ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Физика»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

«Физические основы генерации плазмы»

Авторы

Илясов В.В.
Жданова Т.П.

Ростов-на-Дону, 2013

Аннотация

В учебном пособии даётся общая характеристика вещества в состоянии плазмы, рассматриваются термодинамика и физическая кинетика плазмы, вводятся представления о траектории частиц в плазме, колебаниях и волнах в холодной и горячей плазме.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 150206 «Машины и технология высокоэффективных процессов обработки» и изучающих курс «Концентрированные потоки энергии и физические основы их генерации», при подготовке к практическим занятиям и экзамену, а также при выполнении курсовых и дипломных работ.

Авторы

Илясов В.В., д.т.н., проффессор

Жданова Т.П., к. ф.-м. н., доцент

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Развивающаяся отрасль физики, занимающаяся изучением ионизованного газа - плазмы, привлекает к себе все большее внимание. С плазмой связаны такие перспективные проблемы новой техники, как управляемые термоядерные реакции, прямое преобразование тепловой энергии в электрическую, получение сверхскоростных газовых струй и потоков, новые направления в сварке и поверхностной обработке металлов.

Настоящее пособие возникло из курса лекций «Концентрированные потоки энергии и физические основы их генерации», читаемого одним из авторов студентам Донского государственного технического университета в течение лет. Пособие не претендует на полное и математически строгое изложение всех физики плазмы, а ставит перед собой задачу: дать общую характеристика вещества в состоянии плазмы; ввести представления о траектории частиц в плазме; научить студентов разбираться в таких вопросах как термодинамика и физическая кинетика плазмы, колебания и волны в холодной и горячей плазме, что позволит студентам производить простейшие расчеты при выполнении курсовых и дипломных работ.

1. ПРОЦЕССЫ В ПЛАЗМЕ ГАЗОВОГО РАЗРЯДА

1.1. Квазинейтральность и разделение заряда

Плазма – квазинейтральная система, содержащая положительно и отрицательно заряженные свободные частицы (ионы и электроны). Положительные частицы – это всегда ионы, а отрицательные – обычно электроны. Понятие квазинейтральная плазма – плазма, электрически нейтральная в среднем, в достаточно больших объёмах или за достаточно большой промежуток времени, которые определяются пространственным и временным масштабами разделения зарядов.

Рассмотрим масштаб разделения зарядов во времени. В результате получим выражение для плазменной частоты ω_0. Пусть в результате разделения зарядов в плазме возник объёмный заряд плотностью q. По закону сохранения заряда $\frac{\partial q}{\partial t} = -div\,\overline{j}$, где j - плотность тока. Пусть ток определяется только электронами $j = n \cdot e \cdot \overline{V}$. Уравнение движения электрона m в электрическом поле $\frac{d\overline{V}}{dt} = -\,e \cdot \overline{E}$. Подставим выражение для j в уравнение закона сохранения заряда и продифференцируем по t:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -\frac{n \cdot e^2}{m} \cdot div\,\overline{E},$$

$$div\,\overline{E} = 4 \cdot \pi \cdot q,$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -\frac{4 \cdot \pi \cdot n \cdot e^2}{m} \cdot q,$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \cdot q = 0,$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi \cdot n \cdot e^2}{m}}$$ - плазменная частота.

Таким образом, плотность объёмного заряда в плазме колеблется с круговой частотой ω_0. Из вывода следует, что всякое разделение заряда в плазме приводит к колебаниям плотности заряда. В среднем за много периодов колебаний плазма ведет себя как квазинейтральная среда. Временной масштаб разделения заряда есть величина того же порядка, что и период плазменных колебаний и ограничивается $t_0 \sim \dfrac{1}{\omega_0}$. Разделение зарядов может быть существенным только за периоды времени малые по сравнению с этим масштабом. За пространственный масштаб разделения зарядов принимают расстояние, которое частица при своём тепловом движении проходит за время $\dfrac{1}{\omega_0}$. Таким образом, расстояние $d \approx \dfrac{\langle V \rangle}{\omega_0}$ определяет пространственный масштаб.

В физике плазмы температуру измеряют в энергетических единицах, т.е. называют температурой величину $k \cdot T$, где k - постоянная Больцмана, T - термодинамическая температура. При этом полагают постоянную Больцмана

$k \equiv 1$. Практической энергетической единицей температуры служит электронвольт

1 эВ = 11600 К.

1.2. Плазма как сплошная среда

Для описания плазмы обычно используют *модель проводящей жидкости*, которая удовлетворенно определяет свойства плазмы в приближении магнитной гидродинамики. Если пренебречь вязкостью и другими диссипативными процессами в проводящей среде, то уравнение движения плазмы в приближении магнитной гидродинамики можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla \cdot P + \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot \left[\overline{j} \cdot \overline{H} \right],$$

где $\dfrac{\partial \overline{V}}{\partial t}$ - производная, взятая вдоль траектории движения.

Плотность тока в приближении магнитной гидродинамики находится по закону Ома:

$$j = \sigma \cdot E^* = \sigma \cdot \left(E + \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot \left[\overline{j} \cdot \overline{H} \right] \right),$$

где E - напряженность электрического поля; σ - проводимость плазмы; E^* - напряженность электрического поля в системе отсчета, движущейся вместе с плазмой.

С учетом уравнений Максвелла, формул векторного анализа и частного случая, когда магнитное поле меняется только поперёк своего направления, уравнение движения примет вид:

$$\frac{\partial \overline{V_\perp}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla \cdot \left(P + \frac{H^2}{8 \cdot \pi} \right).$$

Анализ данной формулы показывает, что движение плазмы поперек магнитного поля происходит так, как если бы на неё кроме давления P действовало бы магнитное давление $\frac{H^2}{8 \cdot \pi}$. Оно имеет ту же величину, как и давление, производимое магнитным полем в вакууме в курсе электродинамики. Поэтому величину $\frac{H^2}{8 \cdot \pi}$ называют силой магнитного давления. Взаимодействие между частицами плазмы проявляется как вязкость. Действие вязкости можно учесть введением в уравнение движения добавочного члена:

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla \cdot P + \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot \left[\overline{j} \cdot \overline{H} \right] + \nu \cdot \Delta \cdot \overline{V},$$

где $\Delta = \nabla^2$; $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ - кинематическая вязкость, η - коэффициент вязкости.

1.3 Идеальная проводимость и дрейфовое движение

Во многих задачах используют более простой подход: *приближение идеальной проводимости*. В этом случае полагают, что проводимость плазмы $\sigma \to \infty$. В том случае, когда $\sigma = \infty$ любое малое электрическое поле вызывало бы бесконечный по величине ток и такие же затраты энергии и поэтому невозможно. Поэтому полагают, что в приближении идеальной проводимости электрическое поле в системе координат связанной с плазмой, должно быть равным нулю:

$$\overline{E}^* \equiv \overline{E} + \frac{1}{c} \cdot \left[\overline{V} \cdot \overline{H} \right].$$

Векторное произведение $\left[\overline{V} \cdot \overline{H} \right]$ зависит только от составляющей скорости $V_{\perp}$, а скорость V_{ll} может принимать любые значения. Значение $V_{\perp}$ можно получить, умножив последнее выражение векторно на $\overline{H}$ справа, тогда имеем:

$$\overline{V_{\perp}} = c \cdot \frac{\left[\overline{E} \cdot \overline{H} \right]}{H^2}.$$

Движение идеально проводящей среды (плазмы) в скрещенных магнитном и электрическом полях описываемое данной формулой называется дрейфом (дрейфовой скоростью), а величина дрейфовой скорости выражается как

$$\left| \overline{V_{\perp}} \right| = c \cdot \frac{\left| \overline{E_{\perp}} \right|}{H}$$

При приближённом рассмотрении поведения плазмы в магнитном поле в некоторых случаях пренебрегают электрическим сопротивлением плазмы, т.е. рассматривают её как идеально проводящую среду. Движение плазмы в этом приближении будет иметь дрейфовый характер. Поэтому данное приближение и называется *дрейфовым приближением*.

1.4. Проводимость плазмы

Для простейшего случая постоянного тока в однородной плазме уравнение обобщенного закона Ома имеет вид:

$$j+\omega_e\cdot\tau\cdot\left[\bar{j}\cdot\bar{h}\right]=\frac{n\cdot e^2}{m}\cdot\tau\cdot E^*,$$

где $\omega_e=\dfrac{e\cdot H}{m\cdot c}$ - электронная циклотронная частота; h - единичный вектор в направлении магнитного поля. При отсутствии магнитного поля или вдоль его направления векторное произведение $\left[\bar{j}\cdot\bar{h}\right]$ выпадает из уравнения определяются нормальная или продольная проводимость плазмы

$$\sigma_0=\sigma_{ll}=\frac{n\cdot e^2}{m}\cdot\tau,$$

где τ - время передачи импульса.

Поперечная проводимость плазмы есть величина тензорная и может быть получена из закона Ома с помощью тензора сопротивления R. Обычно вместо тензора сопротивления используют тензор проводимости. В случае постоянного тока тензор проводимости однородной плазмы имеет вид:

$$\sigma=\begin{pmatrix}\dfrac{\sigma_0}{1+\omega_e^2\cdot\tau^2} & -\dfrac{\omega_e\cdot\tau\cdot\sigma_0}{1+\omega_e^2\cdot\tau^2} & 0\\ \dfrac{\omega_e\cdot\tau\cdot\sigma_0}{1+\omega_e^2\cdot\tau^2} & \dfrac{\sigma_0}{1+\omega_e^2\cdot\tau^2} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_0\end{pmatrix}.$$

В явном виде составляющие тока определяется по формулам:

$$\overline{j_x}=\sigma_0\cdot\frac{\overline{E_x}-\omega_e\cdot\tau\cdot\overline{E_y}}{1+\omega_e^2\cdot\tau^2},$$

$$\overline{j_y} = \sigma_0 \cdot \frac{\overline{E_y} + \omega_e \cdot \tau \cdot \overline{E_x}}{1 + \omega_e^2 \cdot \tau^2},$$

$$\overline{j_z} = \sigma_0 \cdot \overline{E_z}.$$

Здесь ось z направлена вдоль магнитного поля.

Для замагниченной плазмы $\varpi_e \cdot \tau$ - большое число. Поэтому поперечная проводимость должна быть значительно меньше продольной и уменьшаться обратно пропорционально квадрату циклотронной частоты. Электрический ток должен течь не только вдоль электрического поля, но и поперёк него (скин-эффект). Причем в замагниченной плазме при скрещенных полях ток поперёк электрического поля (холловский ток) должен быть гораздо больше, чем ток вдоль электрического, но поперёк магнитного поля. В реальных условиях проводимость плазмы сильно осложняется пространственной неоднородностью, приводящей к поляризации электрического поля, дрейфовым токам и токам на магниченности.

1.5 Кулоновские столкновения

В плазме передача импульса происходит при двойных (парных) взаимодействиях, которые можно рассматривать как столкновения. Вероятность взаимодействия характеризуется *эффективным сечением* Q, имеющем размерность площади (см^2). В уравнении проводимости время передачи импульса τ определяется соотношением

$$\tau = \frac{1}{\langle Q \cdot u \rangle \cdot n_i},$$

а нормальная проводимость плазмы σ_0 выражается через сечение взаимодействия, как

$$\sigma_0 = \frac{n \cdot e^2}{n_i \cdot m \cdot \langle Q \cdot u \rangle} = \frac{Z \cdot e^2}{n_i \cdot \langle Q \cdot u \rangle},$$

где u - относительная скорость, m - приведенная масса.

Взаимодействие между заряженными частицами осуществляется посредством электростатических кулоновских сил. Величина передаваемого импульса определяется *прицельным параметром* b, т.е. расстоянием по перпендикуляру от одной частицы до невозмущенной траектории другой. Первый импульс оценивается, как

$$\Delta\left(\tilde{m}\overline{V}\right) \approx Z_1 \cdot \frac{Z_2 \cdot e^2}{b \cdot u}.$$

Расстояние ближайшего взаимодействия определяется соотношением

$$b_0 = Z_1 \cdot \frac{Z_2 \cdot e^2}{\tilde{m} \cdot u^2}.$$

Это расстояние, на котором потенциальная энергия взаимодействия равна по абсолютной величине удвоенной кинетической энергии относительного движения. *Эффективное сечение* кулоновского взаимодействия выражается формулой

$$\overline{Q} = 2 \cdot \pi \cdot b_0^2 \cdot \ln \Lambda,$$

где $\Lambda = \dfrac{b_{\max}}{b_{\min}}$. Величину $\ln \Lambda$ называют *кулоновским логарифмом*. Под верхним пределом $b_{\max}$ понимают длину экранирования (дебаевская длина), под нижним пределом $b_{\min}$ берется большее из двух величин: расстояние ближнего взаимодействия b_0 и квантовомеханическая длина волны частицы

$$\tilde{\lambda} = \frac{\hbar}{\tilde{m} \cdot u}.$$

Проводимость полностью ионизированной плазмы определяется кулоновским сечением рассеивания электрона на ионе. Для рассматриваемого случая:

$$b_0 = \frac{Z \cdot e^2}{m \cdot u^2}$$

m - масса электрона, u - скорость движения электронов относительно ионов.

2. ТЕРМОДИНАМИКА ПЛАЗМЫ

Термодинамика изучает свойства систем, находящихся в состоянии теплового, или термического, равновесия. Важнейшей характеристикой такой системы является её температура. В дальнейшем под температурой мы будем понимать температуру в энергетических единицах, как это было показано выше. Согласно закону равнораспределения энергии, она равна средней энергии, приходящейся на две степени свободы идеального газа. При измерении температуры в энергетических единицах вероятность состояния с энергией E_i пропорциональна величине $\exp\left(-E_i/T\right)$. Поэтому удобной для физики плазмы энергетической температурой является электронвольт (эВ).

Плазма имеет определённую температуру, только если она находится в состоянии *полного термодинамического равновесия*. Обычно в плазме приходится иметь дело с частичным термодинамическим равновесием. Так обмен энергиями электронов с ионами происходит гораздо медленнее, чем обмен между частицами, близкими по массе. Поэтому в не слишком плотной плазме может длительное время существовать состояние, когда плазма характеризуется двумя температурами: *электронной* T_e и *ионной* T_i. Плазму с $T_e \equiv T$ называют *изотермической*.

2.1 Тепловая и кулоновская энергия плазмы.

Для равновесной плазмы тепловая энергия выражается так же, как для идеального газа ($Q = n \cdot k \cdot T$). В полностью ионизирующей плазме плотность тепловой энергии

$$e_T = \frac{3}{2} \cdot \left(n_e \cdot T_e + n_i \cdot T_i\right),$$

где n – концентрация частиц; T – температуры в энергетических единицах.

В частично ионизированной плазме добавляется энергия нейтральных частиц (атомов и молекул), определяемая формулами классической термодинамики газов.

В термодинамическом отношении плазма отличается от идеального газа тем, что кроме тепловой энергии в ней может оказаться существенной энергия электростатического взаимодействия, которая в приближении Дебая может быть определена соотношением

$$e_k = -\frac{T}{8\cdot\pi}\cdot\chi^3 = -\frac{T}{8\cdot\pi\cdot l_D^3},$$

где χ - постоянная экранирования; l_D - длина экранирования.

Полезно рассмотреть сферу с радиусом, равным длине экранирования; такую сферу называют дебаевской. Объём данной сферы находим как

$$V_D = \frac{4}{3}\pi\cdot l_D^3.$$

В первом приближении можно считать, что потенциал частицы сказывается только внутри дебаевской сферы, т.е. вне её он пренебрежимо мал. Если от плотности кулоновской энергии перейти к кулоновской энергии, рассчитанной на одну частицу, то она выразиться как

$$E_k = -\frac{T}{6\cdot V_D\cdot n} = -\frac{T}{6\cdot N_D},$$

где V_D - дебаевский объем; N_D - число частиц в дебаевском объеме.

В силу статического характера теории Дебая она справедлива в случае, если в дебаевской сфере содержиться много частиц

$$N_D >> 1.$$

Но тогда согласно последней формуле кулоновская энергия мала по сравнению с тепловой. Таким образом, число частиц в дебаевской сфере может служить критерием идеальности плазмы. Если N_D велико, то плазма в термодинамическом отношении ведет себя как идеальный газ.

Таким образом, теория Дебая применима только тогда, когда электростатическое взаимодействие является малой поправкой, т.е. когда плазма по своему термодинамическому поведению близка к идеальному газу. Основное назначение данных формул заключается в том, что они позволяют оценить границы плотности плазмы, для которых справедливы законы идеального газа. При более высоких плотностях плазмы тепловой расчет термодинамического поведения плазмы невозможен.

2.2 Равновесие ионизации

Для не полностью ионизированной плазмы важнейшая термодинамическая задача заключается в нахождении степени ионизации. Применяя термодинамику к решению этой задачи, следует помнить, что термодинамика дает равновесную степень ионизации. В замкнутой системе стандартное состояние всегда совпадает с состоянием термодинамического равновесия. Однако, для открытой системы, через которую проходит стационарный поток энергии, стационарное состояние может *не совпадать* с состоянием термодинамического равновесия.

Для открытых систем применим принцип детального равновесия, согласно которому стационарное состояние совпадает с состоянием термодинамического равновесия, т.е. если прямой и обратный процессы совершаются по одному и тому же пути. Рассмотрим это принцип на примере равновесия ионизации. Основными процессами ионизации являются: ионизация электронным ударом

$$a + e \to i + 2 \cdot e$$

и ионизация излучением

$$a + h \cdot \nu \to i + e,$$

где символ a обозначает атом; i - ион; $h \cdot \nu$ - фотон (квант энергии).

Каждому из этих процессов отвечает обратный процесс рекомбинации. Для ионизации электронным ударом обратным процессом является рекомбинация при тройных столкновениях

$$i + 2 \cdot e \to a + e.$$

При этом столкновении избыточную энергию уносит второй электрон. Для второго процесса ионизации обратным процессом является рекомбинация с излучением

$$i + e \to a + h \cdot \nu.$$

Получим общий вид условия равновесия ионизации из элементарных кинетических представлений. В случае ионизации электронным ударом скорость ионизации ω_1 определяется как

$$\omega_1 = k_1 \cdot n_a \cdot n_e,$$

а скорость рекомбинации

$$\omega_2 = k_2 \cdot n_i \cdot n_e^2,$$

где k_1, k_2 - константы скоростей ионизации и рекомбинации; n_a, n_i, n_e - концентрации атомов, ионов и электронов соответственно.

По принципу детального равновесия, скорости прямого и обратного процессов должны быть равны, т.е.

$$\omega_1 = \omega_2$$

Откуда получаем *закон действующих масс* (в соответствии с терминологией в физической химии)

$$\frac{n_i \cdot n_e}{n_a} = \frac{k_1}{k_2} \equiv K,$$

здесь K - константа равновесия.

В случае, если ионизация производится излучением, а рекомбинация происходит при двойных столкновениях с испусканием излучения, имеем

$$\frac{n_i \cdot n_e}{n_a} = \frac{k_1^{'} \cdot I}{k_2^{'}},$$

где I - интенсивность излучения. Для равновесного излучения интенсивность I является функцией только температуры. Сопоставление последних двух формул следует равенство

$$\frac{k_1^{'} \cdot I}{k_2^{'}} = \frac{k_1}{k_2} = K.$$

Таким образом, из принципа детального равновесия следует общий вид *условия равновесия ионизации*

$$\frac{n_i \cdot n_e}{n_a} = K.$$

Частным случаем этой зависимости для идеальной плазмы является формула Саха, которая будет получена ниже.

Стационарное состояние ионизации совпадает с состоянием термодинамического равновесия как в случае, если ионизация происходит электронным ударом, а рекомбинация - при тройных столкновениях, так и в случае ионизации равновесным излучением и лучистой рекомбинации. В замкнутой системе, где излучение находится в равновесии с веществом, соответствие между прямым и обратным процессом обеспечивается автоматически. Однако, в разряженной плазме нередко реализуется случай открытой системы, когда излучение свободно выходит из плазмы. При этом ионизация производится только электронным ударом, рекомбинация же, если плазма не слишком плотная, может происходить в основном с излучением. В таком случае прямой и обратный процессы совершаются по разным путям и стационарное состояние ионизации не совпадает с состоянием термодинамического равновесия. В открытой системе тройными столкновениями можно пренебречь. Тогда стационарное состояние ионизации может быть определено формулой Эльверта

$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{k_1}{k_2} \quad .$$

Согласно формуле Эльверта, в разряженной плазме, из которой излучение выходит свободно, степень ионизации не зависит от концентрации электронов.

2.3 Формула Саха

Формула для равновесной ионизации имеет фундаментальное значение в физике плазмы и называется формулой Сахá, по имени индийского астронома впервые её получившего. Она справедлива, если ионизации и рекомбинация происходят по одному и тому же пути и плазму можно рассматривать как идеальный газ. Это оправдано при не слишком низких, но и не слишком высоких плотностях. Наряду с условием детального равновесия должен удовлетворяться также общий критерий идеальности плазмы: кулоновская энергия должна быть мала в сравнении с тепловой, или, что то же самое, число частиц в дебаевской сфере должно быть большим.

Согласно квазиклассической статистике, вероятность нахождения частицы в состоянии с энергией E выражается формулой Больцмана

$$\omega(E) = A\, e^{-\frac{E}{T}} ,$$

где T - температура в энергетических единицах. Число частиц с энергией E равно вероятности, умноженной на число состояний. Для частицы, не имеющей внутренних степеней свободы, число состояний равно числу элементарных ячеек фазового пространства объёмом h^3, где h - постоянная Планка. Для электрона с импульсом между p и $p+dp$ фазовый объём равен

$$d\Gamma = 4\pi\, p^2\, dp\, V\,,$$

где V - обычный объём. Число электронов в этом объёме выразиться как

$$dN_e = V g_e \frac{4\pi p^2}{h^3} dp\, e^{-\frac{E}{T}}\,.$$

Здесь g_e - статистический вес, т.е. число состояний с одинаковой энергией, различающихся внутренними степенями свободы. Рассматривая равновесие электронов с атомами, мы можем за нуль энергии считать энергию электрона в атоме. Тогда энергия свободного электрона с импульсом p будет

$$E = J + \frac{p^2}{2m}\,,$$

где J - энергия ионизации атома (или потенциал ионизации). Число свободных электронов на один атом в определённом квантовом состоянии найдётся интегрированием по всем значениям импульса

$$N_e^* = V g_e \frac{4\pi}{h^3} e^{-\frac{J}{T}} \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp\,.$$

Интеграл берётся по формуле, приведённой обычно в математических приложениях, как интегралы от распределения Максвелла [1]. В итоге получается следующая формула

$$N_e = N_a \frac{g_e}{g_a} V \frac{(2\pi m T)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{J}{T}}\,.$$

В рамках квазиклассического подхода приходиться сделать два неочевидных допущения. Во-первых, мы полагали, что проведённое интегрирование даёт число электронов на один атом в определённом квантовом состоянии. Во-вторых, в равновесии ионизации участвуют также и ионы, и, чтобы учесть это, нужно за объём V принять объём, приходящийся на один ион в определённом квантовом состоянии

$$V = \frac{1}{\frac{n_i}{g_i}},$$

где n_i - число ионов в единице объёма; g_i - статистический вес иона. Подстановка этой формулы в предшествующее выражение даёт формулу Саха́ в окончательном виде

$$\frac{N_e}{N_a} = \frac{g_e\, g_i}{g_a} \frac{1}{n_i} \frac{(2\pi m T)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{J}{T}} \quad .$$

Отношение полных чисел частиц N равно отношению концентраций n, что позволяет записать формулу Саха́ в симметричном виде

$$\frac{n_e \cdot n_i}{n_a} = \frac{g_e \cdot g_i}{g_a} \cdot \frac{(2 \cdot \pi \cdot m \cdot T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \cdot e^{-\frac{J}{T}},$$

Выполним анализ данного уравнения. Левая часть уравнения Саха́ характеризует (определяет) константу равновесия для процесса ионизации, рассматриваемого в качестве химической реакции. Подставим в уравнение универсальные константы (h, π, m) и выразим температуру в электровольтах, то формула Саха́ примет вид:

$$\frac{n_e \cdot n_i}{n_a} = \frac{g_e \cdot g_i}{g_a} \cdot 3 \cdot 10^{21} \cdot T_{(ýÂ)}^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{J}{T}} \quad ,$$

где размерность концентрации в $\tilde{n}\grave{i}^{-3}$.

Квазиклассический вывод формулы Саха́ обладает физической наглядностью, но содержит допущения, которые строго не обоснованы.

2.4 Статистический вес и внутренние степени свободы

Внутренними степенями свободы частиц (атомов, ионов и электронов) плазмы являются пространственная ориентация спина S, орбитального момента L и электронное возбуждение. Вращательные моменты измеряются в квантовых единицах: $\hbar = \dfrac{h}{2 \cdot \pi}$. Полный момент J_i может принимать значения от $[L+S]$ до $[L-S]$ через единицу. Состояние с моментом J имеет статистический вес

$$g = 2 \cdot J + 1.$$

У свободного электрона $L = 0$, $J = S = \dfrac{1}{2}$, и его статистический вес равен $g_e = 2$. У атомов и ионов, у которых не все электроны оторваны, возможны разные состояния электронного возбуждения характеризуемые энергией E_j и статистическим весом g_j. Полным статистическим весом атома (или иона) называется статистическая сумма по внутренним степеням свободы

$$g = \sum_j g_j \, e^{-\frac{E_i}{T}}.$$

Если известны энергии и моменты для всех возбуждённых уровней, то полный статистический вес атома или иона можно вычислить непосредственно по предшествующей формуле, находя статистические веса разных уровней как

$$g_i = 2\,J_j + 1.$$

Расчёт можно значительно упростить, пользуяс схемой Рессела - Саундерса, согласно которой уровни, отличающиеся только взаимной ориентацией спина и орбитального момента, объединяются в один мультиплет. Тогда под энергией E_i для статистического веса g понимают среднюю энергию мультиплета, а статистический вес его выражается как

$$g_j = (2L + 1) \cdot (2S + 1).$$

Полный же статистический вес атома или иона находится по схеме Рессела - Саундерса как

$$g = \sum_j (2 \cdot L + 1) \cdot (2 \cdot S + 1) \cdot e^{-\frac{E_j}{T}} .$$

Здесь суммирование идет по всем мультиплетам.

Если температура высока в сравнении с энергиями мультиплетного расщепления, но низка в сравнении с энергиями электронного возбуждения, то экспоненциальные множители в последней формуле можно считать равными нулю и полный статистический вес сводится к статистическому весу основного электронного состояния, а именно

$$g \approx (2L + 1) \cdot (2S + 1).$$

При расчёте равновесия ионизации обычно достаточно учитывать возбуждённые состояния только исходного атома (или иона), а для конечного – ограничиться статистическим весом основного состояния. Величины энергии спинов и орбитальных моментов возбужденных элементарных состояний берутся из спектроскопических данных. Обычно достаточно учитывать только первое возбужденное состояние, тогда формула Саха́ принимает вид

$$\frac{n_e \cdot n_i}{n_a} \approx \frac{2 \cdot g_i}{g_0 + g_1 \cdot e^{-\frac{E_1}{T}}} \cdot 3 \cdot 10^{21} \cdot T_{(\text{ýÂ})}^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{J}{T}},$$

где g_i - статистический вес основного состояния иона; g_0, g_1 - статистические веса основного и первого возбужденного состояния атома, E_1 - энергия возбуждения.

3. ТРАЕКТОРИЯ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ

3.1. Дрейфовое движение. Скорость дрейфа

Если на плазму действуют сильные внешние поля, то уравнение движения заряженной частицы можно представить следующим образом, полагая, что плазма представляет собой систему независимых заряженных частиц, движущихся по своим траекториям в заданных внешних полях

$$M \cdot \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{Z \cdot e}{c} \cdot \left[\overline{V} \cdot \overline{H} + \overline{F}\right],$$

где M - масса частицы, Z - её зарядовое число, $\overline{V}$ - скорость частицы, $\overline{H}$ - напряженность магнитного поля, $\overline{F}$ - равнодействующая всех остальных сил действующих на частицу.

Данное уравнение, за исключением простейших случаев, не поддаются аналитическому решению и обычно используют один из приближённых методов решения данного уравнения, носящий название *дрейфового приближения*. Этот метод применим, если движение происходит в достаточно сильном внешнем магнитном поле и взаимодействием между частицами можно пренебречь. При этих условиях движение частицы можно разложить на три составляющие:

1) быстрое циклотронное вращение вокруг силовых линий магнитного поля;

2) дрейфовое движение центра циклотронной окружности поперек магнитного поля;

3) свободное движение вдоль силовой линии, на которую магнитное поле не действует.

Если сила $\overline{F}$ в уравнении движения отсутствует и магнитное поле однородно, то движение частицы складывается из циклотронного вращения и движения вдоль силовой линии. В зависимости от характера силы $\overline{F}$ на эту простейшую картину накладываются различные виды дрейфа:

1) Электрический дрейф: сила $\overline{F}$ есть сила постоянного электрического поля;

2) Градиентный дрейф: магнитное поле меняется по вели-

чине;

3) Центробежный дрейф: магнитное поле меняется по направлению;

4) Поляризационный дрейф: в переменном по времени электрическом поле;

5) Дрейф под действием сил неэлектрической природы, например силы тяжести (гравитационный дрейф).

Дрейфовое движение обладает замечательными свойствами, которому присущи следующие особенности:

- скорость дрейфового движение направлено не вдоль действия силы, а перпендикулярно к ее направлению и к направлению магнитного поля;
- постоянная сила вызывает не равноускоренное, а равномерное движение;
- сила электрического поля вызывает движение ионов и электронов в одном направлении, т.е. течение плазмы как целого, а неэлектрические силы возбуждают токи.

Следует отметить, что особые свойства дрейфа не противоречат законам механики Ньютона, так как дрейф есть усредненное движение. Отметим так же, что дрейфовое движение есть адиабатическое движение частиц в замагниченной плазме, удовлетворяющей условию

$$\omega_c \cdot \tau >> 1.$$

Мерой взаимодействия между частицами является эффективная частота столкновений, равная обратной величине среднего времени передачи импульса

$$\nu = \frac{1}{\tau} .$$

Условие замагниченности для частицы с циклотронной частотой ω_c записывается как

$$\omega_c >> \nu .$$

Циклотронная частота ионов ω_i в 1000 раз меньше чем для электронов ω_e, поэтому условие замагниченности для электронов осуществляется легче. Возможен случай, когда $\omega_e >> \nu >> \omega_i$. Отсюда следует, что электроны замагниченны, а ионы нет. В этом случае в дрейфовом движении принимает участие только электроны.

Приближённый метод рассмотрения движения частиц в плазме посредством разделения его на циклотронное вращение и дрейфовое движение носит название *дрейфового приближения*.

Величина скорости дрейфа может быть представлена следующей формулой

$$|V| = \frac{c \cdot F_{\perp}}{Ze \cdot H},$$

где $F_{\perp}$ - сила действует поперёк магнитного поля $\overline{H}$. Чтобы узнать не только величину, но и направление дрейфовой скорости нужно написать её выражение в векторной форме

$$\overline{V_{\perp}} = c \cdot \frac{\left[\overline{F} \cdot \overline{H}\right]}{Ze \cdot H^2}.$$

При постоянной силе $\overline{F_{\perp}}$ разделение движения частицы на циклотронное вращение и дрейфовое движение является точным. Данное приближение тем ближе к действительности, чем лучше выполняется условие адиабатичности движения частиц в замагниченной плазме, т.е. $\omega_c \cdot \tau >> 1$. Направление дрейфовой скорости можно определить с помощью последней формулы по правилам векторного умножения.

3.2 Электрический дрейф

Простейший случай дрейфового движения тот, когда силой $F_{\perp}$ является сила электрического поля. Такой дрейф называется электрическим. Его также называют дрейфом в скрещенных полях, так как электрическое поле здесь направлено поперёк магнитного, т.е. $\overline{E} \perp \overline{H}$. Электрическое поле $\overline{E}$ действует на частицу с зарядовым числом Z с силой

$$\overline{F} = Ze \cdot \overline{E}.$$

Скорость электрического дрейфа определяется из формулы для $V_{\perp}$ как

$$\overline{V_E} = c \cdot \frac{\left[\overline{E} \cdot \overline{H}\right]}{H^2},$$

или по абсолютному значению

$$\left|\overline{V_E}\right| = c \cdot \frac{E}{H}.$$

Очевидно, эти формулы применимы лишь при условии, что в гауссовой системе единиц напряженность электрического поля значительно меньше напряжённости магнитного

$$E << H.$$

В противном случае скорость дрейфа будет приближаться к скорости света и нужно будет пользоваться релятивисткой механикой. Особенность формулы для скорости электрического дрейфа заключается в том, что при выводе её зарядовое число сокращается. Поэтому скорость электрического дрейфа не зависит от заряда частицы. Электроны и ионы дрейфуют при этом в одном направлении и с одинаковой скоростью V_E. Если магнитное поле направлено к нам, а электрическое воле вверх, то все частицы дрейфуют вправо, как показано на рис. 3.1.

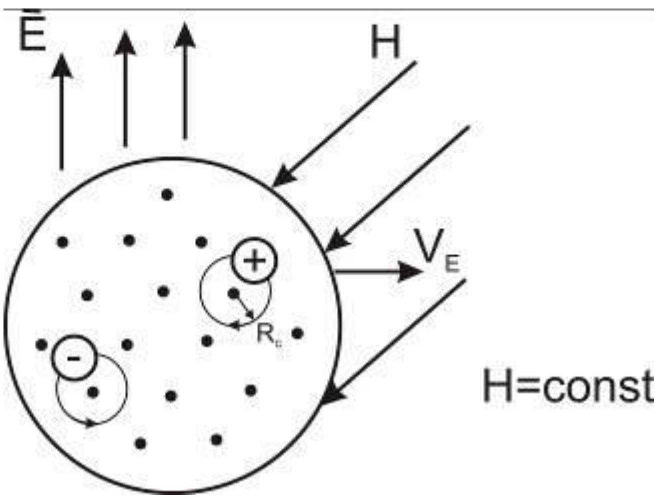

Рис. 3.1. Электрический дрейф для однородного магнитного поля

Таким образом, если как электроны, так и ионы замагничены, то электрический дрейф не приводит к разделению зарядов, а вызывает только движение плазмы как целого. Если замагничены только электроны, но не ионы, то дрейфуют только электроны. В этом случае дрейф приводит к разделению зарядов.

3.3. Дрейф в неоднородном магнитном поле

Изменение напряженности магнитного поля по величине приводит к изменению циклотронного радиуса частицы R_c. Это является причиной градиентного дрейфа. Ввиду того, что циклотронное вращение происходит в плоскости, перпендикулярной силовым линиям магнитного поля, то дрейф вызывается только градиентом магнитного поля $\nabla_\perp \cdot H$ поперек его направления.

Скорость градиентного дрейфа определяется формулой

$$|V_H| = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_c \cdot V_\perp}{H} \cdot \nabla_\perp \cdot H,$$

где $R_c = \dfrac{M_c \cdot V_\perp}{Z \cdot e \cdot H}$ - циклотронный радиус. Полученная формула определяет скорость градиентного дрейфа только по величине. Чтобы определить направление дрейфовой скорости, нужно представить её в векторной форме. Для этого составляющую градиента в направлении, перпендикулярном к H, можно представить как векторное произведение

$$\nabla_\perp H = \left[\nabla H \cdot \overline{h}\right] = -\left[\overline{h} \cdot \nabla H\right],$$

где h - единичный вектор в направлении магнитного поля. Подстановка последнего выражения в формулу для дрейфовой скорости дает

$$\vec{V}_H = \frac{1}{2} R_c V_\perp \frac{\left[\overline{H} \cdot \nabla H\right]}{H^2}.$$

Если магнитное поле направлено к нам, то положительные частицы движутся по часовой стрелке, а отрицательные – против часовой стрелки. Если при этом напряженность магнитного поля возрастает вверх, то положительные частицы будут дрейфовать влево, а отрицательные – вправо, как показано на рис. 3.2.

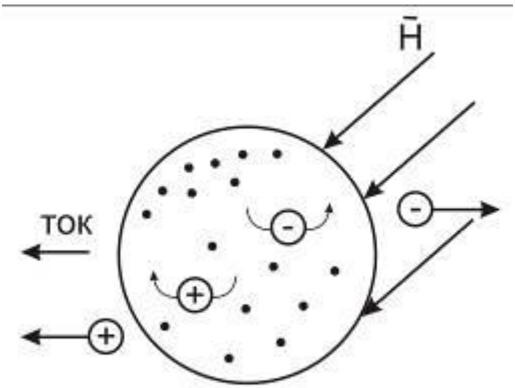

Рис. 3.2. Градиентный дрейф в неоднородном магнитном поле

Изменение направления магнитного поля может быть описано как искривление магнитных силовых линий. Центр циклотронного кружка движется по искривленной силовой линии. Полагаем, что на него действует центробежная сила, тогда скорость центробежного дрейфа определяется по формуле

$$|V_c| = c \cdot \frac{M \cdot V_{ll}^2}{Z \cdot e \cdot H \cdot R}.$$

где R - радиус кривизны силовой линии магнитного поля. Если рассматривать радиус кривизны как вектор $\overline{R}$ (радиус-вектор), направленный от центра кривизны к силовой линии, то формулу скорости центробежного дрейфа можно представить в векторном виде

$$\overline{V_c} = c\,\frac{M \cdot V_u^2}{Z\,e\,H^2\,R^2}\left[\overline{R}\;\overline{H}\right].$$

Если вектор $\overline{H}$ направлен к нам и выгнуто вверх, то положительные частицы дрейфуют вправо, а отрицательные – влево, как показано на рис.3.3.

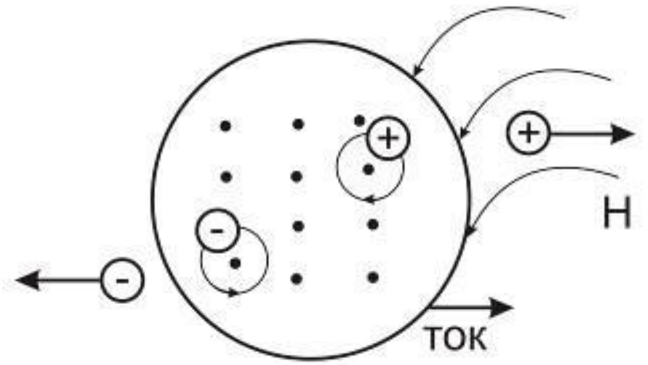

Рис.3.3. Центробежный дрейф

Скорости градиентного и центробежного дрейфов зависят от заряда частицы, так что противоположно заряженные частицы дрейфуют в противоположных направлениях. Следовательно, неоднородность магнитного поля возбуждает в плазме дрейфовые токи, приводящие к разделению зарядов. Для упрощения вида формул для дрейфовых токов обычно вводят понятия продольного P_u и поперечного $P_\perp$ давления плазмы. Давление равно произведению концентрации на среднюю энергию, приходящуюся на две степени свободы. В продольном направлении частица имеет одну степень свободы, в поперечном – две. Градиентный дрейф определяется поперечным, а центробежный - продольным давлением плазмы.

Таким образом, неоднородность магнитного поля приводит к появлению в плазме дрейфовых токов с плотностью:

для градиентного дрейфа

$$\left| j_{í} \right| = c \cdot \frac{P_\perp}{H \cdot L}$$

и для центробежного

$$\left| j_c \right| = c \cdot \frac{P_{ll}}{H \cdot R},$$

где

$$P_{ll} = n \cdot M \cdot V_{ll}^2$$

$$P_{\perp} = n \cdot \frac{M \cdot V_{\perp}^2}{2}$$ продольное и поперечное давления плазмы,

$$L = \frac{H}{\nabla \cdot H}$$ - характерная длина изменения магнитного поля.

3.4 Поляризационный дрейф

Поляризационный дрейф есть важнейший случай инерционного дрейфа, когда ускорение частиц обусловлено изменением скорости электрического дрейфа, вызванного переменным электрическим полем. Если переменное электрическое поле напряженностью E направлено поперек магнитного поля, то скорость поляризационного дрейфа будет направлена вдоль электрического поля

$$\overline{V_{ï}} = \frac{M \cdot c^2}{Z \cdot e \cdot H^2} \cdot \dot{\overline{E}}.$$

Таким образом, поперечное переменное электрическое поле вызывает в замагниченной плазме дрейфовый ток плотностью

$$\overline{j_n} = -\frac{\rho \cdot c^2}{H^2} \cdot \dot{\overline{E}},$$

где $\rho = \sum_k M_k \cdot n_k$ - плотность плазмы, n_k - концентрация частиц k типа.

Плотность дрейфового тока пропорциональна массе частицы, так что он переноситься практически целиком ионами. Этот дрейфовый ток во многих случаях оказывается гораздо существеннее, чем ток, происходящий от поперечной проводимости плазмы.

Отметим, что плазму можно рассматривать как среду с электрической проницаемостью

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + \frac{4\pi \cdot \rho \cdot c^2}{H^2}.$$

Если $\varepsilon_{\perp} >> 1$, то ей соответствует показатель преломления

$$n_{\perp} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}} \approx \frac{c \cdot \sqrt{4\pi \cdot \rho}}{H}.$$

Данному показателю преломления соответствует фазовая скорость волны U_A

$$U_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi \cdot \rho}},$$

называемая альфвеновской скоростью.

Эти результаты справедливы, если справедливо дрейфовое движение, т.е. движение можно считать адиабатическим. Для этого частоты рассматриваемых процессов должны быть малы в сравнении с наименьшей из циклотронных частот, т.е. с ионной циклотронной частотой ω_i.

3.5. Ток намагничивания

В неоднородной плазме, кроме тока проводимости и дрейфовых токов, имеется ещё один механизм возникновения электрического тока, связанный с пространственной неоднородностью. Ток, возникающий из-за пространственной неоднородности плазмы, называют током намагничивания. Под неоднородностью понимается переменность в пространстве любой из основных характеристик плазмы:

- концентрация заряженных частиц;
- температуры (или средней кинетической энергии циклотронного вращения);
- напряженности магнитного поля.

Переменность хотя бы одной из них приводит к возникновению тока намагниченности с плотностью:

$$\overline{j_i} = -c \cdot rot \sum \left(\frac{n_k \cdot M_k \cdot V_{\perp k}^2}{2 \cdot H^2} \right) \cdot \overline{H}.$$

Плотность данного тока удобно выразить через давление плазмы. Здесь только нужно учесть направление магнитного момента циклотронного вращения всех частиц, откуда

$$\overline{j_{ì}} = -c \cdot rot \cdot \frac{P_{\perp}}{H^2} \cdot \overline{H}.$$

Оказывается, циклотронное вращение внутри объема, занятого замагниченной плазмой позволяет приписать ей внутреннюю диамагнитную восприимчивость

$$\chi = \frac{P_{\perp}}{H_0^2},$$

где H_0 - внешнее магнитное поле.

Для описания плазмы обычно используют безразмерную характеристику плазмы β, как отношение газового давления к магнитному

$$\beta = \frac{8 \cdot \pi \cdot P}{H_0^2}.$$

Максимальное значение магнитной восприимчивости замагниченной плазмы связано с параметром β соотношением

$$\chi_{ì} = \frac{\beta}{8 \cdot \pi}.$$

Холодной, называют плазму, у которой параметр $\beta << 1$. Для плазмы, удерживаемой магнитным полем, значение параметра β не может превосходить по величине единицу. Следовательно, магнитная восприимчивость даже в сильно неравновесном состоянии не может принимать больших значений.

4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ

4.1. Основные понятия и определения

Холодной мы называем плазму – плазма, у которой газовое давление мало по сравнению с магнитным

$$\beta \equiv \frac{8\pi \cdot P}{H^2} << 1.$$

Тогда можно пренебречь тепловым движением и рассматривать усредненное движение под действием внешних сил. Будем пренебрегать столкновениями и процессами диссипации (рассеивания) энергии, т.е. будем рассматривать так называемое *приближение идеальной плазмы*. Используем первое уравнение Максвелла

$$rot\overline{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}.$$

Применим операцию rot к обеим частям данного уравнения

$$rot\ rot\overline{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} rot\overline{H},$$

используем третье уравнение Максвелла для $rot\,\overline{H}$

$$rot\overline{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial\, E}{\partial\, t} - \frac{4 \cdot \pi}{c} \cdot \overline{j},$$

подстановка которого даёт

$$rot\ rot\overline{E} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} - \frac{4 \cdot \pi}{c^2} \cdot \frac{\partial\ \overline{j}}{\partial t}.$$

Раскрывая операцию $rot\ rot$ по формулам векторного анализа, получим уравнение, для случая плоской волны в следующем виде

$$\Delta\overline{E} - \nabla \cdot div\overline{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4 \cdot \pi}{c^2} \cdot \frac{\partial j}{\partial t}$$.

(4.1)

Ищем решение как плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x, в которой любая величина f зависит от координат и времени следующим образом:

$$f = \tilde{f} \cdot e^{i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)},$$

где $\tilde{f}$ - комплексная амплитуда, ω - круговая частота, k - волновое число.

Фазовая скорость: $u_ô = \dfrac{\omega}{k}$, групповая скорость: $u_ã = \dfrac{\partial \omega}{\partial k}$. Уравнение, связывающее ω и k называется дисперсионным уравнением.

Показатель преломления холодной плазы определяется как

$$N = \frac{c}{u_ô} = \frac{k \cdot c}{\omega}.$$

Зависимость фазовой скорости от частоты называется дисперсией. Она приводит к различию между групповой и фазовой скоростями. В анизотропной среде частота связана не только с величиной, но и направлением волнового вектора, т.е. дисперсионное уравнение имеет вид

$$F(\omega, k_1, k_2, k_3) = 0.$$

В векторной форме групповая скорость записывается как

$$\overline{u_ã} = \frac{d\overline{\omega}}{d\overline{k}}.$$

Направление групповой скорости совпадает с направлением переноса энергии волной. В дальнейшем оси координат выбираем так, чтобы волновое число $k_2 = 0$; $k_1 \perp \overline{H}$, а k_3 - вдоль поля. Для плоской волны дифференциальным операторам отвечают алгебраические операции

$$\Delta\overline{E} = -k^2 \cdot \overline{E},$$

$$\nabla \cdot div\overline{E} = -\overline{k} \cdot \left(\overline{k} \cdot \overline{E}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot \overline{E},$$

$$\frac{\partial \overline{j}}{\partial t} = -i \cdot \omega \cdot \overline{j}.$$

Применение этих операторов преобразует уравнение (4.1) к виду

$$k^2 \cdot \overline{E} - \overline{k} \cdot \left(\overline{k} \cdot \overline{E}\right) = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \overline{E} + i \cdot \frac{4\pi \cdot \omega}{c^2} \cdot \overline{j}. \tag{4.2}$$

Использование уравнений движений электронов и ионов с весами $n_e \cdot m$, $n_i \cdot M$ дает *гидродинамическое уравнение* вида

$$\frac{\partial \overline{V_i}}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot \left[\overline{j} \cdot \overline{H_0}\right], \tag{4.3}$$

где $\overline{V_i}$ - массовая скорость; $\overline{H_0}$ - постоянное внешнее поле.

Уравнение для плотности тока

$$\frac{\partial \overline{j}}{\partial t} = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot \left(\overline{E} + \frac{1}{c} \cdot \left[\overline{V_i} \cdot \overline{H_0}\right]\right) - \frac{e}{m \cdot c} \cdot \left[\overline{j} \cdot \overline{H_0}\right]. \tag{4.4}$$

Система последних двух уравнений совпадает с системой уравнений магнитной гидродинамики для идеального проводника, поэтому приближение холодной плазмы называют *гидродинамическим приближением*. Обычно вводят характерные частоты плазмы:

плазменную частоту $$\omega_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi \cdot n \cdot e^2}{m}}$$

и

циклотронные частоты для электрона и иона

$$\omega_e = \frac{e \cdot H_0}{m \cdot c}; \qquad \omega_i = \frac{Z \cdot e \cdot H_0}{M \cdot c}.$$

Для плоской волны система уравнений (4.3) и (4.4) принимает вид

$$\begin{cases} \overline{V_i} = \dfrac{i}{\omega \cdot \rho \cdot c} \cdot \left[\overline{j} \cdot \overline{H_0}\right] \\ \omega^2 \cdot \overline{j} = i \cdot \dfrac{\omega_0^2 \cdot \omega}{4 \cdot \pi} \cdot \overline{E} + \omega_i \cdot \omega_e \cdot \left\{\overline{j} - \overline{h} \cdot \left(\overline{j} \cdot \overline{h}\right)\right\} - i \cdot \omega \cdot \omega_e \cdot \left[\overline{j} \cdot \overline{h}\right] \end{cases}$$

(4.5)

Рассмотрение всех типов колебаний холодной плазмы сводится к совместному решению уравнений (4.2) и (4.5).

4.2. Магнитогидродинамические волны

Пусть волны распределяются в плазме вдоль магнитного поля, поляризованной поперек него. Для этой волны скалярное произведение волнового вектора $\overline{k}$ и вектора напряжённости электрического поля равно нулю

$$\left(\overline{k} \cdot \overline{E}\right) = 0$$

и уравнение (4.2) сводится к следующему виду

$$k^2 \cdot \overline{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \overline{E} + i \cdot \frac{4\pi \cdot \omega}{c^2} \cdot \overline{j}\ . \tag{4.6}$$

Током смещения, т.е. числом $\dfrac{\omega^2}{c^2} \cdot \overline{E}$ можно пренебречь, если показатель преломления плазмы велик, т.е.

$$\frac{k^2 \cdot c^2}{\omega^2} >> 1\ . \tag{4.7}$$

При выполнении этого условия вместо уравнения (4.6) можно записать следующее

$$\overline{E} \approx i \cdot \frac{4\pi \cdot \omega}{k^2 \cdot c^2} \cdot \overline{j} \ .$$

Отсюда следует, что ток $\overline{j}$ параллелен электрическому полю. Таким образом, для рассматриваемых волн ток перпендикулярен к магнитному полю. Следовательно, уравнение (4.5) преобразуется к виду

$$\omega^2 \cdot \overline{j} = \left(\omega_i \cdot \omega_e - \frac{\omega_0^2 \cdot \omega^2}{k^2 \cdot c^2} \right) \cdot \overline{j} - i \cdot \omega \cdot \omega_e \cdot \left[\overline{j} \cdot \overline{h} \right] . \qquad (4.8)$$

Рассмотрим предельную область низких частот, т.е. область для которой выполняется условие

$$\omega << \omega_i \ . \qquad (4.9)$$

В уравнении (4.8) члены, содержащие ω^2 и $\omega \cdot \omega_e$ малы по сравнению с числом, содержащим произведение $\omega_i \cdot \omega_e$, поэтому отсутствует анизотропия (или гиротропность) свойств волны. Для предельного случая имеем простое дисперсионное уравнение

$$\omega_i \cdot \omega_e = \frac{\omega_0^2 \cdot \omega^2}{k^2 \cdot c^2} \ ,$$

откуда выразим квадрат показателя преломления в следующем виде

$$N^2 = \frac{k^2 \cdot c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_i \cdot \omega_e} = \frac{4\pi \cdot M \cdot c^2}{Z \cdot H_0} = \frac{4\pi \cdot n_i \cdot M \cdot c^2}{H_0^2} \ . \qquad (4.10)$$

Выразим так же фазовую скорость волны

$$u_{ô} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\omega_i \cdot \omega_e \cdot c^2}{\omega_0^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi \cdot \rho}} \equiv u_A . \qquad (4.11)$$

Здесь ρ - плотность плазмы; $\rho \approx n_i \cdot M = \dfrac{nM}{Z}$;

u_A - *альфвеновские* (или гидродинамические) волны.

Квадрат альфеновского показателя преломления (4.10) равен значению поперечной диэлектрической проницаемости плазмы, которое мы получили ранее при рассмотрении поляризационного дрейфа.

Физическая картина магнитогидродинамических (МГД) волн может быть представлена следующим образом. Они могут рассматриваться как поперёчные колебания силовых линий вместе с плазмой, в которую они вморожена, наподобие упругих колебаний струны. В области низких частот магнитогидродинамические волны распространяются с постоянной скоростью, т.е. дисперсия отсутствует и групповая скорость равна фазовой. Чтобы наряду с условием (4.9) выполнялось также неравенство (4.7), т.е. альфеновский показатель преломления был велик, требуется, согласно выражения (4.10), выполнение неравенства

$$n_i \cdot M \cdot c^2 >> \frac{H_0^2}{4\pi} ,$$

(4.12)

т.е. магнитная энергия плазмы должна быть мала в сравнении с энергией покоя. При малой плотности плазмы или очень сильной магнитном поле это условие может не выполняться, и требуется более сложное дисперсионное уравнение.

Если условие $\omega << \omega_i$ не выполняется, то возникает дисперсия и проявляются гиротропные свойства плазмы, для которой дисперсионное уравнение имеет вид

$$\frac{\omega_0^2 \cdot \omega^2}{k^2 \cdot c^2} - \omega_i \cdot \omega_e + \omega^2 \pm \omega \cdot \omega_e = 0 .$$

Для квадрата показателя преломления плазмы из данного уравнения имеем

$$N^2 = \frac{k^2 \cdot c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_i \cdot \omega_e - \omega^2 \pm \omega \cdot \omega_e} .$$

(4.13)

Две частоты, обращающие в ноль знаменатель называются частотами аномальной дисперсии.

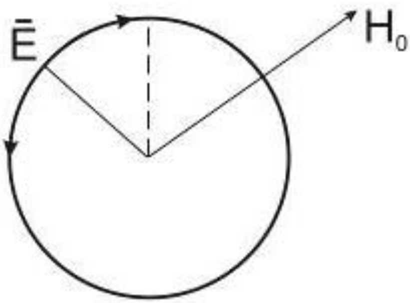

Рис. 4.1. Схема вращения волны относительно магнитного поля $\overline{H}_0$

Отметим, что амплитуды тока одинаковы во всех направлениях перпендикулярных к магнитному полю. Это относится и к амплитуде электрического поля. В течение цикла меняется только фаза волны, т.е. волна вращается вокруг направления магнитного поля, как показано на рис.4.1. Такие волны называются волнами с круговой поляризацией и могут вращаться в противоположных направлениях. Одна из них может распространятся в плазме только при частотах $\omega < \omega_i$ и называется обыкновенной, другая распространяется только при $\omega < \omega_e$ и называется необыкновенной. У обыкновенной волны электрический вектор $\overline{E}$ вращается в том же направлении, как и положительный заряд, у необыкновенной - как отрицательный заряд в магнитном поле.

4.3. Магнитный звук. Гибридные частоты

Рассмотрим волны, распределяющиеся перпендикулярно к магнитному полю. Волна поляризована вдоль поля. Пусть ось x направлена вдоль направления распространения, ось y - перпендикулярно к нему, ось z направлена вдоль магнитного поля. Для предельной области очень низких частот, т.е. когда $\omega << \omega_i$ и показатель преломления плазмы велик следует, что

$$j_x << j_y \quad \text{и} \quad E_x << E_y .$$

Это значит, что в данной области эллиптическая волна вырождается в плоскополяризованную. Дисперсионное уравнение оказывается аналогично случаю распространения волны вдоль магнитного поля. Скорость распространения волны определяется альфвеновской скоростью. Однако, физическая природа этих волн различна. Если вдоль магнитного поля распространяются поперечные колебания, то это гидродинамические (альфвеновские) волны. Гидродинамическая скорость вещества в холодной плазме направлена поперек магнитного поля $\overline{H}$. Следовательно, альфвеновские волны являются поперечными как в электродинамическом, так и в гидрокинематическом смысле.

Если волна распространяется поперек магнитного поля $\overline{H}$, то ток и вектор $\overline{E}$ волны направлены по оси y, а гидродинамическая скорость по оси x. Таким образом, волна является поперечной в электродинамическом смысле, но продольной - в гидродинамическом. Процесс колебания можно рассматривать как периодическое сжатие и расширение плазмы с вмороженным в нее магнитным полем, т.е. аналогично распространению звука. Поэтому этот процесс и называется магнитным звуком.

Частоты аномальной дисперсии магнитного звука в случае, когда $\overline{U_A} \perp \overline{H}$ принято называть гибридными частотами ω_h. Для гибридных частот существует биквадратное уравнение, имеющее два корня. Верхняя гибридная частота

$$\omega_{h1}^2 \approx \omega_0^2 + \omega_e^2$$

зависит только от плазменной ω_0 и электронной циклотронной ω_e частот и называется *электронно-плазменной гибридной частотой*.

Вторая гибридная частота в плотной плазме (если $\omega_0^2 >> \omega_i \cdot \omega_e$)

$$\omega_{h2}^2 \approx \frac{\omega_i \cdot \omega_e}{1 + \dfrac{\omega_e^2}{\omega_0^2}}$$

зависит в основном от электронной и ионной циклотронной частот и называется *электронно-ионной гибридной частотой*.

4.4. Структура волн в плотной плазме

Волны, распространяющиеся точно вдоль и поперек постоянного внешнего магнитного поля называются прямыми. Волна с электрическим полем вдоль внешнего магнитного поля является плазменной при распространении вдоль поля и электромагнитной при распространении поперек поля.

Прямые волны, у которых вектор $\overline{E}$ лежит в плоскости перпендикулярной к постоянному внешнему магнитному полю $\overline{H}$, при распространении вдоль поля будут поляризованы по кругу, переходящие при низких частотах в альфвеновскую волну (плоскополяризованную). При распространении поперек поля это будут прямые магнитозвуковые волны. При низких частотах (в магнитоакустической области) скорости распространения магнитогидродинамических и магнитоакустических волн стремятся к альфвеновской скорости. Структура волны с круговой поляризацией может быть представлена рис.4.2.

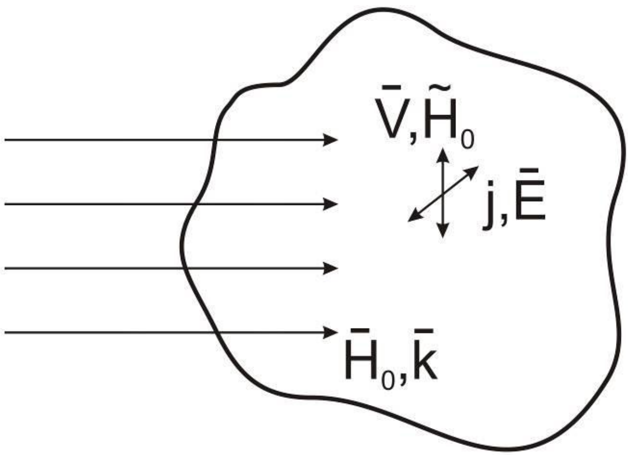

Рис.4.2. Структура волны с круговой поляризацией

Изображенные на рис.4.2 векторы вращаются вокруг направления внешнего магнитного поля. С уменьшением частоты волны вращение замедляется.

Структура волны упрощается, если считать, что плазма достаточно плотная

$$\omega_0^2 >> \omega_e \, \omega \ .$$

В плотной плазме магнитозвуковая волна является эллиптически поляризованной. Отношение амплитуд плотности тока имеет вид

$$\frac{|j_x|}{|j_y|} \approx \frac{\omega \cdot \omega_e}{\omega_0^2} << 1,$$

а отношение амплитуд полей

$$\frac{|E_x|}{|E_y|} \approx \frac{\omega \cdot \omega_e}{\omega_i \cdot \omega_e - \omega^2} \ .$$

Таким образом, в плотной плазме ток течет поперек направления распространения. Вещество движется перпендикулярно току, т.е. вдоль направления распространения. Поляризация остается эллиптической, вытянутость эллипса зависит от частоты. В магнитоакустической области ($\omega^2 << \omega_i \cdot \omega_e$) вытянутость эллипса поляризации выражается как

$$\left|\frac{E_x}{E_y}\right| \approx \frac{\omega}{\omega_i} \ .$$

При частотах ниже ионной и циклотронной поляризация становятся поперечной (к направлению распределения). Структура прямой магнитозвуковой волны проиллюстрирована на рис.4.3.

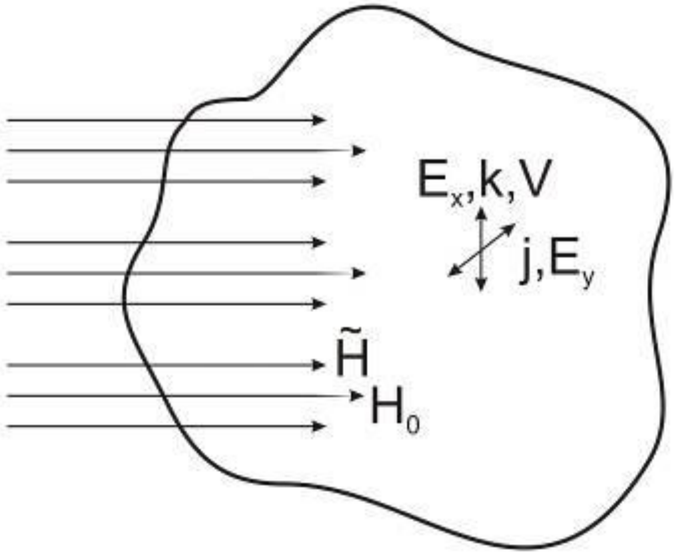

Рис.4.3. Структура магнитно-звуковой волны

Перпендикулярно к направлению распределения в плотной плазме движутся только электроны, переносящие ток.

Цилиндрические магнитозвуковые волны отличаются от плоских только тем, что распределение всех величин по радиусу выражается линейными комбинациями из функций Бесселя. Дисперсионное уравнение оказывается аналогичным уравнению для плоских волн. Прямой плоской волне отвечает радиальная цилиндрическая магнито-звуковая волна, у которой направление распространения совпадает с радиусом. Переменное магнитное поле направлено (также как и постоянное) вдоль оси цилиндра. В плотной плазме вещество сжимается и расширяется в радиальном направлении, а замкнутые токи текут по азимуту.

4.5. Плазменные волноводы

В ограниченном объеме плазмы на волновое число накладываются граничные условия. Объем, имеющий ограниченное поперечное сечение, но неограниченною длину называется волноводом. Граничные условия на боковой поверхности волновода определяют поперечное волновое число. При заданной частоте волны и геометрии сечения дисперсное уравнение определяет продольное волновое число, а значит и скорость распространения вдоль волновода. При определенных значениях частоты продольное волновое число может стать мнимым, т.е. распространение волны не возможным. Такие частоты называют граничными.

В цилиндрическом плазменном волноводе с продольным магнитным полем могут распространятся цилиндрические и винтовые волны, в которых все величины зависят от координат и времени как

$$f(z,r,\varphi,t)=Z(k_1,r)\cdot e^{i\cdot\psi},$$

где Z - цилиндрическая функция, т.е. линейная комбинация функций Бесселя; k_1 - радиальное волновое число;

$$\psi=k_3\cdot z+m\cdot\varphi-\omega\cdot t;$$

k_3 - осевое волновое число; m - азимутальное число.

В предельном случае низких частот скорость распространения определяется как

$$u_{ll}^2\equiv\frac{\omega^2}{k_3^2}=\frac{u_A^2}{1+\dfrac{\alpha^2\cdot u_A^2}{\omega^2\cdot R^2}},$$

где R - радиус волновода; α - один из корней, соответствующей функции Бесселя.

4.6. Магнитозвуковой резонанс

Отрезок трубы можно превратить в резонатор, закрыв его торцы отражающими поверхностями. При резонансных условиях возникают стоячие волны, и амплитуда волны резко возрастает. Резонансные условия зависят от размера и формы плазменного объема. Это есть резонансы раскачки. Для плазменного объема конечной длины резонансные частоты равны частотам волн, распространяющихся с соответствующим значением волнового вектора k_2 в волноводе. С увеличением длины резонатора его собственные частоты стремятся к предельным значениям. Собственная частота резонатора бесконечной длины равна граничной частоте волновода.

При частотах ниже гибридной в цилиндрическом объеме возможны чисто радиальные магнито-звуковые колебания. Граничные условия для них (при контакте с металлическими стенками) даются формулами

$$J_1(k_1R) = 0\,;$$
$$J_0(k_1R) = 0$$

и дают значение волнового числа $k_1 = \dfrac{\alpha}{R}$ в зависимости от радиуса цилиндра. Для чисто радиальных колебаний ($k = k_1$) подстановка этого значения волнового вектора в дисперсионное уравнение магнитного звука позволяет определить резонансную частоту. В длинном цилиндре при частотах порядка гибридной резонансная частота магнитного звука может быть найдена как

$$\omega^2 \approx \omega_i \cdot \omega_e \cdot \frac{1 + \dfrac{1}{\ddot{I}^{\,*} + 1} \cdot \dfrac{\omega_e}{\omega_i} \cdot \dfrac{k_3^2}{k_1^2}}{\ddot{I}^{\,*} + 1 + \dfrac{\omega_e^2}{\omega_0^2}},$$

где $\ddot{I}^{\,*}$ - эффективное погонное число электронов;

$$\ddot{I}^{\,*} \equiv \frac{4}{\alpha} \cdot \ddot{I} \equiv \frac{\omega_0^2}{k_1^2 \cdot c}\,;$$

$\ddot{I}$ - погонное число электронов на длине, равной классическому радиусу электрона,

$$r_c \sim \frac{e^2}{m \cdot c^2}\,;$$

k_1 - радиальное волновое число; $k_3 = \ell \cdot \dfrac{\pi}{L}$ - осевое волновое число, определяется длиной цилиндра; ℓ - целое число; L - длина цилиндра.

5. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ГОРЯЧЕЙ ПЛАЗМЕ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

5.1. Уравнения гидродинамического приближения

Для приближенного описания влияние теплового движения в уравнении для усредненных скоростей вводят силы давления. Считают, что электронное давление действует только на электроны, а ионное - только на ионы. Взаимодействие между ними описывается, как в модели двух жидкостей, эффективными числом столкновений, т.е. электрическим сопротивлением плазмы. Такой метод описания движения плазмы называется *гидродинамическим приближением*. Если при этом рассматривается предельный случай идеальной проводимости, то взаимодействие между ионами и электронами вообще не учитывается, т.е. они движутся друг сквозь друга как две независимые жидкости. Конечная проводимость, т.е. когда существует взаимодействие между электронами и ионами приводит к затуханию колебаний.

Если сложить уравнения давления электронов и ионов с учётом условия электронейтральности

$$Z \cdot n_i = n_e = n$$

и плотности тока

$$\overline{j} = e \cdot \left(Z \cdot n_i \cdot \overline{V_i} - n_e \cdot \overline{V_e} \right),$$

то для массовой скорости уравнение магнитной гидродинамики имеет вид

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} = \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot \left[\overline{j} \cdot \overline{H} \right] - \frac{1}{\rho} \cdot \nabla \cdot P ,$$

где $\overline{V}$ - массовая скорость, $\overline{V} = \dfrac{M \cdot n_i \cdot \overline{V_i} + m \cdot n_e \cdot \overline{V_e}}{M \cdot n_i + m \cdot n_e}$;

$\rho = M \cdot n_i + m \cdot n_e$ - плотность плазмы.

Для случая идеальной проводимости обобщенный закон Ома имеет вид

$$\frac{\partial \overline{j}}{\partial t} = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot \left(\overline{E} + \frac{1}{c} \cdot \left[\overline{V} \cdot \overline{H} \right] \right) + \frac{e}{m \cdot c} \cdot \left[\overline{j} \cdot \overline{H} \right] + \frac{e}{m \cdot c} \cdot \nabla \cdot P_e - \nu \cdot j$$

,

P_e - давление на электроны; $\nu = \dfrac{1}{\tau_{ei}}$.

Гидродинамическое приближение не описывает затухание колебаний, связанного с диссипацией без столкновения. При этом волна передает свою энергию частицам, у которых составляющая скорости теплового движения вдоль направления распространения близка к фазовой скорости волны.

Для волн с низкой фазовой скоростью специфическое затухание оказывается весьма сильным и может приводить к тому, что некоторые типы колебаний, получаемые из гидродинамического приближения в действительности не реализуются. Этот вопрос может быть рассмотрен методами физической кинематики.

В холодной плазме при отсутствии магнитного поля $H = 0$ плазменные колебания имеют одну фиксированную частоту, не зависящую от волнового числа, т.е. не являются распространяющимися волнами. При введении теплового давления плазменные колебания переходят в распространяющиеся волны. В этих волнах действуют одновременно электростатические силы (как в плазменных колебаниях) и силы давления (как в звуке). Поэтому их называют плазменными или электро-звуковыми волнами. При распространении плазменных волн вдоль внешнего магнитного поля $\overline{H_0}$ поперечные (магнитогидродинамические и электромагнитные) волны распространяются независимо от продольных электро-звуковых волн.

При распространении волн поперек внешнего поля $\overline{H_0}$ силы газового давления складываются с силами магнитного давления, возникают магнито-звуковые волны, которые с понижением температуры переходят в магнито-звуковые колебания холодной плазмы.

5.2. Скорость звука

Для описания влияния давления на волновые движения необходимо связать градиент давления со скоростью движения вещества

$$\nabla P = i \cdot \frac{u_3 \cdot M \cdot n_i}{\omega} \cdot \overline{K} \cdot \left(\overline{K} \cdot \overline{V}\right) \approx i \cdot \frac{u_3^2 \cdot \rho}{\omega} \cdot \overline{K} \cdot \left(\overline{K} \cdot \overline{V}\right),$$

где

$$u_3^2 = u_i^2 + \frac{Z \cdot m}{M} \cdot u_e^2 = \gamma_i \cdot \frac{T_i}{M} + \gamma_e \cdot \frac{Z \cdot T_e}{M}$$

есть скорость ионного звука (в отличие от ионной скорости звука u_i). Она определяется суммарной температурой электронов и ионов

$$T_i + Z \cdot T_e ,$$

но массой ионов. Электронная температура входит с множителем Z, потому, что это число электронов на один ион.

5.3. Плазменные волны и ионный звук

Рассмотрим продольные волны без магнитного поля. Дисперсионное уравнение высокочастотной ветви имеет вид

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 + k^2 \cdot u_e^2 = \omega_0^2 + k^2 \cdot \gamma_e \cdot \frac{T_e}{m}.$$

С понижением температуры плазмы или с возрастанием длины волны колебания высокочастотной ветви стремятся к электростатическим колебаниям холодной плазмы с фиксированной частотой ω_0. Низкочастотная (или ионная) ветвь определяется уравнением

$$\omega^2 \approx \frac{k^2 \cdot u_e^2 \cdot \frac{Z \cdot m}{M} \cdot \omega_0^2 + k^2 \cdot u_i^2 \cdot \omega_0^2 + k^4 \cdot u_e^2 \cdot u_i^2}{\omega_0^2 + k^2 \cdot \left(u_e^2 + u_i^2\right)}.$$

Для длинных волн, когда $k \to 0$, дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega_0^2 = k^2 \cdot \left(\gamma_i \cdot \frac{T_i}{M} + \gamma_e \cdot \frac{Z \cdot T_e}{M}\right).$$

Для коротких волн, когда $k \to \infty$ дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega^2 \approx k^2 \cdot \frac{u_e^2 \cdot u_i^2}{u_e^2 + u_i^2} \approx k^2 \cdot u_i^2.$$

Здесь u_e и u_i - электронная и ионная скорости звука, которые определяются следующими соотношениями

$$u_i^2 = \gamma_i \cdot \frac{T_i}{M}, \qquad u_e^2 = \gamma_e \cdot \frac{T_e}{m}.$$

Для коротких волн фазовые скорости как электронной, так и ионной ветвей стремятся к скорости звука, т.е. близки к средним скоростям теплового движения. Эти колебания быстро затухают по причине фазового резонанса с частицами, у которых скорость теплового движения равна фазовой скорости волны.

Реальные значения имеют длинноволновые колебания. При этом электронная ветвь имеет частоту, близкую к плазменной (но всегда выше её). Скорость же распространения ионного звука выражается формулой для скорости звука u_3. Если электронная температура значительно выше ионной, то скорость ионного звука ниже тепловых скоростей электронов, но выше тепловых скоростей ионов и возможно распространение волны без быстрого затухания.

5.4. Ускоренные и замедленные магнитозвуковые волны

Рассмотрим простейший случай, когда коэффициент преломления плазмы велик $N >> 1$, т.е. можно пренебречь током смещения, но плотность плазмы велика, что $\omega_0^2 >> k^2 \cdot c^2$ (эффективное погонное число электронов велико). Эти допущения соответствуют приближению магнитной гидродинамики.

Разлагая по степеням фазовые скорости, получим биквадратное уравнение вида

$$u_{\hat{o}}^4 - u_{\hat{o}}^2 \cdot \left(u_A^2 + u_3^2\right) + u_A^2 \cdot u_3^2 \cdot \cos^2\theta = 0$$

.

Больший из корней уравнения можно оценить как

$$u_{\hat{o}1}^2 \approx u_A^2 + u_3^2 .$$

Это решение описывает ускоренную магнитно-звуковую волну. Меньший корень

$$\frac{1}{u_{\hat{o}2}^2} \approx \left(\frac{1}{u_A^2} + \frac{1}{u_3^2}\right) \cdot \sec^2\theta$$

описывает замедленную магнитно-звуковую волну.

5.5 Дисперсия магнитного звука

Переходя к предельному случаю низких частот, мы пренебрегли гиротропными членами. Поэтому полученные в предыдущем разделе результаты не описывают дисперсию в области циклотронных частиот. Если сохранить гиротропные члены, то олучаются громоздкие формулы, которые мы в общем виде выписывать не будет. Вопрос о дисперсии рассмотрим только для простейшего случая прямой магнитно-звуковой волны, распространяющейся точно поперёк магнитного поля. Дисперсионное уравнение будет иметь следующий вид

$$\frac{\omega_0^2}{N^2-1}-\frac{\omega_i\cdot\omega_e}{1-N_3^2}+\omega^2\cdot\left[1+\frac{\omega_e^2}{\tilde{\omega}_0^2}\cdot\left(1+\frac{\omega_i}{\omega_e}\cdot\frac{N_e^2}{1-N_3^2}\right)\right]=0,$$

здесь $N=\dfrac{k\cdot c}{\omega}$; $\quad N_3=\dfrac{k\cdot u_3}{\omega}$; $\quad N_e=\dfrac{k\cdot u_e}{\omega}$;

$$\tilde{\omega}_0^2=\omega_0^2+\omega_i\cdot\omega_e-\omega^2+k^2\cdot u_e^2.$$

Из дисперсионного уравнения следует, что ограничения, накладываемые гибридной частотой в горячей плазме, снимаются. При частоте выше гибридной фазовая скорость остается вещественной и при высоких частотах стремится к скорости ионного звука.

6. ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА ПЛАЗМЫ

В предыдущих разделах рассматривалось усреднённое движение частиц плазмы: всем частицам, находящемся в данном элементе объёма, приписывалась одна средняя скорость. В действительности на эту среднюю скорость накладывается хаотическое тепловое движение. Количественное описание теплового движения частиц составляет предмет физической кинетики.

Важнейшими характеристиками теплового движения являются процессы переноса вещества, импульса и энергии: диффузия, внутреннее трение (вязкость) и теплопроводность. Тепловое движение также оказывает влияние на колебательные и волновые процессы в плазме и приводит, в частности, к дополнительному затуханию, не зависящему от столкновений.

6.1. Уравнение Фоккера - Планка

Если плазма находится в термодинамическом равновесии, то ее состояние описывается равновесной функцией распределения Максвелла

$$f^{\circ} = const \cdot e^{-\frac{M \cdot V^2}{2 \cdot T}},$$

где T - температура в энергетических единицах.

Обычно для описания плазмы используется каноническое фазовое пространство системы. Оно представляет собой совокупность конфигурационного пространства (составленного из координат всех частиц) и пространства импульсов. Объём элементарной ячейки канонического фазового пространства равен кубу постоянной Планка

$$\Delta\tilde{A}^* = h^3 = \left(2\pi \cdot \bar{\hbar}\right)^3.$$

В силу сложности взаимодействия в системах с большим числом частиц, в физической кинетике приходится широко использовать приближённые методы. Простейшие из них отвечают предельным случаям дискретного и непрерывного взаимодействия.

Поведение функции распределения в приближении непрерывного взаимодействия описывает уравнение Фоккера - Планка. Пусть функция распределения f зависит от набора величин X_α и от времени t: $f(X_\alpha;t)$. Пусть круговая частота $\omega(X';X;\Delta t)$ есть вероятность перехода системы из состояния X' в состояние X, осуществляемое за время Δt. Тогда уравнение Фоккера - Планка имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\cdot\left(A_\alpha\cdot f - \sum_\beta B_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial f}{\partial X_\beta}\right), \qquad (6.1)$$

где коэффициенты A_α образуют вектор скорости переноса по величине X, а $B_{\alpha\beta}$ есть тензор обобщенных коэффициентов диффузии.

Если за векторную величину X принять вектор положения в обычном пространстве, то уравнение Фоккера-Планка будет описывать процессы переноса. Если же принять за X вектор скорости, то это уравнение будет описывать диффузию в пространстве скоростей.

6.2. Феноменология процессов переноса

Если за переменную X_α принять координаты обычного пространства, то уравнение (6.1) представляет собой уравнение диффузии. Вектор $\overline{A}$ представляет собой скорость макроскопического течения $\overline{V}$, а тензор B составлен из коэффициентов диффузии $D_{\alpha\beta}$.

При наличии магнитного поля диффузия анизотропна и коэффициент диффузии является тензорной величиной. Продольный коэффициент диффузии (вдоль магнитного поля $\overline{H}$) сохраняет ту же величину, что и в отсутствие поля и определяется как

$$D_{//} \approx \frac{\ell^2}{\tau} \approx \ell\cdot V \approx \overline{V}^2\cdot\tau \quad , \qquad (6.2)$$

где l - длина свободного пробега, $\ell = V\cdot\tau$;

τ - среднее время передачи импульса;

$$D_{\perp} \approx \frac{\overline{V}^2}{\omega_c^2 \cdot \tau} \approx \frac{\ell \cdot V}{\omega_c^2 \cdot \tau^2} \ . \qquad (6.3)$$

В замагниченной плазме при больших значениях величины $\omega_c \cdot \tau$ поперечный коэффициент диффузии должен быть в $(\omega_c \cdot \tau)^2$ раз меньше продольного и уменьшаться пропорционально квадрату напряженности магнитного поля.

Если вид распределения остается неизменным, то диффузионный поток определяется соотношением

$$\overline{J} = -\frac{1}{3} \cdot \langle \ell \cdot V \rangle \cdot \nabla n \qquad (6.4)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по основной функции распределения. Множитель пропорциональности между диффузионным потоком и градиентом концентрации носит название коэффициента диффузии D. Для плазмы без магнитного поля коэффициент диффузии имеет простую зависимость

$$D = \frac{\langle \ell \cdot V \rangle}{3} . \qquad (6.5)$$

Для термической плазмы функция $n(V)$ содержит в качестве параметра температуру T. Тепловой поток будет определяться в этом случае как

$$\overline{q} = -\frac{1}{3} \cdot \left\langle \frac{M \cdot V^3}{2} \cdot \ell \cdot \left(\frac{\partial n(V)}{\partial T} \right)_p \right\rangle \cdot \nabla T \equiv \lambda \cdot \nabla T \ , \qquad (6.6)$$

где λ - коэффициент теплопроводности. По порядку величины он равен произведению коэффициента диффузии на теплоемкость единицы объема при постоянном давлении. Обычно для коэффициентов используют формулы:

$$D \approx \frac{1}{3} \cdot \ell \cdot V \ , \qquad (6.7)$$

$$\lambda = C_p \cdot \rho \cdot D , \qquad (6.8)$$

здесь ρ - плотность;

V рассматривается как средняя скорость теплового движения;

ℓ - средний пробег.

Отношение коэффициентов диффузии дает

$$\frac{D_{\perp}}{D_{//}} = \frac{R_c^2}{V^2 \cdot \tau} = \frac{1}{\omega_c^2 \cdot \tau^2}.$$

Эта формула пригодна для замагниченной плазмы, т.е. при $\omega \cdot \tau >> 1$. В переходной области действует формула вида

$$D_{\perp} = \frac{D_{//}}{1 + \omega_c^2 \cdot \tau^2} \qquad (6.9)$$

Важнейшим фактором, определяющим процессы переноса в плазме, является действие электрических полей. Диффузия в плазме неизбежно приводит к разделению зарядов, а следовательно к появлению электрических полей. Ионы и электроны не могут диффундировать независимо друг от друга. Возникшее электрическое поле вынуждает их к совместной или амбиполярной диффузии. Для характеристики этого процесса вводят понятие подвижности частиц по Эйнштейну

$$\mu = \frac{Z_e}{T} \cdot D. \qquad (6.10)$$

Поток амбиполярной диффузии обычно выражается как

$$J = -D_a \cdot \nabla n , \qquad (6.11)$$

где коэффициент амбиполярной диффузии определяется как

$$D_a = \frac{2 \cdot D_e \cdot D_i}{D_e + D_i}. \qquad (6.12)$$

В отсутствии магнитного поля $H = 0$ коэффициент диффузии для электронов $D_e >> D_i$, поэтому коэффициент амбиполярной диффузии оказывается равным удвоенному коэффициенту ионной диффузии

$$D_a \approx 2 \cdot D_i. \qquad (6.13)$$

6.3. Кинетическая теория плазменных волн

Изменение функции распределения во времени и в пространстве описывается кинетическим уравнением Больцмана, которое выводится из рассмотрения движения частиц в фазовом пространстве. Из механики Гамильтона следует теорема Луивилля, выраженная законом сохранения фазового объема. Кинетическое уравнение без столкновений с использованием теоремы Луивилля можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\overline{V} \cdot \nabla\right) \cdot f + \frac{1}{M} \cdot \left(\overline{F} \cdot \nabla_V\right) \cdot f = 0,$$

где M - масса частицы,

$\overline{F}$ - действующая на нее сила.

Применение метода самосогласованного поля к кинематическому уравнению дает:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \left(\overline{V} \cdot \nabla\right) \cdot f_k + \frac{Z_k \cdot e}{M_k} \cdot \left\{\left(\overline{E} + \frac{1}{c} \cdot \left[\overline{V} \cdot \overline{H}\right]\right) \cdot \nabla_V\right\} \cdot f_k = 0$$

Индекс k нумерует разные сорта частиц в плазме. Если поля $\overline{E}$ и $\overline{H}$ находятся по уравнению Максвелла, то это уравнение Власова.

Рассмотрим высокочастотные линейные продольные колебания плазмы без внешнего магнитного поля. Движением иона можно пренебречь, тогда кинематическое уравнение для электронов имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\overline{V} \cdot \nabla\right) \cdot f - \frac{e}{m} \cdot \left\{\left(\overline{E} + \frac{1}{c} \cdot \left[\overline{V} \cdot \overline{H}\right]\right) \cdot \nabla_V\right\} \cdot f = 0$$

Дисперсионное уравнение можно представить как:

$$\omega_0^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(V) \cdot dV}{(\omega - k \cdot V)^2} = 1$$

Приближенное решение дисперсионного уравнения можно получить для случая, когда функция распределения f

быстро совпадает с возрастанием скорости и при фазовой скорости $V = \dfrac{\omega}{k}$ уже мала. Это значит, что подынтегральная функция заметно отличается от нуля только в двух областях: при малых скоростях и в близи точки:

$$V = \frac{\omega}{k} \equiv U_\phi$$

Интеграл разбивается на два J_1 и J_2 отвечающим указанным областям. Разлагая в биномиальный ряд величину $\left(1 - \dfrac{k \cdot V}{\omega}\right)^2$ после интегрирования получим:

$$J_1 = 1 + 3 \cdot \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} V^2 \cdot f \cdot dV + \ldots$$

$$J_2 = i \cdot \pi \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial V}\right]_{V = \frac{\omega}{k}}$$

Подстановка J_1 и J_2 в дисперсионное уравнение и последующие преобразования дают дисперсионное уравнение вида:

$$\left.\begin{aligned} &\omega^2 \approx \omega_0^2 + 3 \cdot k^2 \cdot \overline{V}^2 \\ &\tilde{\omega} = \omega - i \cdot \delta \\ &\delta \approx -\frac{\pi \cdot \omega_0}{2} \cdot U_\phi^2 \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial V}\right]_{V = V_\phi} \end{aligned}\right\}$$

- декремент затухания,

$\tilde{\omega}$ - комплексная частота.

Для плоской волны зависимость от времени выражения:

$$e^{-i \cdot \tilde{\omega} \cdot t}$$

следовательно, положительные значения δ отвечают затуханию, отрицательные – раскачке колебания. Если функция распределения f уменьшается при возрастании абсолютного значения скорости, то мнимый член приводит к затуханию колебаний. Раскачка получится только в случае, если у функции f имеется горб, при скоростях близких по величине и направлению к фазовой скорости волны.

Применим полученные результаты к случаю колебаний около состояния термодинамического равновесия. Нормирование функции распределения Максвелла имеет вид: $f = \sqrt{\frac{m}{2 \cdot \pi \cdot T}} \cdot e^{-\frac{m \cdot V^2}{2 \cdot T}}$. Распределение квадрата скорости в одном направлении дает: $\overline{V}^2 = \frac{T}{m}$. Для равновесной термической плазмы дисперсионное уравнение и декремент имеют вид:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 3 \cdot k^2 \cdot \frac{T}{m}$$

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \omega_0}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k}{\ell_D}\right)^3} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot k^2 \cdot \ell_D^2}},$$

ℓ_D - дибаевская длина.

Т.о. если длина волны меньше дибаевской, то затухание происходит за время порядка периода колебаний. Для длинных волн затухание экспоненциально мало, но частота длинных волн близка к плазменной.