего света 590 нм. Какую наибольшую длину волны можно наблюдать в спектре этой решетки?

Дано:	Решение:
$N_0 = 500 мм^{-1} = 5 \cdot 10^5 м^{-1}$ $\lambda = 590 нм = 5{,}9 \cdot 10^{-7} м$	Условие главных максимумов дифракционной решетки: $d \sin\varphi = \pm m\lambda$.
$m_{max} - ?$ $\lambda_{max} - ?$	Отсюда $m = \dfrac{d \sin\varphi}{\lambda}$. (1)

Учитывая, что $d = \dfrac{1}{N_0}$, *преобразуем формулу (1)*:

$$m = \frac{\sin\varphi}{\lambda N_0}. \qquad (2)$$

Из выражения (2) следует, что при заданных λ и N_0 наибольший порядок спектра m_{max} можно наблюдать при наибольшем значении $\sin\varphi_m = 1$, т.е.

$$m_{max} = \frac{\sin\varphi_m}{\lambda N_0} = \frac{1}{\lambda N_0}; \qquad m_{max} = \frac{1}{5{,}9\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 10^5} \approx 3.$$

Наибольшая длина волны, которую можно наблюдать с помощью этой решетки, равна:

$$\lambda_{max} = \frac{d\sin\varphi_m}{m_{max}} = \frac{1}{m_{max}\cdot N_0};$$

$$\lambda_{max} = \frac{1}{3\cdot 5\cdot 10^5} = 6{,}67\cdot 10^{-7}(м).$$

Ответ: $m_{max} = 3$; $\lambda_{max} = 6{,}67\cdot 10^{-7}$ $м$.

Задача 2. Определить угол φ между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность света, прошедшего через эту систему, уменьшилась в восемь раз. Поглощением света пренебречь.

Дано:	**Решение:**
$\frac{I_{ест.}}{I} = 8$	По закону Малюса: $I = I_0\cos^2\varphi$, где $I_0 = 0{,}5I_{ест.}$-интенсивность света, прошедшего через поляризатор. Получаем, что $I = 0{,}5I_{ест.}\cos^2\varphi$.
$\varphi - ?$	

По условию $I_{ест.} = 8I = 8\cdot 0{,}5I_{ест.}\cos^2\varphi$. Отсюда $\cos^2\varphi = 1/4$.

$\cos\varphi = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 60^0$.

Ответ: $\varphi = 60^0$.

13. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

Основные формулы

- Поток энергии Φ_e, т.е. энергия, излучаемая (или поглощаемая) телом за единицу времени:

$\Phi_e = \dfrac{dW}{dt}$, где dW – энергия, излучаемая (или поглощаемая) телом во всем диапазоне частот (длин волн) за время dt.

- Энергетическая светимость тела:

$R_e = \dfrac{d\Phi_e}{ds} = \dfrac{dW}{ds\,dt}$, где $d\Phi_e$ – поток излучения с участка поверхности тела площадью ds.

- Закон Стефана-Больцмана:

$R_e = \sigma T^4$, где R_e – энергетическая светимость (излучательность) чёрного тела; $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ Вт/(м^2 К^4)$ – постоянная Стефана-Больцмана; T – абсолютная температура.

- Энергетическая светимость серого тела:

$R_T^c = a_T \sigma T^4$, где a_T – поглощательная способность серого тела.

- Спектральная плотность энергетической светимости:

$$r_{\lambda,T} = \frac{dW}{ds\,dt\,d\lambda}.$$

- Связь энергетической светимости и спектральной плотности энергетической светимости чёрного тела:

$$R_e = \int_0^\infty r_{\nu,T}\,d\nu = \int_0^\infty r_{\lambda,T}\,d\lambda.$$

- Закон смещения Вина:

$\lambda_{max} = \dfrac{b}{T}$, где $\lambda_{\max}$ – длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости чёрного тела; $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ м \cdot К$ – постоянная Вина.

- Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости чёрного тела от температуры:

$$(r_{\lambda,T})_{max} = CT^5,$$

где $C = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\ Вт/(м^3 К^5)$.

- Формула Рэлея-Джинса для спектральной плотности энергетической светимости чёрного тела:

$r_{\nu,T} = \dfrac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$, где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ Дж/К$ – постоянная Больцмана;

$c = 3 \cdot 10^8\ м/с$ – скорость света в вакууме; ν – частота излучения.

- Энергия кванта света (фотона):

$\varepsilon = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$, где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot с$ - постоянная Планка.

- Импульс и масса фотона:

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \qquad m = \frac{h\nu}{c^2}.$$

- Формула Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$h\nu = A + \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, где A – работа выхода электрона из металла; $\dfrac{m\upsilon^2}{2}$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ кг$ – масса электрона.

Если $\upsilon = 0$, то $h\nu_0 = A$ или $hc/\lambda_0 = A$, где ν_0, λ_0 – «красная граница» фотоэффекта, т.е. минимальная частота или максимальная длина волны, при которой возможен фотоэффект.

- Связь между максимальной кинетической энергией электрона и задерживающим напряжением:

$\dfrac{m\upsilon^2}{2} = eU_з$, где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл$ – заряд электрона.

- Давление света при нормальном падении на поверхность

$P = \varpi(1 + \rho)$, где ρ – коэффициент отражения (для зеркальной поверхности $\rho_з = 1$, для чёрной поверхности $\rho_ч = 0$);

$\varpi = \dfrac{E}{V} = \dfrac{E}{S\,t\,c}$ – объёмная плотность энергии излучения;

$E = N h\nu$ – энергия всех фотонов; S – площадь поверхности, на которую падает свет; c – скорость света в вакууме; t – время воздействия света; N – число фотонов; $V = S\,t\,c$ - объем.

- Изменение длины волны рентгеновского излучения при комптоновском рассеянии:

$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \dfrac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$, где λ и λ' – длина волны падающего и рассеянного излучения соответственно, m – масса электрона, θ – угол рассеяния.

Примеры решения задач

Задача 1. Исследования спектра излучения Солнца показывают, что максимум спектральной плотности энергетической светимости соответствует длине волны 0.5 мкм. Принимая Солнце за абсолютно черное тело, определить: а) энергетическую светимость Солнца; б) поток энергии, излучаемой Солнцем; в) энергетическую освещенность поверхности Земли при нормальном падении лучей без учета поглощения в атмосфере.

Дано:	**Решение:**
$\lambda_{\max} = 0{,}5\,мкм$ $= 5\cdot 10^{-7}\,м$	а) Энергетическая светимость абсолютно черного тела выражается формулой Стефана – Больцмана:
а) $R_e - ?$ б) $P - ?$ в) $E_e - ?$	$R_e = \sigma T^4$, (1)

где $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4) – постоянная Стефана – Больцмана; T – абсолютная температура излучающей поверхности.

Температура может быть определена из закона смещения Вина:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \tag{2}$$

где $\lambda_{\max}$ – длина волны, на которую приходится максимум

спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела; $b = 2.9 \cdot 10^{-3}$ м $\cdot$ К – постоянная Вина.

Выразив из закона смещения Вина температуру и подставив

ее в (1), получим: $R_e = \sigma\left(\dfrac{b}{\lambda_{\max}}\right)^4$. (3)

Подставив эти числовые значения в (3) и произведя вычисления, получим:

$$R_e = 5.67 \cdot 10^{-8}\left(\frac{2.9 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-7}}\right)^4 = 6.44 \cdot 10^7\, Вт/м^2.$$

б) Поток энергии P, излучаемой Солнцем, равен произведению энергетической светимости Солнца на площадь его поверхности:

$P = R_e S = 4\pi r^2 R_e$, где $r = 6{,}96 \cdot 10^8$ *м* - радиус Солнца.

Подставив числовые значения, найдем:

$$P = 4 \cdot 3.14 \cdot \left(6.96 \cdot 10^8\right)^2 \cdot 6.44 \cdot 10^7 = 3.93 \cdot 10^{26}\, Вт.$$

в) Энергетическую освещенность E_e поверхности Земли определим, если разделим поток энергии P, излучаемой Солнцем, на площадь S поверхности сферы, радиус которой равен среднему расстоянию от Земли до Солнца ($R = 1{,}50 \cdot 10^{11}\, м$):

$$E_e = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2}, \qquad (5)$$

Подставив числовые значения в (5), получим:

$$E_e \frac{3.93 \cdot 10^{26}}{4 \cdot 3.14\left(1.50 \cdot 10^{11}\right)^2} = 1400\, Вт/м.$$

Ответ:а) $R_e = 6.44 \cdot 10^7\, Вт/м^2$;б) $P = 3.93 \cdot 10^{26}\, Вт$;

в) $E_e = 1400\, Вт/м$.

Задача 2. Красная граница фотоэффекта для цезия равна $\lambda_0 = 6.53 \cdot 10^{-7}$ м. Определить скорость фотоэлектронов при облучении цезия фиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м ($h = 6.625 \cdot 10^{-34}$ Дж · с; $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с; $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг).

Дано

$\lambda_0 = 6.53 \cdot 10^{-7}$ м

$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м

$h = 6.625 \cdot 10^{-34}$ Дж · с

$c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с

$m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг

$\upsilon - ?$

Решение

Скорость фотоэлектронов может быть определена из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A + \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Работу выхода электрона из цезия можно определить, зная красную границу фотоэффекта, т. е. ту минимальную энергию, при которой еще наблюдается фотоэффект:

$$A = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0}.$$

Определяя из уравнения Эйнштейна скорость электрона, получим:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2h\nu - 2A}{m}} = \sqrt{\frac{2h\frac{c}{\lambda} - 2h\frac{c}{\lambda_0}}{m}} = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)}.$$

Подставляем числовые значения:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{9.11 \cdot 10^{-31}}\left(\frac{1}{5 \cdot 10^{-7}} - \frac{1}{6.53 \cdot 10^{-7}}\right)},$$

$$\upsilon = 4.5 \cdot 10^{5} \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 4.5 \cdot 10^{5}$ м/с.

Задача 3. На идеальную отражающую плоскую поверхность падает монохроматический свет с длиной волны

$\lambda = 0{,}55 мкм$. Мощность излучения $\Phi_e = 0{,}45\, Вт$. Определить: 1) число фотонов N, падающих на поверхность за время $t = 3с$; 2) силу давления F, испытываемую поверхностью.

Дано:	**Решение:**
$\lambda = 0{,}55 мкм = 5{,}5 \cdot 10^{-7} м$ $\Phi_e = 0{,}45\, Вт$ $t = 3с$ $\rho = 1$	1) Энергия фотонов: $E = h\frac{c}{\lambda} \cdot N$, где $c = 3 \cdot 10^8 м/с$ - скорость света.
$N - ?\quad F - ?$	Мощность: $\Phi_e = \frac{E}{t} = \frac{h\,c\,N}{\lambda\,t}$. Отсюда $N = \frac{\Phi_e \lambda\, t}{c\,h}$. Подставляя

числовые значения,

получаем: $N = \frac{0{,}45 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 3}{3 \cdot 10^8 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}} = 3{,}73 \cdot 10^{18}$.

2)Давление света на поверхность: $P = \frac{E}{t\,S\,c}(1+\rho) = \frac{\Phi_e}{S\,c}(1+\rho)$.

Сила давления $F = P \cdot S = \frac{\Phi_e}{c}(1+\rho)$. Подставляем числа:

$$F = \frac{0{,}45}{3 \cdot 10^8}(1+1) = 3 \cdot 10^{-9}\, Н.$$

Ответ: $N = 3{,}73 \cdot 10^{18}$; $F = 3 \cdot 10^{-9}\, Н$.

13. ТЕОРИЯ АТОМА ВОДОРОДА ПО БОРУ. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ.

Основные формулы и законы

- Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний):

$$m_e \upsilon r_n = n\hbar = n\frac{h}{2\pi} \qquad (n = 1, 2, 3,\ldots),$$ где

$m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ *кг* – масса электрона; υ – скорость электрона на n-й орбите, радиус которой равен r_n; n – номер стационарного состояния; $h = 6{,}63\cdot 10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка.

- Второй постулат Бора (правило частот):

$h\nu = E_n - E_m$, где E_n, E_m – энергии стационарных состояний атома соответственно до и после излучения (поглощения); ν – частота излученного (поглощенного) кванта энергии.

- Обобщенная формула Бальмера, описывающая серии линий в спектре атома водорода:

$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, где ν – частота спектральных линий в спектре атома водорода; $R = 3{,}29\cdot 10^{15}\,c^{-1}$ - постоянная Ридберга; m – целое число, определяет серию линий в спектре атома водорода: $m = 1$ – серия Лаймана (расположена в ультрафиолетовой части);

$m = 2$ – серия Бальмера (расположена в видимой части спектра);

$m = 3$ – серия Пашена;
$m = 4$ – серия Брэкета;
$m = 6$ – серия Хэмфри.
} расположены в инфракрасной части спектра

$m = 5$ – серия Пфунда;
$m = 6$ – серия Хэмфри.
$n = m + 1$ – определяет отдельные линии соответствующей

серии m.

- Радиус n-й орбиты электрона в атоме водорода:

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_o}{m_e e^2}$$,где $$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}055 \cdot 10^{-34}\,Дж \cdot c;$$

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\, Ф/м$ – электрическая постоянная; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл$ – заряд электрона; m_e – масса электрона.

- Энергия n-го стационарного состояния атома водорода:

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_o{}^2}$$, где n – номер стационарной орбиты.

- Энергия электрона в атоме водорода:

$$E_n = \frac{E_i}{n^2}$$, где E_i – энергия ионизации атома водорода.

- Потенциал ионизации:

$$\varphi_i = E_i / e.$$

- Потенциал возбуждения:

$$\varphi_n = \frac{E_{n+1} - E_1}{e}\ .$$

- Длина волны де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\upsilon}$$, где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Дж \cdot c$ – постоянная Планка; $p = m\upsilon$ – импульс частицы (m – масса частицы; υ – её скорость).

- Связь импульса частицы $\boldsymbol{p}$ с ее кинетической энергией T:

$$p = \frac{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}{c}$$, где m – масса покоя частицы. При малых скоростях $p = \sqrt{2mT}$.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга: $\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2 \\ \Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2 \\ \Delta z \Delta p_z \geq \hbar/2 \end{cases}$

$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$, где $\Delta x, \Delta p, \Delta E, \Delta t$ – соответственно неопределенности координаты, импульса, энергии и времени, $\hbar = h/2\pi$.

- Нестационарное уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U\Psi .$$

- Уравнение Шредингера для стационарных состояний:

$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0$, где $\Psi = \Psi(r,t)$–волновая функция, описывающая состояние микрочастицы; E – полная энергия микрочастицы; $U = U(x,y,z)$ – потенциальная энергия частицы; t – время, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа (записан в декартовых координатах); m – масса микрочастицы; $\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-34}$ $Дж \cdot с$; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

- Одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi(x) = 0 .$$

- Условие нормировки волновой функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1 \qquad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\vec{r})|^2 dV = 1 \right).$$

- Плотность вероятности:

$\frac{dW(x)}{dx} = |\Psi(\vec{r})|^2$ $\left(\frac{dW(\vec{r})}{dV} = |\Psi(\vec{r})|^2 \right)$, где $dW(x)$ – вероятность того, что частица может быть обнаружена вблизи точки с координатой x на участке dx.

- Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x)|^2 dx.$$

- Решение уравнения Шредингера для одномерного, бесконечно глубокого, прямоугольного потенциального ящика шириной $\boldsymbol{l}$ ($0 \geq \boldsymbol{x} \geq l$):

$\Psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}} \sin \dfrac{\pi n}{l} x$ (собственная нормированная волновая функция),

$E_n = \dfrac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2\, m l^2}$ (собственное значение энергии), где n – главное квантовое число (n = 1, 2, 3,…). В области $0 \geq x \geq l$ $U = \infty$ и $\Psi(x) = 0$.

Примеры решения задач

Задача 1. Определить максимальную и минимальную энергии фотона в видимой серии спектра водорода (серии Бальмера).

Дано:
$Z = 1$
$m = 2$
$n_{max} = \infty$
$n_{min} = 3$

$E_{max} = ?$
$E_{min} = ?$

Решение:

Энергия фотона определяется по формуле $E = h\nu$, где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot c$ – постоянная Планка, ν - частота, определяемая в данном случае по формуле Бальмера: $\nu = R\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Получаем:

$$E_{max} = h\nu_{max} = hR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2}\right) = \frac{1}{4} hR,$$

$$E_{min} = h\nu_{min} = hR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36} hR.$$

Подставляем числа:

$$E_{max} = \frac{1}{4} 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot c \cdot 3{,}29 \cdot 10^{15}\ c^{-1} = 5{,}45 \cdot 10^{-19}\ Дж,$$

$$E_{min} = \frac{5}{36} 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot c \cdot$$

$$3{,}29 \cdot 10^{15}\ c^{-1} = 3{,}03 \cdot 10^{-19}\ Дж.$$

Ответ: $E_{\max} = 5{,}45 \cdot 10^{-19}\ Дж$,

$E_{min} = 3{,}03 \cdot 10^{-19}\ Дж$.

Задача 2. Определить, на сколько изменилась энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $4{,}86 \cdot 10^{-7}$ м.

Дано:	Решение:
$\lambda = 4{,}86 \cdot 10^{-7}\ м$	$\Delta E = h\nu$, где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot c$ – постоянная Планка, $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ - частота излучения, т.е.
$\Delta E = ?$	

$\Delta E = h\dfrac{c}{\lambda}$. Подставляем числа:

$$\Delta E = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot c \cdot 3 \cdot 10^{8}\ м/c}{4{,}86 \cdot 10^{-7}\ м} = 4{,}1 \cdot 10^{-19}\ Дж.$$

Ответ: $\Delta E = 4{,}1 \cdot 10^{-19}\ Дж$.

Задача 3. Средняя кинетическая энергия электрона в невозбужденном атоме водорода равна 13,6 эВ. Исходя из соотношения неопределенностей, найти наименьшую неточность, с которой можно вычислить координату электрона в атоме.

Решение:

Согласно соотношению неопределенностей имеем:

$$\Delta x \geq \hbar / \Delta p_x, \qquad (1)$$

Величина Δp_x неизвестна, однако можно найти среднее квадратичное значение импульса p, исходя из следующей формулы:

$$p = \sqrt{2mT}\,, \qquad (2)$$

где T - средняя кинетическая энергия электрона, которая по условию значительно меньше энергии покоя электрона ($m_0c^2 = 0{,}5\,МэВ$).

Сравним величины Δp_x и p. Так как импульс $\vec{p}$ - вектор, то формула (2) позволяет лишь вычислить модуль этого вектора, тогда как его направление остается неизвестным. Поэтому проекция p_x импульса на какую-либо фиксированную ось OX оказывается неопределенной (ее величина лежит в интервале $\pm p$). Это значит, что неопределенность проекции импульса на ось OX равна:

$$\Delta p_x = 2p\,, \qquad (3)$$

т е. величины Δp_x и p одного порядка.

Заменив Δp_x в формуле (1) величиной p и учитывая соотношение (2), получим:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mT}}\,. \qquad (4)$$

Подставим числовые значения в (4) и учтем, что 1эВ=1,6$\cdot$10^{-19}Дж:

$$\Delta x \geq \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 13{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}} = 10^{-10}\,м\,.$$

Следовательно, наименьшая, допустимая соотношением неопределенностей неточность Δx_{min}, с которой можно определить координату электрона в атоме водорода, есть величина порядка 10^{-10} м.

Ответ: $\Delta x_{\min} \geq 10^{-10}$ м.

Задача 4. Электрон находится в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме шириной l. Вычислите вероятность того, что электрон, находящийся в возбужденном состоянии (*n* = 2), будет обнаружен в средней трети ящика ($l/3 < x < 2l/3$.

Решение:

1.Вероятность W обнаружить частицу в интервале $x_1 < x < x_2$ определяется равенством:

$W = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left|\Psi(x)\right|^2 dx$, где $\psi\ (x)$ – нормированная волновая функция, отвечающая этому состоянию.

2.Для электрона в потенциальном ящике нормированная волновая функция имеет вид:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi x}{1}$$

3.С учетом того, что n =2, получим:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{2\pi x}{1}.$$

$$W = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{2\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{2}{l}\int\limits_{x_1}^{x_2} \sin^2\frac{2\pi x}{l} dx.$$

4. Подставим в полученную формулу пределы интегрирования

($x_1 = l/3,\ \ x_2 = 2l/3$), осуществим замену $\sin^2\frac{2\pi x}{l} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{4\pi x}{l}\right)$ и разобьем интеграл на два:

$$W = \frac{2}{l}\int\limits_{l/3_1}^{2l/3} \sin^2\frac{2\pi x}{l} dx = \frac{1}{l}\left(\int\limits_{l/3}^{2l/3} dx - \int\limits_{l/3}^{2l/3} \cos\frac{4\pi x}{l} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{l}\cdot\left(\frac{l}{3} - \frac{l}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{l}x\Big|_{l/3}^{2l/3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\left(\sin\frac{8\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}195.$$

Ответ: $W = 0.195.$

14. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Основные формулы и законы

- Массовое число ядра (число нуклонов в ядре):

$A = Z + N$, где Z – зарядовое число (число протонов); N – число нейтронов.

- Радиус ядра с массовым числом A:

$R = 1{,}23 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3}$ *м*.

- Дефект массы ядра:

$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - {}^A_Z m_Я$, где m_p, m_n и ${}^A_Z m_Я$ – соответственно масса протона, нейтрона и ядра. Если взять не массу ядра ${}^A_Z m_Я$, а массу атома (изотопа) ${}^A_Z m$ и вместо массы протона массу атома водорода ${}^1_1 m_H$, то

$\Delta m = Z\,{}^1_1 m_H + (A - Z)m_n - {}^A_Z m$.

- Энергия связи и удельная энергия связи:

$E_{СВ} = \Delta m \cdot c^2$, $E_{УД} = E_{СВ} / A$. Если массы измерять в а.е.м., то $E_{СВ} = 931{,}5 \cdot \Delta m (МэВ)$, так как 1 а.е.м.·c^2 = 931,5 МэВ.

- Закон радиоактивного распада:

$dN = -\lambda N\, dt$ или $N = N_o e^{-\lambda t}$, где dN – число ядер, распадающихся за время dt; N – число ядер, не распавшихся к моменту времени t; N_o – число ядер в начальный момент времени (t =0); λ – постоянная радиоактивного распада.

- Период полураспада:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

- Среднее время жизни радиоактивного ядра:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

- Активность радиоактивного изотопа – число распадов за 1 с:

$A = -dN/dt = \lambda N$ или $A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}$; в СИ активность измеряется в беккерелях (Бк), внесистемная единица активности – кюри (Ки), $1\ Ки = 3{,}7 \cdot 10^{10}\ Бк$.

- Правила смещения для α - распада:

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{2}_{4}He.$$

- Правила смещения для β^{-}- распада:

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\tilde{\nu}_e \quad .$$

- Правила смещения для β^{+}- распада:

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu_e.$$

- Энергетический эффект ядерной реакции (в МэВ):

$Q = 931{,}5\left[\sum m_i - \sum m_j\right]$, где $\sum m_i$ – сумма масс (в а.е.м.) исходных реагентов; $\sum m_j$ – сумма масс (в а.е.м.) продуктов реакции.

- Основные дозиметрические величины:

1) поглощенная доза излучения $D_п = \Delta E_{погл}/m$;

2) экспозиционная доза $D_э = q/m$ (1р = $2{,}58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг);

3) биологический эквивалент рентгена (1 бэр = 10^{-9} Дж/кг);

4) мощность дозы излучения $P_п = D_п/\Delta t$ или $P_э = D_э/\Delta t$, где Δt – длительность облучения.

Примеры решения задач

Задача 1. Определите, во сколько раз начальное количество ядер радиоактивного изотопа уменьшится за три года, если за один год оно уменьшилось в 4 раза.

Дано:	**Решение:**
$t_1 = 1год$ $t_2 = 3год$ $\frac{N_0}{N_1} = 3$	Закон радиоактивного распада: $N = N_0 e^{-\lambda t}$, где λ - постоянная радиоактивного распада. Следовательно: $N_1 = N_0 e^{-\lambda t_1}$ и $N_2 = N_0 e^{-\lambda t_2}$. Получаем: $\frac{N_0}{N_1} = e^{\lambda t_1} = 4$, отсюда $\lambda = \frac{\ln 4}{t_1}$.
$\frac{N_0}{N_2} - ?$	$\frac{N_0}{N_2} = e^{\lambda t_2} = e^{\frac{\ln 4 t_2}{t_1}} = e^{3 \ln 4} = 64.$

Ответ: уменьшится в 64 раза.

Задача 2. Определите, выделяется или поглощается энергия при следующей ядерной реакции ${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He$. Чему она равна?

Решение:

Нам необходимо найти энергетический эффект ядерной реакции. Причем, если массу брать в атомных единицах массы (а.е.м.), то энергия получится в мегаэлектронвольтах (МэВ):

$Q = 931{,}5\left[\sum m_i - \sum m_j\right]$,(МэВ)где $\sum m_i -$ сумма масс (в а.е.м.) исходных реагентов; $\sum m_j -$ сумма масс (в а.е.м.) продуктов реакции.

Если сумма масс исходных элементов больше суммы масс продуктов реакции, то избыточная энергия выделяется, если меньше, то недостающая энергия поглощается.

Находим по таблице массы элементов, участвующих в реакции:

$m_{{}^{7}_{3}Li}$ =7,01823а.е.м., $m_{{}^{1}_{1}H}$ =1,00814 а.е.м., $m_{{}^{4}_{2}He}$ =4,00387 а.е.м.

$\sum m_i$ =7,01823 а.е.м.+ 1,00814 а.е.м.=8,02637 а.е.м.,

$\sum m_j$ =4,00387 а.е.м.+ 4,00387 а.е.м.=8,00774 а.е.м.

Видим, что $\sum m_i > \sum m_j$. Следовательно, энергия выделяется.

Посчитаем ее: $Q = 931{,}5[8{,}02637 - 8{,}00774] = 17{,}35\, МэВ$.

Ответ: $Q = 17{,}35\, МэВ$

Задача 3. Из-за нарушения какого закона: барионного заряда, лептонного заряда, электрического заряда или спинового момента импульса не может идти реакция $p + n \rightarrow e^{+} + \nu_e$? Ответ поясните.

Решение:

Согласно закону сохранения барионного заряда, для всех процессов с участием барионов и антибарионов суммарный барионный заряд сохраняется. Барионам (нуклонам *n, p* и гиперонам) приписывается барионный заряд +1. Антибарионам (антинуклонам $\tilde{n}$, $\tilde{p}$ и антигиперонам) – барионный заряд -1, а всем остальным частицам - барионный заряд равный 0.

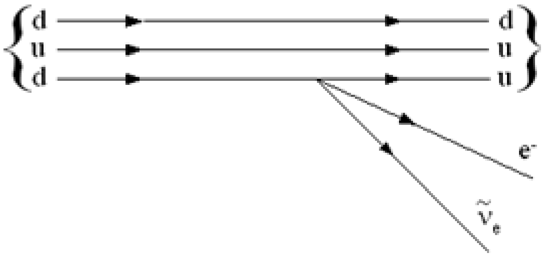
Следовательно, реакция $p + n \rightarrow e^{+} + \nu_e$ не может идти из-за нарушения закона сохранения барионного заряда так как, (+1) + (+1) $\neq$ (0) + (0)

Задача 4. Известно четыре вида фундаментальных взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, слабое, сильное. В одном из них выполняются все законы сохранения; оно характеризуется сравнительной интенсивностью, равной 1; радиус его действия составляет 10^{-15} м. Какому виду фундаментальных взаимодействий относятся все перечисленные характеристики?

Решение:

Между нуклонами в ядре, характерный размер которого 10^{-15} м, осуществляется сильное взаимодействие. Его интенсивность принята за 1. Для сильного взаимодействия выполняются все законы сохранения: энергии; импульса; момента импульса; зарядов электрического, лептонного и барионного; изоспина; странности; четности.

Задача 5. На рисунке показана кварковая диаграмма β^{-} - распада нуклона.



Какой реакции соответствует эта диаграмма?

Решение:

Адроны, к которым относятся нуклоны (протоны и нейтроны), состоят из кварков. В начальном состоянии нуклон состоит из двух *d*-кварков и одного *u*-кварка. Это нейтрон. В конечном состоянии нуклон состоит из двух *u*-кварков и одного *d*-кварка. Это протон. Таким образом, рассматриваемая диаграмма соответствует реакции $n \rightarrow p + e^{-} + \tilde{\nu}_e$, то есть нейтрон превращается в протон, что сопровождается испусканием электрона и антинейтрино.