



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Физики»

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ФИЗИКИ:
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ.
ВЕЩЕСТВО В СОСТОЯНИИ ПЛАЗМЫ.
ТЕРМОДИНАМИКА**
Учебное пособие

Авторы
Илясов В.В., Жданова Т.П.

Ростов-на-Дону, 2013



Аннотация

В учебном пособии рассматриваются основы теории электромагнитного поля, используемые в учебных целях для более глубокого понимания электромагнитных процессов, происходящих в веществе. Приводится общая характеристика вещества в состоянии плазмы, даются, в частности, представления о квазинейтральности и разделении заряда, идеальной проводимости и дрейфовом движении. Рассматриваются элементы статистической и феноменологической термодинамики, в частности, приводится основное термодинамическое неравенство, термодинамические потенциалы и их свойства. Даны примеры решения задач и перечень тем контрольной работы.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 150206 «Машины и технология высокоэффективных процессов обработки» и изучающих курс «Концентрированные потоки энергии и физические основы их генерации», при подготовке к практическим занятиям и экзамену, а также при выполнении курсовых и дипломных работ.

Авторы

д.т.н., проф. Илясов В.В.

к.ф-м.н., доцент Жданова Т.П.





Оглавление

Введение	5
1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ	6
1.1. Нахождение векторного поля по его дифференциальным характеристикам.....	6
1.2. Уравнение непрерывности	10
1.3. Электромагнитное поле движущихся зарядов (общий случай)	12
1.4. Система уравнений Максвелла-Лоренца	15
1.5. Ток смещения	17
1.6. Потенциал электромагнитного поля.....	19
1.7. Законы сохранения энергии в электромагнитном поле	23
1.8. Закон сохранения импульса в электромагнитном поле	25
2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ ..	26
2.1. Поле системы зарядов (квазистационарное движение)	26
2.2. Магнитный момент.....	29
2.3. Электромагнитное поле системы произвольно движущихся зарядов. Решение уравнения Даламбера.	30
3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ И РАССЕЙВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН	36
3.1. Распространение электромагнитных волн вдали от излучателя	36
3.2. Поляризация плоской волны	40
3.3. Интерференция и образование волновых пакетов ...	41
3.4. Рассеивание электромагнитных волн свободным и связанным зарядами	44
3.5. Поглощение излучения	47
4. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ....	49
4.1. Движение заряженных частиц в постоянных электрическом и магнитном полях	49
4.2. Функции Лагранжа и Гамильтона для частиц в электромагнитных полях.....	54
5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ	56
5.1. Основные уравнения поля	56



Физика

5.2. Поляризация среды в электрическом поле.....	58
5.3. Средняя плотность тока и средняя плотность заряда в среде.....	59
5.4. Система уравнений для электромагнитного поля в среде.....	61
5.5. Система граничных условий.....	63
5.6. Закон сохранения энергии.....	66
6. ПРОЦЕССЫ В ПЛАЗМЕ ГАЗОВОГО РАЗРЯДА.....	68
6.1. Квазинейтральность и разделение заряда.....	68
6.2. Плазма как сплошная среда.....	70
6.3. Идеальная проводимость и дрейфовое движение....	71
6.4. Проводимость плазмы.....	72
6.5. Кулоновские столкновения.....	74
7. СТАТИЧЕСКАЯ И ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА.....	76
7.1. Основное термодинамическое неравенство.....	76
7.2. Максимальная работа и термодинамические потенциалы.....	78
7.3. Свойства термодинамических потенциалов.....	80
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	84
ТЕМЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ.....	90
ЛИТЕРАТУРА.....	95



ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших задач теоретической физики (ТФ) является применение математических методов исследования к нахождению новых физических закономерностей. Из этого следует, что ТФ формулирует наиболее общие количественные физические законы, отражающие существо возможно более широкого круга явлений.

Следует отметить, что расчетные методы ТФ имеют своеобразный характер. Теоретическая физика не является разделом математики, в ТФ не пытаются найти точные физические законы (так как учет всех возможных влияний сделал бы неразрешимым даже простые задачи). На каждом этапе исследования в ТФ учитывают главные, определяющие связи, пренебрегая побочными. Соотношения в ТФ настолько сложны, что практически всегда приходится идти по пути приближенных расчетов. Для того чтобы уяснить, какие приближения возможны, очень часто приходится исходить из имеющихся опытных данных.



1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1.1. Нахождение векторного поля по его дифференциальным характеристикам

Для описания электромагнитного поля используются его векторные характеристики – напряженности электрического и магнитного полей, в представлениях векторного анализа.

Пусть во всем пространстве имеется векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$. Предположим, что заданы интегральные характеристики поля – поток вектора $\oint a dS$ и циркуляция вектора $\oint a dl$ в каждой точке пространства. Покажем, что если заданы указанные характеристики поля, то может быть найдено и само векторное поле $a(E)$. Если

$$\oint a dS = \int f(r) dV, \quad (1.1)$$

где $\int f(r)$ - известная функция координат, то на основании теоремы Гаусса-Остроградского

$$\oint a dS = \int \text{div } a dV = \int f(r) dV, \quad (1.2)$$

откуда, вследствие произвольности области интегрирования по объему V , получаем

$$\text{div } a = f(r). \quad (1.3)$$

Таким образом, задание потока вектора через замкнутую поверхность в каждой точке пространства эквивалентно заданию дивергенции этого вектора.

На основании теоремы Стокса

$$\oint a dl = \int \text{rot } a dS = \int \varpi(r) dS, \quad (1.4)$$

где $\varpi(r)$ - известная векторная функция координат. Отсюда



$$\operatorname{rot} a = \varpi(r). \quad (1.5)$$

Таким образом, задание циркуляции вектора эквивалентно заданию его ротора.

Покажем, как можно найти векторное поле $a(r)$, если известны дивергенция и ротор вектора \vec{a} во всем пространстве. Разложим поле вектора \vec{a} на два поля: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ так, чтобы имели место соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a}_1 &= f(r), \\ \operatorname{rot} \vec{a}_1 &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{a}_2 &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{a}_2 &= \varpi(r) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Векторное поле \vec{a}_1 является безвихревым, так как линии векторного поля \vec{a}_1 начинаются и заканчиваются в источниках и стоках, интенсивность которых определяется функцией $f(r)$. Векторное поле \vec{a}_2 не имеет источников и стоков и является соленоидальным полем.

Поскольку поле \vec{a}_1 не имеет вихрей, вектор \vec{a}_1 можно представить в виде градиента некоторой вспомогательной скалярной функции

$$\vec{a}_1 = \operatorname{grad} \varphi(r), \quad (1.7)$$

где $\varphi(r)$ - функция, именуемая скалярным потенциалом. Подставляя последнее выражение в соотношение (1.6), находим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = f(r), \quad (1.8)$$

или

$$\Delta \varphi = f(r), \quad (1.9)$$



где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа. Уравнение в

частных производных второго порядка называется уравнением Пуассона. Решение уравнения Пуассона имеет вид

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\vec{r})dV_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(x_0, y_0, z_0)dx_0dy_0dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \quad (1.10)$$

где (x, y, z) - координаты точки, в которой ищется значение функции φ , а x_0, y_0, z_0 - переменные интегрирования. Величина $|\vec{r} - \vec{r}_0|$ представляет расстояние от точки r_0 до точки наблюдения \vec{r} .

Далее, зная функцию $\varphi(\vec{r})$, найдем \vec{a}_1

$$\vec{a}_1(\vec{r}) = \text{grad } \varphi(\vec{r}) = -1/4\pi \text{ grad } \int \frac{f(\vec{r}_0)dV_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (1.11)$$

Определим вектор \vec{a}_2 , поле которого имеет соленоидальный характер. Следовательно, вектор \vec{a}_2 можно представить в виде ротора некоторого вспомогательного вектора $\vec{A}(\vec{r})$:

$$\vec{a}_2 = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}). \quad (1.12)$$

Векторная функция $\vec{A}(\vec{r})$ получила название векторного потенциала. Из определения последнего уравнения следует, что

$$\text{div rot } \vec{A}(\vec{r}) = 0. \quad (1.13)$$

Для полного определения векторного потенциала \vec{A} нужно еще задать значение его дивергенции. Положим



$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (1.14)$$

Подставив в выражение для ротора вектора \vec{a}_2 его выражение (1.12), получим

$$\operatorname{rot} \vec{a}_2 = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{r}) \quad (1.15)$$

Учитывая, что дивергенции вектора \vec{A} равна нулю, получим

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\omega}(\vec{r}) \quad (1.16)$$

или в скалярном виде

$$\begin{aligned} \Delta A_x &= -\omega_x(\vec{r}), \\ \Delta A_y &= -\omega_y(\vec{r}), \\ \Delta A_z &= -\omega_z(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Компоненты векторного потенциала удовлетворяют тем же уравнениям, что и скалярный потенциал φ . Их решение имеют вид

$$A_i = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega_i(\vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0, \quad i = x, y, z. \quad (1.18)$$

Если функции ω_i удовлетворяют тем же условиям на бесконечности, как и функция $f(\vec{r}_0)$ в решении уравнения Пуассона, то интегралы в компонентах векторного потенциала сходятся.

Зная векторный потенциал \vec{A} , можно найти вектор \vec{a}_2 простым дифференцированием:



$$\vec{a}_2(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(r) = \text{rot} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega(r_0)}{|r - r_0|} dV_0. \quad (1.19)$$

Таким образом, векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ полностью определяется по заданным во всем пространстве значениям его дивергенции $f(\vec{r}_0)$ и ротора $\vec{\omega}(\vec{r}_0)$:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \text{grad} \int \frac{f(r_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0 + \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int \frac{\vec{\omega}(\vec{r}_0)}{|r - r_0|} dV_0. \quad (1.20)$$

Поскольку дивергенция и ротор вектора \vec{a} однозначно связаны с потоком и циркуляцией этого вектора, можно утверждать, что векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ полностью определено потоком и циркуляцией этого вектора.

1.2. Уравнение непрерывности

Движение электрических зарядов в пространстве приводит к переносу заряда, именуемому электрическим током. Электрический ток характеризуется вектором плотности тока $\vec{j}(\vec{r}, t)$, определяемым равенством:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (1.21)$$

Вектор плотности тока представляет величину заряда, пересекающего за 1 сек через воображаемую единичную площадку, находящуюся в момент времени t в точке \vec{r} .

Значения функций ρ и \vec{v} не могут быть произвольными и должны удовлетворять закону сохранения заряда.

Рассмотрим замкнутую поверхность, внутри которой помещен заряд $e = \int \rho dV$. Найдем производную $-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$. Здесь интегрирование ведется по объему, заключенному внутри поверхности S в



единицу времени. Поскольку электрические заряды не исчезают и не возникают вновь, убыль заряда в объеме V равна потоку заряда, выходящему за 1 сек через поверхность S . Следовательно, имеем равенство

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \oint \rho \vec{v} d\vec{S}. \quad (1.22)$$

Переходя к интегрированию по объему, получаем

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \int \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV. \quad (1.23)$$

Или

$$-\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV. \quad (1.24)$$

Ввиду произвольности объема интегрирования последнее равенство дает

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.25)$$

Или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (1.26)$$

Эти уравнения, представляющие математическое выражение закона сохранения заряда, носят название уравнений непрерывности.

При стационарных процессах, когда распространение плотности заряда не изменяется во времени, уравнение непрерывности имеет вид

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (1.27)$$

Эти равенства показывают, что при стационарных процессах векторное поле плотности тока имеет соленоидальный характер.

Далее будем пользоваться понятием полного тока I через по-



верхность S вида

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int j_n dS. \quad (1.28)$$

1.3. Электромагнитное поле движущихся зарядов (общий случай)

Опытами Фарадея установлено, что изменение во времени потока вектора \vec{H} через произвольную поверхность S сопровождается появлением электродвижущей силы в контуре (стягивающем эту поверхность)

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{H} d\vec{S}. \quad (1.29)$$

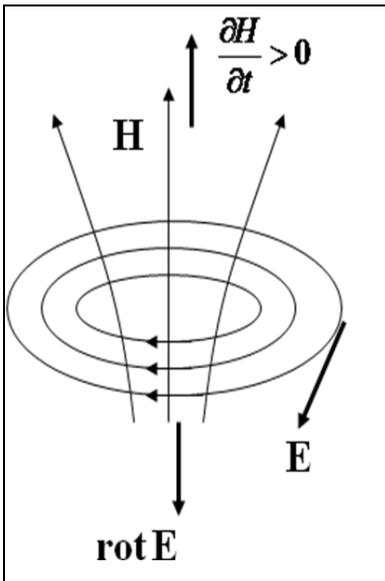


Рис.1

На рис. 1 схематично изображена связь между $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ и электродвижущей силой. Данная формула представляет собой обобщенный закон индукции Фарадея

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}; \quad (1.30)$$

$$\Phi_n = \int \vec{H} d\vec{s}.$$

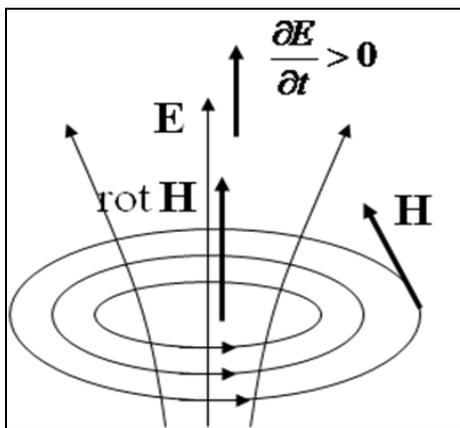
Максвелл высказал гипотезу о том, что наряду с законом Фарадея имеет место соотношение

связь между изменением электрического \vec{E} поля во времени магнитным полем. Именно, при изменении электрического поля во времени



$\frac{\partial}{\partial t} \int \bar{E} d\bar{S}$, в контуре, охватывающем поверхность S , возникает

магнитодвижущая сила $\oint \bar{H} d\bar{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{E} d\bar{S}$.



На рис. 2 схематично изобразим

связь между $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ и магнитодвижущей

силой. Если кривая контура L , по которой вычисляется циркуляция магнитного поля, охватывает контур с электрическим током, то полная магнитодвижущая сила определяется

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = \frac{4\pi}{c} \int j d\bar{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{E} d\bar{S}$$

(1.31)

Рис. 2.

От интегральных характеристик полей \bar{E} и \bar{H} перейдем к дифференциальным характеристикам. Применим теорему Стокса к уравнению (1.30). Получим

$$\int \text{rot} \bar{E} d\bar{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{H} d\bar{S} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} d\bar{S} \quad (1.32)$$

Ввиду произвольности поверхности интегрирования вытекает равенство (1-е уравнение Максвелла)

$$\text{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t},$$

т.е. электрическое поле имеет вихревой характер. Значение вихря



вектора \bar{E} в данной точке определяет производная $\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$.

Преобразуя уравнение (1.31) аналогично получим

$$\int \text{rot} \bar{H} d\bar{S} = \frac{4\pi}{c} \int j d\bar{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{E} d\bar{S} \quad (1.33)$$

Это равенство должно выполняться для любых площадей. Это возможно в случае, если подынтегральные выражения левых и правых частей равны. Данное равенство составляет 3-е уравнение Максвелла

$$\text{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.$$

Отсюда следует, что вихри магнитного поля в каждой точке пространства определяются плотностью тока зарядов j и изменением электрического поля во времени.

Для однозначного определения полей должны быть заданы дивергенции электрических и магнитных полей. Используем 3-е уравнение Максвелла, применим операцию дивергенцию к левой и правой частям. Получим

$$\text{div rot } \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \text{div } j + \frac{1}{c} \text{div } \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

или

$$\text{div rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \text{div } j + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \bar{E}. \quad (1.34)$$

С помощью уравнения непрерывности данное уравнение может быть преобразовано к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \bar{E} - 4\pi\rho) = 0$$

Отсюда получим 2-е уравнение Максвелла:

$$\text{div} \bar{E} = 4\pi\rho. \quad (1.35)$$



Дивергенция электрического поля как в стационарных так и в нестационарных полях определяется данной формулой.

Аналогично применяя операцию div к первому уравнению Максвелла, получим:

$$div \operatorname{rot} \bar{E} = - \frac{1}{c} div \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} . \quad (1.36)$$

Отсюда получим 4-е уравнение Максвелла:

$$div \bar{H} = 0$$

Таким образом, магнитное поле в стационарных и нестационарных полях имеет чисто вихревой характер. Магнитных зарядов, на которых начинается и заканчивается линии магнитного поля не существует.

1.4. Система уравнений Максвелла-Лоренца

Полученная нами ранее система уравнений установлена Максвеллом в 1873 году для общего случая электромагнитных полей в материальных средах. Лоренц в 1895 году сформулировал систему уравнений для системы зарядов, движущихся в вакууме. Выпишем уравнения Максвелла:

Дифференциальная форма:

Интегральная форма:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \bar{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \bar{H} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \oint \bar{E} d\bar{l} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{H} d\bar{S} \\ \oint \bar{H} d\bar{S} = 0 \end{array} \right. \quad (1.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \bar{E} = 4\pi\rho \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \oint \bar{H} d\bar{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{E} d\bar{S} \\ \oint \bar{E} d\bar{S} = 4\pi \cdot e \end{array} \right.$$



Первое уравнение (первая строка 1.37) устанавливает, что изменение во времени магнитного поля порождает вихревое электрическое поле.

Второе уравнение (вторая строка 1.37) показывает, что магнитное поле имеет соленоидальный характер и линии магнитного поля либо замкнуты, либо уходят в бесконечность.

Из третьего уравнения (третья строка 1.37) следует, что вихревое магнитное поле создается при движении зарядов и при изменении во времени электрического поля. По аналогии с электрическим полем величину $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ называют током смещения, а сумму

обоих членов называют полным током.

Четвертое уравнение (четвертая строка 1.37) показывает, что источниками электрического поля служат электрические заряды.

Отметим, что при заданном распределении плотностей зарядов и токов уравнения Максвелла полностью определяют электрическое $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и магнитное $\vec{H}(\vec{r}, t)$ поля.

Лоренц учел распределение зарядов и характер их движения в пространстве. Плотность заряда и плотность тока (скорость движения зарядов) связаны между собой законом сохранения заряда (1.26). На движущиеся заряды в электромагнитном поле действует сила Лоренца. Уравнения движения заряда можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int p_0 dV = \int \rho (\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{H}]) dV \quad (1.38)$$

$$\frac{dp_0}{dt} = \rho (\vec{E} + [\vec{v} \vec{H}]) \quad (1.39)$$

где p_0 - импульс заряженной частицы в единице объема. Система уравнений (1.38, 1.39) записана для непрерывно распределенных зарядов в случае, когда сила Лоренца заменена плотностью силы (т.е. силой, отнесенной к единице объема)

Отметим, что уравнения поля были первоначально сформулированы для электромагнитных процессов в веществе. Лоренц установил их применимость к системе, состоящей из поля и зарядов, и дополнил уравнением движения последних. Поэтому полную систему уравнений (1.37- 1.39) называют уравнениями Максвелла-Лоренца. Последние включают в себе полное описание поведения системы, состоящей из поля и зарядов. Область применимости уравнений Максвелла-Лоренца чрезвычайно высока.



1.5. Ток смещения

Ток $I_{пр}$ связан с характеристиками электрического поля конденсатора, как показано на рис.3, поэтому Максвелл предположил, что разрыв цепи замыкается током смещения $I_{см}$, который равен току проводимости $I_{пр}$

В отличие от электрического тока полный ток смещения

$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ не связан с движением каких-либо зарядов. Введем ток смещения на основе формальных рассуждений.

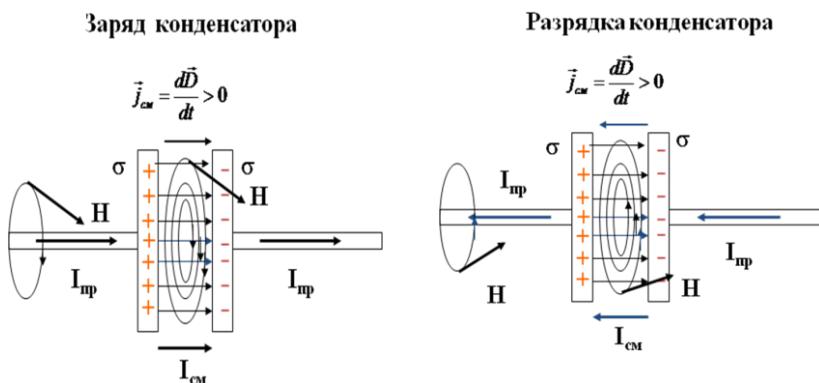


Рис.3.

Найдем обобщение закона

$$rot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} , \tag{1.38}$$

такое чтобы оно не противоречило закону сохранения заряда

$$rot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{c}) \tag{1.39}$$

где \vec{c} – неизвестный вектор.



Применим операцию дивергенция к обеим частям и получим:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} (\operatorname{div} \bar{j} + \operatorname{div} \bar{c}).$$

Левая часть уравнения равна нулю, тогда получим

$$\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} (\bar{j} + \bar{c}) = 0.$$

Отсюда получим уравнение вида

$$\operatorname{div} (\bar{j} + \bar{c}) = 0 \tag{1.40}$$

Неизвестный вектор \bar{c} дополняет плотность тока \bar{j} так, чтобы суммарная величина $(\bar{j} + \bar{c})$ обладала бы свойствами соленоидального вектора, имеющего замкнутые силовые линии.

Определим явный вид вектора \bar{c} . Для этого преобразуем уравнение (1.40), с использованием уравнения непрерывности (1.26), к следующему виду

$$\operatorname{div} \bar{c} = -\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Далее выразим из 2-го уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \bar{E} = 4\pi \rho$$

объемную плотность заряда

$$\rho = \frac{\operatorname{div} \bar{E}}{4\pi},$$

которую подставим в предыдущее уравнение. Получим

$$\operatorname{div} \bar{c} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{E} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.$$



Отсюда следует, что сам вектор \bar{c} равен

$$\bar{c} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.$$

Гениальная идея Максвелла заключалась в том, что между электрическим и магнитным полями существует глубокая симметрия и взаимосвязь. Эта симметрия была подчеркнута нами при рассмотрении свойств уравнений Максвелла.

Таким образом, получаем

$$\text{rot } \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \quad (1.41)$$

Отметим, что ротор вектора \bar{H} определяется быстротой изменения вектора \bar{E} , тогда как, согласно закону индукции Фарадея (1.32), ротор вектора \bar{E} определяется быстротой изменения вектора \bar{H} .

1.6. Потенциал электромагнитного поля

Для нахождения стационарного векторного поля по заданным в каждой точке пространства значениям дивергенции и ротора необходимо ввести \bar{A} – векторный и φ - скалярный потенциалы.

Вектор магнитного поля всегда является соленоидальным и его дивергенция равна нулю. Поэтому положим, что

$$\bar{H} = \text{rot } \bar{A}, \quad (1.42)$$

где вектор - потенциал $\bar{A}(\bar{r}, t)$ является функцией координат и времени.

Из уравнений Максвелла следует, что



$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{H} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{A} = 0 \\ \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.43)$$

Преобразуем последнее уравнение к виду

$$\operatorname{rot} \left(\bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Откуда следует, что величина $\bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$ является потенциальным вектором и может быть представлена в виде

$$\bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi \quad , \quad (1.44)$$

где φ — функция координат и времени называется скалярным потенциалом $\varphi(\bar{r}, t)$.

Вектор электрического поля имеет вихревой характер и выражается через совокупность скалярного и векторного потенциалов

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \quad . \quad (1.45)$$

Для определения потенциалов \bar{A} и φ используем 3-е уравнение Максвелла (1.41), в которое вместо вектора \bar{H} (1.42) и вектора \bar{E} (1.45) подставим найденные выражения. Получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \bar{j}$$

или

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \Delta \bar{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \bar{j}.$$



Преобразуем данное уравнение с использованием правил векторного анализа к виду

$$\Delta \bar{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \bar{j} + \text{grad} \left(\text{div} \bar{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \quad (1.46)$$

Из 2-го уравнения Максвелла(1.35), с использованием уравнения (1.45), получим:

$$\text{div grad} \varphi = -4\pi \rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \bar{A} .$$

С использованием правил векторного анализа преобразуем это уравнение к виду

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \bar{A} . \quad (1.47)$$

Введем дивергенцию вектора \bar{A} уравнением

$$\text{div} \bar{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (1.48)$$

Это есть уравнение Лоренца. С использованием уравнения Лоренца уравнения (1.46) и (1.47) могут быть преобразованы к следующему виду

$$\begin{cases} \Delta \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \bar{j} \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho \end{cases} . \quad (1.49)$$

Полученные уравнения эквивалентны исходным уравнениям Максвелла. Если заданы распределения зарядов $\rho(\bar{r}, t)$ и токов $\bar{j}(\bar{r}, t)$, удовлетворяющие уравнению непрерывности, то инте-



рирование уравнений последней системы позволяет найти векторный и скалярный потенциалы.

Уравнение типа

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \psi(\bar{r}, t), \quad (1.50a)$$

где $\psi(\bar{r}, t)$ - функция координат времени, называется уравнением Даламбера, которое может быть записано в компактном виде

$$\Delta\varphi = \psi(\bar{r}, t). \quad (1.50b)$$

В частных случаях:

1) при $\psi(\bar{r}, t) = 0$, уравнение Даламбера преобразуется в волновое уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0; \quad (1.51a)$$

2) при $\psi(r)$ и $\varphi(r)$ не зависящих от времени, уравнение (1.50a) преобразуется в уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = \psi(r). \quad (1.51b)$$

С математической точки зрения полученные уравнения 2-го порядка преобразуются в уравнение Пуассона, Даламбера и волновое уравнения, - которые оказываются проще, чем исходные уравнения Максвелла в частных производных 1-го порядка. Именно по этой причине исследования свойств электромагнитных полей целесообразно использовать потенциалы \vec{A} и φ и поэтому метод потенциалов представляет основной расчетный аппарат теории поля.



1.7. Законы сохранения энергии в электромагнитном поле

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из поля и зарядов (равномерно распределенных в пространстве). Найдем работу W , совершаемую силами поля над зарядами, отнеся ее к единице времени

$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{F} \cdot \vec{v} dV = \int \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV. \quad (1.52)$$

С использованием 3-го уравнения Максвелла (1.41) это уравнение примет вид (если выразить j через векторы поля)

$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{j} \vec{E} dV = \frac{c}{4\pi} \int \vec{E} \text{rot} \vec{H} dV - \frac{1}{4\pi} \int \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV. \quad (1.53)$$

В силу симметрии между электрическим и магнитным полями добавим в правую часть слагаемое

$$- \frac{c}{4\pi} \int \vec{H} \left(\text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dV, \quad (1.54)$$

которое в силу 1-го уравнения Максвелла равно нулю.

Это дает возможность представить уравнение (1.53) в следующем виде

$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \frac{c}{4\pi} \int (\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E}) dV - \int \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) dV. \quad (1.55)$$

Первый интеграл в правой части данного уравнения может быть преобразован к поверхностному:

$$\int (\vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E}) dV = - \int \text{div} [\vec{E} \vec{H}] dV = - \oint [\vec{E} \vec{H}] d\vec{S}.$$

Тогда выражение (1.55) имеет вид



$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV = - \frac{c}{4\pi} \oint [\vec{E}\vec{H}] d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV. \quad (1.56)$$

При возрастании объема интегрирования V до бесконечности, если векторы \vec{E} и \vec{H} стремятся к 0 при $r \rightarrow \infty$ быстрее, чем по закону $\frac{1}{r}$, то поверхностный интеграл превращается в нуль. Тогда уравнение(1.56) превращается в равенство:

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{d}{dt} \int u_0 dV, \quad (1.57)$$

где величину $u_0 = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$ называют плотностью энергии

электромагнитного поля.

Так как в левой части стоит работа, произведенная за 1 секунду, то правая часть представляет убыль энергии поля в единицу времени.

Для конечного объема V , ограниченного поверхностью S , уравнение (1.56) выражает закон сохранения энергии. Оно показывает, что убыль энергии поля в единицу времени в некотором объеме V равна работе сил поля над зарядами, (заключенными в том же объеме) и потоку энергии, вытекающему через замкнутую поверхность S . Отметим, что

поток энергии электромагнитного поля принято характеризовать вектором Умова - Пойтинга:

$$\vec{\sigma} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}]. \quad (1.58)$$

Запишем закон сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \text{div} \vec{\sigma} \quad (1.59)$$

В левой части уравнения стоит изменение энергии поля единицы



объема, а в правой части - работа, произведенная над зарядами (находящимися в этом объеме), а также дивергенция потока, сохраняющейся величины (плотности энергии).

1.8. Закон сохранения импульса в электромагнитном поле

Наряду с плотностью энергии электромагнитное поле обладает и плотностью импульса.

Рассмотрим изменение импульса частиц, находящихся в объеме V . Вычисления производятся аналогично выводу закона сохранения энергии на основе уравнения Лоренца (1.39). В итоге получим

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int [\overline{EH}] dV, \quad (1.60)$$

где \bar{P} - полный импульс заряженных частиц.

При переходе к бесконечному объему получим следующее выражение

$$\bar{P} + \frac{1}{4\pi c} \int [\overline{EH}] dV = const \quad (1.61)$$

Данная формула показывает, что суммарный импульс замкнутой системы (состоящей из поля и частиц) сохраняется. Величина

$$\bar{g} = \frac{1}{4\pi c} [\overline{EH}]$$

представляет плотность импульса электромагнитного поля (единицы объема).

При взаимодействии поля и частиц наряду с законом сохранения суммарной энергии (1.56) имеет место закон сохранения суммарного импульса. Передача импульса частицам сопровождается уменьшением импульса поля. Потеря импульса частицы (например, при излучении) приводит к увеличению импульса поля.

Подтверждение существования импульса поля впервые было обнаружено в 1901 году П.Н.Лебедевым, наблюдавшим экспериментально световое давление.



2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

Самым простым примером электромагнитного поля является поле неподвижных зарядов. Следующим по степени сложности является случай поля зарядов, совершающих медленное, квазистационарное движение. Медленным мы будем называть движение со скоростями $|\vec{v}|$, малыми по сравнению с величиной «с», которая является единственной характерной величиной размерности скорости, содержащейся в уравнениях Максвелла. Величина $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ - это

скорость распространения в пространстве всех электромагнитных взаимодействий.

2.1. Поле системы зарядов (квазистационарное движение)

Будем рассматривать медленное (квазистационарное) движение системы зарядов со скоростями \vec{v} малыми по сравнению со скоростью света c .

При медленном движении зарядов с учетом того, что изменение плотности заряда во времени будет малым, и можно предположить, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad . \quad (2.1)$$

Из уравнения непрерывности (1.26) следует, что

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad . \quad (2.2)$$

Следовательно, вектор плотности имеет соленоидальный характер, т.е. траектории движения зарядов можно представить в виде некоторых замкнутых трубок или нитей.

Подчеркнём, что условие квазистационарности имеет вид



$$T \gg \frac{L}{c}, \quad (2.3,а)$$

где T – характерный период движения; L – средние размеры системы зарядов.

Или эквивалентное ему равенство

$$c \gg \frac{L}{T} \approx v \quad (2.3,б)$$

где величину $v \approx \frac{L}{T}$ можно интерпретировать как характерную скорость движения зарядов в системе.

Электромагнитные поля, для которых справедливо неравенство (2.3) и в которых можно пренебречь током смещения в силу его малости, носят название квазистационарных полей.

Для квазистационарных полей уравнения Максвелла имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{j}; \\ \text{div} \bar{H} = 0; \\ \text{rot} \bar{E} = 0; \\ \text{div} \bar{E} = 4\pi \rho / \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Таким образом, система уравнения Максвелла распалась на уравнения для независимых полей: магнитного поля токов и электрического поля зарядов.

Введем векторный потенциал \bar{A} и соотношение Лоренца, Поскольку зависимостью плотности заряда ρ и токов \bar{j} от времени можно пренебречь, то векторный потенциал \bar{A} и соотношение Лоренца принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{A} = -\frac{4\pi}{c} \bar{j} \\ \text{div} \bar{A} = 0 \end{array} \right. . \quad (2.5)$$



Решение уравнения для векторного потенциала \bar{A} (2.5) имеет вид

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{j}'(\bar{r}') dV'}{R} \quad , \quad (2.6)$$

где $\bar{j}'(\bar{r}')$ – плотность тока в точке \bar{r}' ; $R = |\bar{r} - \bar{r}'|$ – расстояние от этой точки до точки наблюдения, в которой ищется значение векторного потенциала.

Зная векторный потенциал можно найти напряженность магнитного поля:

$$\bar{H} = \frac{1}{c} \text{rot} \int \frac{\bar{j} dV'}{R} = \frac{1}{c} \int \text{rot} \left(\frac{\bar{j} dV'}{R} \right) \quad (2.7)$$

При дифференцировании по координатам « \mathbf{r} » плотность тока $\bar{j}(\bar{r}')$ должна считаться постоянной. Тогда с использованием формул векторного анализа получим

$$\text{rot} \frac{\bar{j}}{R} = \left[\text{grad} \frac{1}{R}, \bar{j} \right] = \frac{[\bar{j}R]}{R^3} \quad .$$

Наконец, с учетом последней формулы напряженность магнитного поля может быть определена, как

$$\bar{H} = \frac{1}{c} \int \frac{[\bar{j}R]}{R^3} dV' \quad (2.8)$$

Эта формула носит название закона Био - Савара (в системе единиц Гаусса) и дает принципиальное решение поставленной задачи. Однако вычисление интеграла в формуле (2.8) достаточно сложно и может быть проведено до конца только для некоторых простейших систем.



2.2. Магнитный момент

Прежде всего отметим, что значение магнитного момента не зависит от выбора начала координат. Магнитный момент, подобно дипольному моменту нейтральной системы зарядов, представляет величину, зависящую только от физических свойств системы. Для случая, когда заряды движутся по одной трубке, магнитный момент может быть записан следующим образом

$$\bar{M} = \frac{1}{2c} \int dI [\bar{r}' d\bar{l}] = \frac{I}{c} \frac{1}{2} \int [\bar{r}' d\bar{l}] \quad . \quad (2.9)$$

Величина $\frac{1}{2} [\bar{r}' d\bar{l}]$ представляет собой вектор площади. Интеграл

$S = \int \frac{[\bar{r}' d\bar{l}]}{2}$ представляет площадь боковой поверхности конуса,

опирающегося на контур с током.

В частном случае плоского замкнутого контура за \bar{S} можно выбрать вектор нормали к площади контура, умноженный на величину площади. Тогда можно записать:

$$\bar{M} = \frac{I\bar{S}}{c} .$$

Эта формула допускает наглядную интерпретацию, а именно, всякий замкнутый ток обладает магнитным моментом, пропорциональным величине тока.

Перепишем уравнение для магнитного момента (2.9), выразив плотность тока через скорость движения зарядов. Получим

$$\bar{M} = \frac{1}{2c} \int [\bar{r}', \rho \cdot \bar{v}] dV' = \frac{1}{2c} \sum [\bar{r}', e \cdot \bar{v}_i] , \quad (2.10)$$

где суммирование ведется по всем зарядам системы.

Обобщим это уравнение на случай одинаковых или разных частиц, но обладающих одинаковым значением удельного заряда $\frac{e}{m}$.

Преобразуем уравнение (2.10) к виду



$$\bar{M} = \frac{1}{2c} \sum \frac{e_i}{m_i} [\bar{r}'_i, m_i \bar{v}_i] = \frac{e}{2mc} \sum [\bar{r}'_i, \bar{P}_i] = \frac{e}{2mc} \bar{L}, \quad (2.11)$$

где \bar{L} – механический момент системы. Данная формула показывает, что для системы частиц с постоянным значением $\frac{e}{m}$ между магнитным и механическим моментом систем существует прямая пропорциональность.

2.3. Электромагнитное поле системы произвольно движущихся зарядов. Решение уравнения Даламбера.

Рассмотрим систему зарядов, совершающих произвольное движение в некотором объеме V' . Распределение и движение зарядов в этом будем характеризовать плотностью заряда $\rho(\bar{r}, t)$ и плотностью тока $\bar{j}(\bar{r}, t)$ при $-\infty < t < +\infty$.

Уравнение для электромагнитных потенциалов имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi(\bar{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(\bar{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi \rho(\bar{r}, t); \\ \Delta \bar{A}(\bar{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}(\bar{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \bar{j}(\bar{r}, t); \\ \operatorname{div} \bar{A}(\bar{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\bar{r}, t)}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Для решения системы уравнений поля (2.12) воспользуемся простым методом, основанным на использовании принципа суперпозиции. Разобьем всю систему на совокупность малых зарядов

$\delta e_i = \rho(\bar{r}, t) \delta V_i'$, где $\delta V_i'$ – как угодно малый объем в области V' .



Будем искать в некоторой точке наблюдения N потенциал поля создаваемого зарядом δe_i . Полное поле на основании принципа суперпозиции, представляет сумму полей, создаваемых всеми зарядами δe_i , входящими в систему. Во всех точках пространства вне объема

δV_i плотность заряда, согласно нашему представлению, равна нулю.

Поэтому вне объема δV_i уравнения для потенциалов электромагнитного поля приобретает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0; \\ \Delta \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0; \\ \operatorname{div} \bar{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \end{array} \right. \quad (2.13)$$

введем сферические координаты с началом координат, помещенным в объеме δV_i , и используем выражение оператора Лапласа в сферических координатах, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\bar{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Таким образом, скалярный потенциал и все компоненты векторного потенциала \bar{A} определяются уравнением одного типа



$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot f) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (2.15)$$

которое носит название волнового уравнения.

Интегрирование волнового уравнения проще всего произвести методом Даламбера, который заключается в сведении уравнения в частных производных типа (2.15) к уравнению со смешанной второй производной. Перепишем уравнение (2.15) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot f) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (r \cdot f) = 0$$

Введем новую неизвестную функцию $\psi = r \cdot f$, что всегда возможно, поскольку $r \neq 0$, вне объема δV_i . Тогда получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.16)$$

Перейдем в уравнении (2.16) к новым переменным:

$$\xi = t - \frac{r}{c}; \quad r = t + \frac{r}{c}.$$

В новых переменных уравнение (2.16) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.17)$$

Это уравнение, содержащее лишь смешанную производную, интегрируется непосредственно. Очевидно, что оно удовлетворяется любыми функциями $\psi_1(\xi)$ и $\psi_2(\eta)$ одной переменной ξ или η .

Общее решение уравнения (2.17) ищем в виде



$$\psi(\xi, \eta) = \psi_1(\xi) + \psi_2(\eta) \quad (2.18)$$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$\psi(r, t) = \psi_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + \psi_2\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

Найденное решение имеет простой смысл. Значение функции ψ_1 в точке $(r + c)$ и в момент времени $(t + 1)$ совпадают со значением функции в точке R в момент времени t . Это обозначает, что первое слагаемое описывает волновой процесс, распространённый в сторону возрастания значений R , а второе слагаемое есть волна, распространяющаяся от больших R к началу координат. Для функции f имеем

$$f = \frac{\psi_1\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{\psi_2\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} . \quad (2.19)$$

Формула (2.19), дающая общее решение уравнения (2.15), представляет наложение двух волн, а именно совокупность расходящейся и сходящейся сферических волн.

Скалярный потенциал φ и компонента векторного потенциала \bar{A} могут быть представлены аналогично, в виде формулы (2.19). Анализ частных решений позволяет выяснить смысл полученных решений (2.19). Для конкретности напишем уравнение для скалярного потенциала расходящейся сферической волны

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} \left(t - \frac{r}{c} \right) . \quad (2.20)$$



При произвольном виде функции φ_1 формула (2.20) дает частное решение уравнения (2.13,а) в области пространства вне объема δV_i . Потребуем, чтобы (2.20) непрерывно переходило в решение уравнения (2.13.а) вблизи объема $\delta V_i'$, т.е. вблизи места расположения заряда $\delta e_i(t)$. Записав (2.20) в виде

$$d\varphi_i(r, t) = \frac{\rho\left(t - \frac{r}{c}\right) \delta V_i}{r}, \quad (2.21)$$

мы приходим к потенциалу поля, создаваемому зарядом $\delta e_i(t)$.

Формула (2.21) показывает, что потенциал в точке наблюдения, находящейся на расстоянии r от начала координат в момент времени t , определяется значением заряда в предыдущий момент времени

$\tau = t - \frac{r}{c}$. Потенциал (2.21) поэтому называется запаздывающим

потенциалом, а величина $\frac{r}{c}$ - временем запаздывания. Время

запаздывания представляет промежуток времени, в течение которого электромагнитное поле, распространяющееся со скоростью света, проходит путь \bar{r} .

Вводя начало координат в некоторой точке O , расположенной в объеме V' , и интегрируя выражение (2.21) по всем зарядам системы, приходим к следующему выражению для потенциала поля, создаваемого в точке наблюдения N :

$$\varphi(\bar{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\bar{r}', t - \frac{R}{c}\right) dV'}{R} = \int \frac{\rho(\bar{r}', \tau) dV'}{R}, \quad (2.22)$$

где $\tau = t - \frac{R}{c}$, $\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$.

Не останавливаясь здесь на подробном анализе частных



решений(их можно найти в цитируемой литературе [2]) подытожим их важным выводом: система зарядов, начавших в момент времени $t = 0$ двигаться нестационарным образом, создает в окружающем пространстве электромагнитное поле, потенциалы которого имеют характер запаздывающих потенциалов. Потенциалы поля имеют характер сферических волн, исходящих от системы и распространяющихся в вакууме со скоростью света.

Мы будем говорить, что система нестационарно двигающихся зарядов излучает электромагнитные волны, и кратко называть её излучателем.

Решение уравнений электромагнитного поля в виде запаздывающих потенциалов имеет большое принципиальное значение. Оно отвечает определенной системе представлений о характере причинной связи, которая отличается от представлений классической механики. Подробности можно найти в работе [2].



3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ И РАССЕЙВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

3.1. Распространение электромагнитных волн вдали от излучателя

Общие формулы для потенциалов, полученные выше сложны. Не удается получить точных выражений для конкретных задач с помощью общих формул, например (2.22).

Однако, если точка наблюдения находится достаточно далеко от системы движущихся зарядов, то возможно упрощения, которые подробно изложены в [2].

В теории излучения электромагнитного поля показывается, что потенциалы электромагнитного поля вдали от излучения могут быть представлены в виде [2]:

$$\begin{cases} \varphi(\bar{r}, t) = \frac{\bar{n} \dot{\bar{d}}(\tau_0)}{c r}; \\ \bar{A}(\bar{r}, t) = \frac{\dot{\bar{d}}(\tau_0)}{c r}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\bar{n} = \frac{\bar{r}}{r}$, $\tau_0 = t - \frac{r}{c}$, $\bar{d} = \int \rho \cdot \bar{r}' \cdot dV'$ - дипольный момент

системы, $\dot{\bar{d}}(\tau_0)$ - производная дипольного момента по времени,

взятая в момент времени τ_0 . Следовательно, потенциалы поля вдали

от системы определяются значением производной по времени от её дипольного момента. Такое приближение при вычислении потенциалов называется дипольным приближением. Условием его применимости является выполнение неравенства $v \ll c$.

Зная распределение потенциалов, можно найти значения напряженности магнитного и электрического полей. Имеем



$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{c} \text{rot } \frac{\dot{\vec{d}}(\tau_0)}{r}.$$

При вычислении ротора вдали от излучателя следует проводить дифференцирование по координатам вдали от излучателя, полагая, что величину $\frac{1}{r}$ можно считать постоянной.

Тогда формулы для напряженности магнитного и электрического полей могут быть представлены следующим образом

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{c^2 r} \left[\ddot{\vec{d}\vec{n}} \right] \\ \vec{E} &= \frac{1}{c^2 r} \left[\left[\ddot{\vec{d}\vec{n}} \right] \vec{n} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из сравнения этих формул следует, что векторы \vec{H} и \vec{E} связаны между собой соотношением

$$\vec{E} = \left[\vec{H} \cdot \vec{n} \right].$$

Рассмотрим более общий случай излучения системой движущихся зарядов. Можно считать, что плотность тока в системе и плотность заряда допускают разложение в интеграл Фурье. Тогда, разлагая в интеграл Фурье потенциалы поля и, подставляя эти разложения в уравнение (2.6), находим компоненты Фурье вектора-потенциала и скалярного потенциала. Таким образом, можно найти поле излучающей системы.

Выражения для электромагнитных полей в монохроматических волнах вдали от излучающей системы имеют вид [2]

$$\vec{H} = \frac{k^2}{r} \left[\vec{n} \vec{d}_0 \right] \cdot e^{i(\omega t - kr)} \quad (3.3a)$$

$$\vec{E} = \frac{k^2}{r} \left[\left[\vec{n} \vec{d}_0 \right] \vec{n} \right] \cdot e^{i(\omega t - kr)} \quad (3.36)$$



Перейдем в последних формулах к пределу, считая расстояние до системы зарядов настолько большим, что можно пренебречь различием в направлении векторов \vec{r}_0, \vec{n} (\vec{r}_0 – единичный вектор, направленный из начала координат в точку наблюдения, \vec{n} – единичный вектор, направленный от излучателя к точке наблюдения). Тогда

$$\vec{H} = \frac{w^2}{c^2} \frac{1}{r} [\vec{n} \vec{d}_0] \cdot e^{iw(t - \frac{r\vec{n}}{c})} \quad (3.4a)$$

$$\vec{E} = \frac{w^2}{c^2} \frac{1}{r} [\vec{n} \vec{d}_0] \vec{n} \cdot e^{iw(t - \frac{r\vec{n}}{c})} \quad (3.4b)$$

При бесконечно большом расстоянии от начала координат r изменение функции $\frac{1}{r}$ можно считать происходящим весьма медленно и

положить $\frac{1}{r} = const$. Тогда

$$\begin{cases} \vec{H} = \vec{H}_0 e^{iw(t - \frac{r\vec{n}}{c})} \\ \vec{E} = \vec{E}_0 e^{iw(t - \frac{r\vec{n}}{c})} \end{cases} \quad (3.5)$$

где \vec{E}_0, \vec{H}_0 – постоянные в пространстве и во времени величины.

Введем волновой вектор, $\vec{k} = \frac{w\vec{n}}{c}$, который по абсолютной величине равен:

$$k = \frac{w}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.6)$$

где w - круговая частота, λ - длина волны.

Перепишем уравнения



$$\begin{cases} \bar{E} = \bar{E}_0 e^{i(wt - \bar{k}\bar{r})} \\ \bar{H} = \bar{H}_0 e^{i(wt - \bar{k}\bar{r})} \end{cases} \quad (3.7)$$

В формулах (3.7) подразумевается, что в окончательных выражениях следует брать вещественную часть. Амплитуды же \bar{E}_0, \bar{H}_0 направлены перпендикулярно друг к другу и к вектору \bar{k} . Векторы \bar{E} и \bar{H} представляют плоские монохроматические волны: плоскости $\bar{k} \cdot \bar{r} = const$ являются поверхностями равной фазы. На большом расстоянии некоторую область сферы можно считать плоской поверхностью. Если направление распространения совпадает с осью x , то формулы напряженности примут вид:

$$\begin{cases} \bar{E} = \bar{E}_0 e^{i(wt - kx)} \\ \bar{H} = \bar{H}_0 e^{i(wt - kx)} \end{cases} \quad (3.8)$$

Данные уравнения описывают плоские волны, распространяющиеся с фазовой скоростью $v = \frac{w}{k} = c$ в положительном направлении x .

Вычислим вектор Умова - Пойтинга в плоской волне:

$$\bar{\sigma} = \frac{c}{4\pi} [\bar{E}\bar{H}] = \bar{n}c \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = \bar{n}cu_0.$$

В плоской волне он оказывается постоянным и равным потоку энергии, движущемуся со скоростью света. Импульс плоской электромагнитной волны равен:

$$\bar{g} = \frac{\sigma}{c^2} = \bar{n} \frac{u_0}{c}. \quad (3.9)$$



3.2. Поляризация плоской волны

Рассмотрим подробнее, как происходит изменение векторов напряженности полей в плоской монохроматической волне. Перейдем от комплексной формы записи к вещественным выражениям. Пусть в плоской монохроматической волне колебания векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 будут взаимно перпендикулярными. Выбрав за направление распространения волны ось x , направим вектор \vec{E}_1 по оси y , то вектор \vec{E}_2 будет ориентирован по оси z .

Получим:

$$\begin{cases} E_y = E_1 \cos(\omega t - kx + \alpha) \\ E_z = E_2 \sin(\omega t - kx + \alpha) \end{cases} , \quad (3.10)$$

где \vec{E}_1 и \vec{E}_2 называются амплитудами, а величина $\Psi = \omega t - kx + \alpha$ есть фаза волны. Исключив фазу, получили формулу

$$\frac{E_y}{E_1} + \frac{E_z}{E_2} = 1 . \quad (3.11)$$

Выражение связывает между собой значения компонент вектора \vec{E} в плоской волне. Очевидно, что в данной плоскости $x = \text{const}$ вектор \vec{E} , вращается в плоскости (yz) так, что его конец описывает эллипс. Уравнение (3.11) представляет уравнение этого эллипса. Поскольку распространение электромагнитных волн проходит в направлении единичного вектора \vec{n} можно наглядно представить себе изменение вектора \vec{E} в пространстве и во времени, как движение конца вектора \vec{E} по эллиптической спирали, навитой на линию \vec{n} . При этом шаг спирали определяется соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} .$$

Аналогично можно представить компоненты напряженности магнитного поля, что мы рекомендуем сделать самостоятельно.



Волны, в которых \vec{E} и \vec{H} вращаются по эллипсу, называются эллиптически поляризованными, при вращении их по окружности - поляризованными по кругу.

Направление вращения вектора \vec{E} определяется фазой. Если вращение происходит по часовой стрелке для наблюдателя смотрящего по направлению распространения волны, то такая волна имеет положительную спиральность ($\alpha = -\pi/2$).

Если один из векторов \vec{E}_1 или \vec{E}_2 равен нулю, изменение \vec{E} и \vec{H} происходит во взаимно перпендикулярных плоскостях. Такие волны называются поляризованными в плоскости. В настоящее время, принято считать, что плоскостью поляризации называют плоскость, в которой колеблется вектор \vec{E} (световой вектор).

3.3. Интерференция и образование волновых пакетов

Рассмотренная выше монохроматическая плоская волна являлась лишь идеализацией реальных электромагнитных волн: с одной стороны, монохроматическая плоская волна, являющаяся процессом строго периодическим в пространстве и во времени, должна, очевидно, иметь бесконечно большую протяженность в пространстве и бесконечно большую длительность во времени; с другой стороны, не существует строго монохроматических излучателей. Поэтому для описания реальных волновых процессов необходимо рассмотреть результат наложения или интерференции различных плоских монохроматических волн. Пусть их частоты изменяются в узком интервале:

$$w_0 - \Delta w \leq w \leq w_0 + \Delta w,$$

где w_0 , именуемая несущей частотой удовлетворяет условию $w_0 \gg \Delta w$.

Для напряженности электрического (или магнитного) поля можно записать



Физика

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i(\omega t - kx)} d\omega.$$

Введем переменную интегрирования: $u = \omega - \omega_0$ и, полагая, что волновое число k есть некоторая функция частоты, получим после интегрирования следующий результат: наложение спектра волн с частотами, лежащими в узком интервале $2\Delta\omega$ вокруг несущей частоты ω_0 , приводит к появлению волны с частотой ω_0 и волновым числом k , но с модулированной амплитудой

$$A = 2\bar{E}_0 \frac{\sin \Delta\omega \left(x - v_g t \right)}{x - v_g t}, \quad (3.12)$$

где $v_g = \left(\frac{d\omega_0}{dk} \right)$. Модулированная амплитуда имеет резкий

главный максимум и ряд побочных максимумов с малой амплитудой. Практически можно считать, что электромагнитное поле возбуждено только вблизи главного максимума, а в остальном пространстве наложение волн приводит к их полному погашению.

Возникающее образование в виде группы волн называется волновым пакетом, который движется в пространстве со скоростью v_g , сохраняя ограниченную протяженность в пространстве.

Величина v_g называется групповой скоростью движения пакета в отличие от фазовой скорости, с которой перемещается в пространстве поверхность равной фазы $v = \frac{\omega}{2\pi} \lambda$.

Волновой пакет обладает ограниченной пространственной и временной протяженностями, удовлетворяющими условиям:



$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta k_x &\approx 2\pi; & \Delta z \cdot \Delta k_z &\approx 2\pi; \\ \Delta y \cdot \Delta k_y &\approx 2\pi; & \Delta t \cdot \Delta \omega &\approx 2\pi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Полученные результаты имеют большое принципиальное и практическое решение. Отметим, что монохроматические волны, обладающие бесконечно большой протяженностью, не могут быть использованы для передачи каких-либо сигналов. Под сигналами понимаются такие электромагнитные возмущения, которые в принципе можно регистрировать с помощью соответствующих устройств и которые могут служить для информации о некоторых физических событиях. Так, например, сигналом является самый факт излучения, начавшегося в некоторый момент времени. Обнаружение системы зарядов, рассеивающей электромагнитной волны, является другим примером сигнала.

Из сказанного следует, что электромагнитные волны могут быть использованы для образования сигналов только в том случае, если из них сформулированы волновые пакеты. Соотношения (3.13) используются для анализа требуемых свойств сигнала. Пусть, например, регистрирующее устройство требует для своей работы сигнала, длительность которого не меньше некоторой величины Δt . Тогда сигнал будет зарегистрирован только в том случае, если он представляет волновой пакет, сформированный из монохроматических волн с частотами, распределенными в интервале $\Delta \omega \geq 2\pi/\Delta t$.

В заключение подчеркнем, что полученное нами выражение для волнового пакета (3.13) имеет приближенный характер. Оно справедливо, если:

- 1) амплитуды всех монохроматических волн, образующих пакет, имеют одно и то же значение;
- 2) в разложении $k(\omega)$ в ряд по $\Delta \omega$ можно ограничиться первым членом.

Первое ограничение не имеет принципиального значения, и не представляет особого труда нахождения волновых пакетов, образуемых волнами с различными амплитудами.

Второе требование для электромагнитных волн в вакууме выполняется автоматически:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega_0}{c} + \frac{\Delta \omega}{c} = k_0 + \frac{\Delta \omega}{c}.$$



3.4. Рассеивание электромагнитных волн свободным и связанным зарядами

Рассеивание электромагнитных волн связанным зарядом рассмотрим на примере линейного гармонического осциллятора. Пусть плоская монохроматическая волна, поляризованная в плоскости, падает на осциллятор. Уравнение движения осциллятора:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \cdot \vec{r} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \dddot{\vec{r}} + \frac{e\vec{E}_0 e^{i\omega t}}{m} \quad (3.14)$$

Считая затухание слабым, получим

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r}$$

Следовательно, уравнение движения примет вид

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \cdot \vec{r} + \gamma \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 \cdot e^{i\omega t} , \quad (3.15)$$

где $\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3}$.

Частное решение данного уравнения

$$\vec{r} = \frac{\frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \cdot \gamma} \quad (3.16)$$

определяет закон движения осциллятора под действием внешней силы.

Интенсивность излучения, рассеянного в телесном угле Ω определяется формулой

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} [\ddot{\vec{r}n}]^2 d\Omega = \frac{e^4 \omega^4 E_0^2}{4\pi \cdot m^2 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \cos^2(\omega t - \delta) d\Omega.$$



(3.17)

Рассеянное излучение имеет ту же частоту, что и падающее, но сдвинуто по фазе на δ :

$$\delta = \arctg \frac{\gamma \cdot w}{w_0^2 - w^2} . \quad (3.18)$$

В формуле для интенсивности (3.17) через θ обозначен угол между направлением наблюдения и направлением вектора поляризации \vec{E}_0 (рис.4)

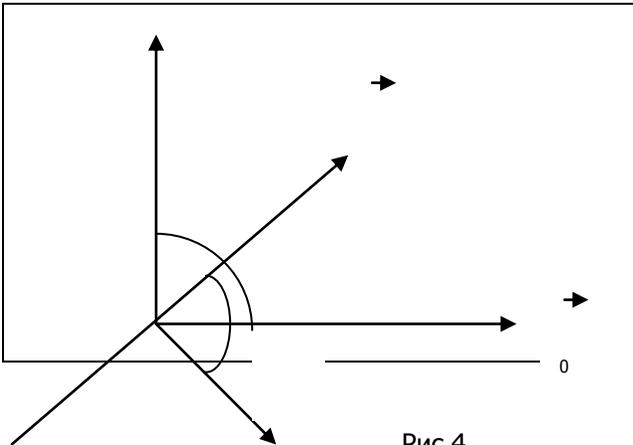


Рис.4

Введя падающую интенсивность излучения $I_0 = \frac{cE_0^2}{4\pi}$ и усред-

няя за период $T = \frac{2\pi}{w}$, получим среднее значение интенсивности

$$d\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T dI dt = r_0^2 I_0 \frac{w^4 \sin^2 \Theta \cdot d\Omega}{(w_0^2 - w^2) + w^2 \gamma^2} . \quad (3.19)$$

Обычно процесс рассеивания электромагнитных волн характеризуют эффективным дифференциальным сечением, определяемым как



отношение интенсивности, рассеянной в угол $d\Omega$, к интенсивности падающего излучения:

$$d\sigma = \frac{d\bar{I}}{I_0} = \frac{\bar{r}_0 w^4}{(w_0^2 - w^2)^2 + w^2 \gamma^2} \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} d\Omega.$$

Интегрируя по всему телесному углу $d\Omega$, получаем полное сечение рассеяния неполяризованного излучения

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{r_0^2 w^4}{(w_0^2 - w^2)^2 + w^2 \gamma^2}. \quad (3.20)$$

Полученное выражение носит название дисперсионной формулы классической электродинамики, которая имеет общий характер. Она по форме совпадает с аналогичной формулой для рассеяния света атомами, полученной в квантовой механике. При малых частотах, когда $w \ll w_0$, данная формула трансформируется к виду:

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{w^4}{w_0^4}. \quad (3.21a)$$

При высоких частотах формула (3.20) вновь упрощается

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3} r_0^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4}. \quad (3.21b)$$

Данное выражение получило название формулы Томсона.

Сечение рассеяния оказывается постоянным, не зависящим ни от частоты рассеиваемого излучения, ни от свойств осциллятора.

Данное следствие имеет простой смысл: при высоких частотах сила, действующая на заряд со стороны поля, весьма велика по сравнению с квазиупругой силой. Электрон рассеивается как свободная частица. Согласно формуле Томсона, сечение σ является универсальной постоянной, определяемой классическим радиусом электрона. Ясно, что формула Томсона описывает рассеяние электронами любых систем, например, атомов, если можно пренебречь силами, связывающими электроны в атомах, и считать их свободными.



ми. Рассеянием излучения тяжелыми ядрами можно пренебречь, поскольку сечение обратно пропорционально квадрату массы рассеивателя. Универсальный характер формулы (3.216) делает её одним из фундаментальных соотношений классической электродинамики.

3.5. Поглощение излучения

В классической электродинамике поглощение излучения рассчитывается для модели осциллятора. Рассмотрим случай, когда частоты падающего излучения близки к резонансной частоте. В этом случае поглощение будет наибольшим. Падающее излучение имеет некоторое непрерывное распределение по частотам. Разложим его в интеграл Фурье.

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{E}(w) e^{iw \cdot t} dw. \quad (3.22)$$

Подставим это в уравнение движения осциллятора (3.14) и разлагая в интеграл Фурье найдем его смещение

$$\bar{r}(w) = \frac{e}{m} \frac{\bar{E}(w)}{w_0^2 - w^2 + iw\gamma}. \quad (3.23)$$

Потеря энергии излучения равна полной работе, произведенной полем над осциллятором. Последнюю вычислим по формуле

$$-\Delta E = \int \bar{F} v \cdot dt = e \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{E}(t) \cdot \dot{\bar{r}} dt. \quad (3.24)$$

Используя обобщенную формулу Персеваля, преобразуем уравнение



$$-\Delta E = 2 \frac{e^2}{m} \int_0^{+\infty} \frac{\gamma |E(w)|^2}{(w_0 - w)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} dw \quad . \quad (3.25)$$

Будем считать, что спектральное распределение поглощаемого излучения в области резонанса изменяется медленно по сравнению с резонансным множителем. Тогда, используя представление δ -функции

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2},$$

получим

$$-\Delta E = \frac{\pi \cdot e^2}{m} |\bar{E}(w_0)|^2 = \pi \cdot c^2 r_0 |\bar{E}(w_0)|^2. \quad (3.26)$$

Таким образом, поглощенная энергия оказывается независимой от физических свойств поглощающей среды, за исключением положения резонанса w_0 , и поэтому данное выражение имеет общий характер.



4. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

4.1. Движение заряженных частиц в постоянных электрическом и магнитном полях

Одним из важнейших с практической точки зрения разделов электродинамики является теория движения заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Теория движения заряженных частиц в электромагнитных полях является основой всей электроники, электронной и протонной микроскопии, исследований реакций в плазме и другие.

В рамках этой книги мы ограничимся рассмотрением простейших задач. Более сложные вопросы движения заряженных частиц в плазменном разряде можно посмотреть в работе [3]. Будем предполагать, что поле, в котором находится заряженная частица, имеет напряженность, весьма большую по сравнению с полем самой частицы. Иными словами считаем, что движение частицы не искажает заданное, внешнее по отношению к ней поле.

Движение заряженных частиц в постоянных электромагнитных полях рассматривается на примере однородных полей:

$$\vec{E} = \text{const}, \quad \vec{B} = \text{const}.$$

Уравнение движения в электрическом поле имеет вид:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{E} \quad (4.1)$$

Если частица в момент времени $t = 0$ имела скорость v_0 , направленную под углом θ к оси y , и находилась в начале координат, то двукратное интегрирование уравнений движения дает следующее:



$$\dot{x} = \frac{e}{m} E \cdot t + v_0 \sin \theta;$$

$$x = \frac{et^2 E}{2m} + (v_0 \sin \theta) \cdot t;$$

$$\dot{y} = v_0 \cos \theta;$$

$$y = (v_0 \cos \theta) \cdot t.$$

Исключая время из данных уравнений, находим уравнение траектории, которое представляет собой параболу. Поперечное электрическое поле обладает важным свойством фокусирования, то есть если пучок частиц выходит из начала координат по некоторым углом (близким к 45°), то на некотором расстоянии вдоль оси y частицы собираются в точку.

Движение частицы в однородном магнитном поле, ориентированном вдоль оси z имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}]. \quad (4.2)$$

Координаты x и y будем искать в виде гармонических функций

$$\dot{x} = A \cos\left(\frac{eH}{mc} t + \alpha\right);$$

$$\dot{y} = -A \sin\left(\frac{eH}{mc} t + \alpha\right).$$

Очевидно, что квадрат амплитуды A можно выразить

$$A^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_{\perp}^{(0)2}, \quad (4.3)$$

где $v_{\perp}^{(0)}$ — начальная скорость в плоскости (xy) .

Проинтегрировав выражение и исключив время, получим уравнение окружности:



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{v_{\perp}^{(0)2}}{\omega_c^2} = R_c^2 \quad (4.4)$$

Частота обращения частицы ω_c определяемая формулой

$$\omega_c = \frac{eH}{mc},$$

носит название циклотронной частоты. Радиус окружно-

сти R_c , определяемый формулой $R_c = \frac{mcv_{\perp}}{eH}$ имеет простой смысл:

на окружности данного радиуса сила Лоренца уравнивается центробежной силой.

Если частица в начальный момент помимо скорости в плоскости (xy) имела по оси z компоненту скорости $v_z^{(0)}$, то она будет совершать равномерное движение вдоль направления магнитного поля.

Наложение обоих движений, равномерного по оси z и вращения в плоскости (xy) приводит к траектории частицы в продольном поле в виде винтовой линии. Витки траектории навиваются на цилиндр радиуса R_c с осью, направленной оси z. При движении в постоянном магнитном поле имеют место следующие законы:

- 1) Сохраняется полная энергия частицы

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} \{ (V_{\perp}^{(0)})^2 + (V_z^{(0)})^2 \} = const ;$$

- 2) Сохраняется проекция момента импульса на ось z

$$L_z = mR_c^2 \dot{\phi} = mR_c^2 \omega_c = const .$$

В общем случае, движения частиц в однородных и постоянных по времени электрическом и магнитном полях, уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = e\bar{E} + \frac{e}{c} [\bar{v}\bar{H}]. \quad (4.5)$$



Физика

Введем новую переменную: $\bar{V} = \bar{v} - \frac{c[\bar{E}\bar{H}]}{H^2}$, и подставим в уравнение движения (4.5). Заметим, что двойное векторное произведение может быть раскрыто следующим образом $[[\bar{E}\bar{H}]\bar{H}] = \bar{H}(\bar{H}\bar{E}) - \bar{E}H^2$. Используя это разложение получим уравнение движения в следующем виде:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{e}{m} \frac{\bar{H}(\bar{H}\bar{E})}{H^2} + \frac{e}{mc} [\bar{V}\bar{H}]. \quad (4.6)$$

Если электрическое поле перпендикулярно магнитному полю, а это так, то скалярное произведение векторов напряженностей магнитного и электрического полей будет равно нулю, т.е. $(\bar{H}\bar{E}) = 0$. Тогда уравнение движения запишется следующим образом

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{e}{mc} [\bar{V}\bar{H}]. \quad (4.7)$$

Последнее уравнение совпадает по форме с уравнением движения (4.2). Следовательно, \bar{V} представляет скорость движения частицы по окружности в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю \bar{H} , которое происходит с циклотронной частотой. При этом полная скорость частицы равна:

$$\bar{V} = \bar{v} + c \frac{[\bar{E}\bar{H}]}{H^2} \quad (4.8)$$



Слагающая скорости частицы

$$\bar{v}_D = \frac{c[\overline{EH}]}{H^2},$$

направлена перпендикулярно к обоим полям. По абсолютной величине она равна

$$|\bar{v}_D| = \frac{cE}{H}$$

и не зависит ни от заряда, ни от массы частицы. Движение частицы в направлении v_D получило название дрейфа.

Если \bar{E} не перпендикулярно к \bar{H} , то уравнение (4.6) можно спроектировать на плоскость, перпендикулярную к вектору \bar{H} , и ось z . Тогда находим

$$\frac{d\bar{V}_\perp}{dt} = \frac{e}{mc}[\bar{V}_\perp H];$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{e}{m}E_\parallel,$$

где E_\parallel - слагающая электрического поля, параллельная магнитному полю. В скорости дрейфа вместо E следует при этом написать E_\perp . На дрейф частицы накладывается равномерно ускоренное движение вдоль магнитного поля под действием силы равной eE_\parallel .



4.2. Функции Лагранжа и Гамильтона для частиц в электромагнитных полях

Уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = e(\bar{E} + \frac{1}{c}[\bar{v} \bar{H}])$$

могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа, если ввести функцию Лагранжа соотношением

$$L = \frac{m\bar{v}^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}\bar{A}\bar{v} . \quad (4.9)$$

Напомним, что функция Лагранжа определяет разность между кинетической и потенциальной энергиями системы. Она является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени.

Если движение заряженной частицы описывается обобщенными координатами и обобщенными скоростями, то уравнения обычно записываются в форме уравнений Лагранжа. Составим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{r}} = 0 . \quad (4.10)$$

Используя данное соотношение, получим уравнение для обобщенного импульса

$$\bar{P} = \frac{\partial L}{\partial v} = m\bar{v} + \frac{e}{c}\bar{A} = \bar{p} + \frac{e}{c}\bar{A} . \quad (4.11)$$

Выражение для обобщенной силы имеет вид

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \bar{r}} \right)_{\bar{v}=\text{const}} = -e \cdot \text{grad}\varphi + \frac{e}{c} \text{grad}(\bar{A}\bar{v}) . \quad (4.12)$$

Подставляем найденные выражения для обобщенного импульса и



обобщенной силы в уравнение Лагранжа. Получим после преобразования уравнение вида

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = e \cdot \left(\bar{E} + \frac{1}{c} [\bar{v}\bar{H}] \right). \quad (4.13)$$

Данное уравнение определяет движение частицы в электромагнитных полях.

Как известно, функция Гамильтона определяет полную механическую энергию консервативной системы, так же являясь функцией обобщённых координат и импульсов системы. В дальнейшем нам понадобятся выражения для функции Лагранжа и Гамильтона. Функцию Гамильтона для частицы введем следующим образом:

$$\bar{H} = \bar{P}\bar{v} - \bar{L}.$$

Тогда функцию Гамильтона для частицы можно представить в виде

$$H = \frac{1}{2m} \left(\bar{P} - \frac{e}{c} \bar{A} \right)^2 + e\varphi. \quad (4.14)$$



5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

5.1. Основные уравнения поля

Характер электромагнитных процессов в веществе существенно зависит от свойств последнего. Например, механизм прохождения тока через металлические проводники и плазму газового разряда имеет существенно разный характер и сопровождается различными явлениями. Тем не менее, оказывается возможным построить феноменологическую теорию электромагнитных явлений в веществе. Для этого необходимо, прежде всего, найти общие уравнения электромагнитного поля в веществе.

Мы видели, что в основных уравнениях Максвелла - Лоренца фигурировали величины, относящиеся к данной точке и данному моменту времени. В веществе - среде, построенной из атомов или молекул, уравнения Максвелла - Лоренца, содержащие характеристики поля, отнесенные к данной точке и данному моменту времени, теряют смысл. Например, напряженность электрического поля имеет сравнительно малое значение вне данного атома, становится сравнительно большой внутри него и вновь спадает за его пределами. Рост поля в миллионы раз и его последующее спадание происходят в масштабах порядка атомных размеров. Такое же изменение поля во времени происходит в фиксированной точке, например, из-за теплового движения атома за малые доли секунды. Поэтому в макроскопических процессах, происходящих в веществе интерес и значение имеют лишь средние значения соответствующих величин.

Усреднив уравнения Максвелла - Лоренца по физически бесконечно малому объему V_0 и промежутку времени τ , вводя средние по формуле

$$\bar{f} = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1}{V_0} \int f dV dt$$

и обозначив среднее значение напряженности электрического поля в среде \bar{E} , а среднее значение напряженности магнитного поля в среде магнитной индукцией \bar{B} получим уравнения Максвелла - Лоренца и закон сохранения заряда в следующем виде:



Физика

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \\
 \operatorname{div} \bar{B} &= 0; \\
 \operatorname{rot} \bar{B} &= \frac{4\pi}{c} \bar{\rho v} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; \\
 \operatorname{div} \bar{E} &= 4\pi \bar{\rho}; \\
 \operatorname{div} \bar{\rho v} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Дальнейшие преобразования уравнений связаны с нахождением средних значений $\bar{\rho v}$ и $\bar{\rho}$. Нахождение этих средних требует введение некоторых допущений о строении вещества.

В рамках теории электромагнитного поля вещество рассматривается, как сплошная среда, свойства которой описываются при помощи ряда формальных макроскопических характеристик, таких как диэлектрическая проницаемость, проводимость и т.п. Все вещества разобьем на две группы: диэлектрики и проводники. Под проводниками мы будем понимать тела, в которых под действием приложенного внешнего стационарного поля возникает перемещение зарядов по объему и соответствующий этому движению зарядов электрический ток. В диэлектриках внешнее поле не создает движения зарядов, хотя может вызывать их смещение в новые положения равновесия.

В действительности в диэлектриках внешнее электрическое поле вызывает некоторый, хотя и весьма малый ток. С другой стороны, в некоторых проводниках ток также может быть невелик. Тем не менее разделение всех тел на проводники и диэлектрики является достаточно хорошим приближением, на основании, которого возможно построение феноменологической теории электромагнитных явлений в сплошных средах.



5.2. Поляризация среды в электрическом поле

При вычислении $\bar{\rho}$ следует различать случаи тела в целом электронейтрального и содержащего отличный от нуля заряд.

Если электронейтральное тело помещено во внешнее электрическое поле, в атомах и молекулах происходит смещение отрицательных и положительных зарядов друг относительно друга. Тело, оставаясь электронейтральным, приобретает дипольный момент. Средний дипольный момент единицы объема будем именовать вектором поляризации или, кратко, поляризацией \bar{P} . Дипольный момент, приобретаемый телом, равен, по определению

$$\bar{d} = \int \bar{P} dV = \int \rho_{\text{связ}} \bar{r} dV.$$

Ввиду произвольности объема интегрирования имеем

$$\bar{P} = \rho_{\text{связ}} \bar{r}.$$

Если тело поляризовано равномерно, т.е. \bar{P} одинаково во всех точках тела, то

$$\bar{P} = \frac{\bar{d}}{V}.$$

Появление связанного, или индуцированного, заряда называется электростатической индукцией или поляризацией.

Если поляризация тела неоднородна и вектор \bar{P} изменяется от точки к точке и притом изменяется так, что $\text{div } \bar{P} \neq 0$, в теле возникает объемный заряд $\rho_{\text{связ}}$, определяемый формулой

$$\rho_{\text{связ}} = - \text{div } \bar{P}. \quad (5.2)$$

Если полный свободный заряд тела отличен от нуля и распреде-



лен в нем с объемной плотностью ρ , то полная средняя плотность заряда

$$\bar{\rho} = \rho_{\text{связ}} + \rho$$

и получаем

$$\int \bar{\rho} dV = \int (\rho_{\text{связ}} + \rho) dV = \int \rho dV = e. \quad (5.3)$$

Заряд тела, характеризуемый плотностью ρ , не связан с атомами вещества и не индуцируется внешним полем. Ниже будет показано, что в постоянном поле свободный заряд ρ может существовать только у диэлектриков. В проводниках свободные заряды подвижны и смещаются до тех пор, пока не выйдут на его поверхность, образуя поверхностный заряд.

5.3. Средняя плотность тока и средняя плотность заряда в среде

Более сложной задачей является вычисление средней плотности $\overline{\rho v}$ тока в среде ρv . Это вычисление может быть проведено либо на основе некоторых модельных представлений, либо, более формально, исходя из общих представлений об электромагнитных свойствах среды. Мы изберем здесь второй путь. Отметим, что квантовые эффекты играют основную роль в магнитных свойствах атомов, поэтому нельзя проводить рассмотрение электрических и особенно магнитных свойств атомных систем на основе классических моделей.

Рассмотрим некоторое однородное и изотропное тело, помещенное во внешнее электромагнитное поле. Очевидно, что среднее поле в объеме этого тела мало по сравнению с внутриатомными полями.

Средняя плотность тока в среде ρv в каждой точке тела является функцией напряженностей электрического и магнитного полей. Если поля изменяются в пространстве и во времени, средняя плотность тока будет зависеть от скорости изменения векторов \overline{E} и \overline{B} во времени и пространственных производных этих величин и



определяться зависимостью вида

$$\overline{\rho v} = f(\overline{E}, \overline{B}, \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}, \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}, \frac{\partial \overline{E}_i}{\partial x_k}, \frac{\partial \overline{H}_i}{\partial x_k}).$$

Разлагая f в ряд по степеням переменных, следует учитывать, что $\overline{\rho v}$ является полярным вектором. Поэтому все члены ряда разложения должны представлять полярные векторы. Не останавливаясь здесь на анализе отмеченных выше разложений и выводе формулы для средней плотности тока отсылаем читателя к работе [2].

Средняя плотность тока в веществе может быть определена формулой

$$\overline{\rho v} = \overline{j} + \frac{\partial \overline{P}}{\partial t} + c \cdot \text{rot} \overline{M} \quad , \quad (5.4)$$

где $\overline{M} = \alpha \overline{B}$ определяет средний магнитный момент единицы объема тела, создаваемый движущимися связанными зарядами, а α - скаляр, зависящий от свойств среды.



5.4. Система уравнений для электромагнитного поля в среде

Вычислив средние значения величины $\overline{\rho v}$, можно перейти к формулировке уравнений для электромагнитного поля в среде. Подставляя (5.4) в уравнение (5.1) и используя новые обозначения

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \overline{B} - 4\pi \cdot \overline{M}, \\ \overline{E} &= \overline{D} - 4\pi \cdot \overline{P} \end{aligned} \quad , \quad (5.5)$$

и проводя усреднение получим систему уравнений Максвелла вида

$$\text{rot} \overline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \quad , \quad (5.6)$$

$$\text{div} \overline{D} = 4\pi \cdot \rho \quad , \quad (5.7)$$

$$\text{rot} \overline{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \quad , \quad (5.8)$$

$$\text{div} \overline{B} = 0 \quad . \quad (5.9)$$

При этом ρ и \bar{j} связаны между собой уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \bar{j} = 0$$

В дальнейшем нам понадобится интегральная форма уравнений Максвелла. В интегральной форме они имеют вид:

$$\oint \overline{E} d\overline{S} = -\frac{1}{c} \cdot \int_s \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} d\overline{S} \quad (5.10)$$



$$\oint \overline{H} d\overline{S} = \frac{4\pi}{c} \int \overline{j} \cdot d\overline{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \overline{D} d\overline{S} \quad (5.11)$$

$$\oint \overline{D} d\overline{S} = 4\pi \int_V \rho \cdot dV \quad (5.12)$$

$$\oint \overline{B} d\overline{S} = 0 \quad (5.13)$$

Фундаментальные уравнения Максвелла в форме (5.6) — (5.9) или в форме (5.10) — (5.13) еще не образуют полной системы уравнений электромагнитного поля в среде. В самом деле, если два первых векторных уравнения Максвелла записать в координатной форме (каждому векторному уравнению соответствуют три скалярных), то получится всего восемь уравнений. Они связывают между собой пятнадцать скалярных составляющих пяти векторов $(\overline{E}, \overline{D}, \overline{H}, \overline{B}, \overline{j})$ и один скаляр (ρ) , т. е. всего шестнадцать неизвестных величин. Таким образом, четыре уравнения Максвелла не позволяют однозначно определить электромагнитное поле в данной среде, так как эти уравнения не содержат никакой информации о свойствах среды, в которой существует электромагнитное поле. Электромагнитные свойства среды определяются дополнительной системой так называемых материальных уравнений Максвелла. В случае слабых электромагнитных полей, сравнительно медленно меняющихся в пространстве и времени для изотропных неферромагнитных и несегнетоэлектрических сред, материальные уравнения могут быть записаны в виде:

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \overline{E} ; \quad (5.14)$$

$$\overline{B} = \mu_0 \mu \overline{H} ; \quad (5.15)$$

$$\overline{j} = \gamma \overline{E} , \quad (5.16)$$

где ε, μ, ρ - постоянные, характеризующие электромагнитные свойства среды (т. е. диэлектрическая и магнитная проницаемости и электрическая проводимость среды).

Фундаментальные уравнения Максвелла совместно с материальными уравнениями образуют полную систему уравнений электромагнитного поля в среде.

Можно ввести электромагнитные потенциалы φ и \overline{A} в веществе



аналогично выводу формул (1.49). Повторяя выкладки и учитывая условие Лоренца в виде

$$\operatorname{div} \bar{A} = -\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

легко прийти к уравнениям для потенциалов

$$\Delta \bar{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \bar{j},$$

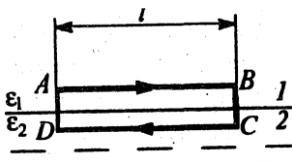
$$\Delta \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho.$$

5. 5. Система граничных условий

В самом общем случае, граница тела служит границей раздела двух сред с различными свойствами.

Рассмотрим связь между векторами \bar{E} и \bar{D} на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков (диэлектрические проницаемости которых ε_1 , и ε_2) при отсутствии на границе свободных зарядов. Построим вблизи границы раздела диэлектриков 1 и 2 небольшой замкнутый прямоугольный контур ABCDA длиной l , сориентировав его так, как показано на рис.5. Согласно теореме о циркуляции вектора \bar{E}

$$\oint_{ABCD} \bar{E} d\bar{l} = 0,$$



откуда $E_{\tau 1} l - E_{\tau 2} l = 0$ (знаки интегралов по AB и CD разные, так как пути егрирования противоположны, а интеплы по участкам BC и DA ничтожно малы).



Физика

Рис.5.

$$\text{тому } \frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \text{ учтено,}$$

$$D = \epsilon \epsilon_0 E .$$

На границе раздела двух диэлектриков (рис.6) построим прямой цилиндр ничтожной высоты, одно основание которого находится в первом диэлектрике, другое - во втором. Основания dS настолько малы, что в пределах каждого из них вектор D одинаков. Согласно теореме Гаусса, $D_{n1}dS - D_{n2}dS = 0$ (n и n' к основаниям цилиндра направлены противоположно). Поэтому $D_{n1} = D_{n2}$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \text{ (учтено, что } D = \epsilon \epsilon_0 E \text{).}$$

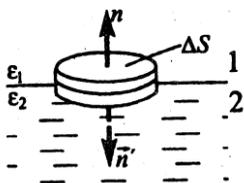


Рис.6.

Таким образом, при переходе из границы раздела двух диэлектрических сред тангенциальная составляющая вектора \bar{E} (E_{τ}) и нормальная составляющая вектора \bar{D} (D_n) изменяются непрерывно (не претерпевают скачка), а нормальная

составляющая вектора \bar{E} (E_n) и тангенциальная составляющая вектора D_{τ} претерпевают скачок.

Рассмотрим связь векторов \bar{B} и \bar{H} на границе раздела двух однородных магнетиков (магнитные проницаемости μ_1 и μ_2) при отсутствии на границе тока проводимости. Построим вблизи границы раздела магнетиков 1 и 2 прямой цилиндр ничтожно малой высоты, одно основание которого находится в первом магнетике, другое — во втором (рис.7).

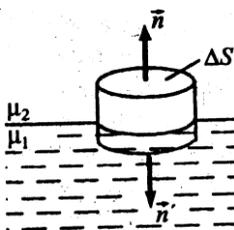


Рис.7

Основания dS настолько малы, что в делах каждого из них вектор \vec{B} одинаков. Согласно теореме Гаусса $B_{n1} \Delta S - B_{n2} \Delta S = 0$ (нормали n и n' к основаниям цилиндра направлены противоположно).

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad \frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (\text{учли,}$$

$$B = \mu \mu_0 H).$$

Вблизи границы раздела двух магнетиков 1 и 2 построим небольшой замкнутый прямоугольный контур $ABCD$ длиной l , ориентируя его так, как показано на рис.8.

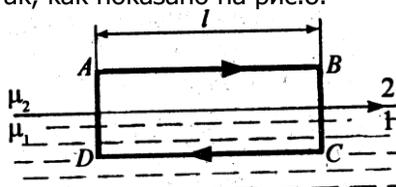


Рис.8.

Согласно теореме о циркуляции вектора \vec{H} , $\oint_{ABCD} \vec{H} d\vec{l} = 0$ (токов проводимости налице раздела нет),

откуда $H_{\tau 1} l - H_{\tau 2} l = 0$ (знаки интегралов по AB и CD разные, так как пути интегрирования противоположны, а интегралы по участкам BC и DA ничтожно малы). Поэтому

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}, \quad \frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (\text{учтено, что } B = \mu \mu_0 H).$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора \vec{B} (B_n) и тангенциальная составляющая вектора \vec{H} (H_τ) изменяются непрерывно (не претерпевают скачка), а тангенциальная составляющая вектора \vec{B} (B_τ) и нормальная составляющая вектора \vec{H} (H_n) претерпевают скачок.



5.6. Закон сохранения энергии

Если все тела (проводники и диэлектрики), находящиеся в поле, неподвижны, то работа, произведенная (в единицу времени) электрическим полем над зарядами, равна:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \frac{c}{4\pi} \int E \cdot \text{rot} H dV - \frac{1}{4\pi} \int E \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} dV = \\ &= \frac{c}{4\pi} \int (\vec{E} \cdot \text{rot} H - \vec{H} \cdot \text{rot} E) dV - \frac{1}{4\pi} \int \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) dV = \\ &= -\oint \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} - \int \frac{\partial}{\partial t} u_0 dV. \quad (5.17) \end{aligned}$$

При этом мы прибавили к вычисляемому интегралу выражение, равное нулю, и обозначили через u_0 плотность энергии электромагнитного поля в среде:

$$u_0 = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} \quad (5.18)$$

и через σ - вектор Умова - Пойнтинга

$$\sigma = \frac{c}{4\pi} [EH] = \frac{c}{4\pi\mu} [EB]. \quad (5.19)$$

Удобно записать закон сохранения энергии в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int u_0 dV = \oint \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} + \frac{dW}{dt}. \quad (5.20)$$

В дифференциальной форме закон сохранения энергии выражается соотношением



$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\varepsilon \cdot E^2 + \mu \cdot H^2}{8\pi} = \bar{j} \cdot \bar{E} + \operatorname{div} \bar{\sigma}. \quad (5.21)$$

Интерпретация закона сохранения в среде не отличается, в принципе, от данного закона для пустоты. Следует лишь отметить то обстоятельство, что в (5.21) входит только плотность тока свободных зарядов \bar{j} . При движении свободных зарядов в неподвижном проводнике вся механическая работа поля полностью переходит в тепло, именуемое джоулевым теплом. Механизм последнего процесса зависит от конкретных свойств проводников. Мы коснемся еще этого вопроса в дальнейшем. Обозначив через Q_0 джоулево тепло, выделяющееся в единице объема за 1 сек и равное

$$Q_0 = \bar{j} \cdot \bar{E} = \frac{j^2}{\sigma},$$

мы можем написать закон сохранения энергии в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int u_0 dV = \int Q_0 dV + \oint \sigma dS.$$

Величины

$$\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\bar{D} \cdot \bar{E}}{8\pi} \quad \text{и} \quad \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\bar{B} \cdot \bar{H}}{8\pi}$$

представляют, соответственно, плотность электрической и магнитной энергии единицы объема.

Поскольку величины ε и μ в веществе являются функциями температуры, всё наше рассмотрение, предполагает постоянство температуры среды. Поэтому, величину
$$\frac{\bar{E} \cdot \bar{D} + \bar{B} \cdot \bar{H}}{8\pi}$$
 следует трактовать как свободную энергию единицы объема среды.



6. ПРОЦЕССЫ В ПЛАЗМЕ ГАЗОВОГО РАЗРЯДА

6.1. Квазинейтральность и разделение заряда

Плазмой называют квазинейтральной систему, содержащую положительно и отрицательно заряженные свободные частицы (ионы и электроны).

Рассмотрим масштаб разделения зарядов во времени. Пусть в результате разделения зарядов в плазме возник объёмный заряд плотностью q . По закону сохранения заряда

$$\frac{\partial q}{\partial t} = - \operatorname{div} \bar{j}, \quad (6.1)$$

где \bar{j} - плотность тока.

Допустим, что ток переносится только электронами

$$\bar{j} = n \cdot e \cdot \bar{v}.$$

Тогда уравнение движения электрона массой m в электрическом поле \bar{E} можно представить как

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = -e \cdot \bar{E}. \quad (6.2)$$

Подставим \bar{j} , в уравнение (6.1) продифференцируем по времени получим

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = - \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot \operatorname{div} \bar{E}.$$

По уравнению Максвелла имеем

$$\operatorname{div} \bar{E} = 4 \cdot \pi \cdot q.$$



Тогда уравнение движения электрона преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -\frac{4 \cdot \pi \cdot n \cdot e^2}{m} \cdot q. \quad (6.3)$$

Уравнение движения (6.3) можно представить в компактной форме

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \cdot q = 0, \quad (6.4)$$

где параметр $\omega_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi \cdot n \cdot e^2}{m}}$ называют плазменной ча-

стотой.

Таким образом, плотность объёмного заряда в плазме колеблется с плазменной частотой ω_0 . Из вывода следует, что всякое разделение заряда в плазме приводит к колебаниям плотности заряда.

В среднем за много периодов колебаний плазма ведет себя как квазинейтральная среда. Временной масштаб разделения заряда есть величина того же порядка, что и период плазменных колебаний и ограничивается величиной

$$t_0 \sim \frac{1}{\omega_0}.$$

Отметим, что разделение зарядов может быть существенным только за периоды времени, малые по сравнению с этим масштабом.

За пространственный масштаб разделения зарядов принимают расстояние, которое частица при своём тепловом движении проходит

за время $\frac{1}{\omega_0}$ расстояние

$$d \approx \frac{\langle v \rangle}{\omega_0}. \quad (6.5)$$

С энергетических представлений в качестве пространственного масштаба разделения зарядов принимают расстояние, определяемое формулой



$$d = \sqrt{\frac{T}{4\pi \cdot n \cdot e^2}}. \quad (6.6)$$

В физике плазмы температуру измеряют в энергетических единицах т.е. называют температурой величину $k \cdot T$, где k - постоянная Больцмана, T - термодинамическая температура. Практической энергетической единицей температуры служит элетронвольт, который может быть связан с термодинамической температурой зависимостью вида $1\text{эВ} = 11600 \text{ К}$.

6.2. Плазма как сплошная среда

Для описания плазмы используют модель проводящей жидкости, которая удовлетворенно определяет свойства плазмы в приближении магнитной гидродинамики.

Уравнение движения плазмы представим уравнением

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla \cdot P + \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot [\bar{j} \cdot \bar{H}],$$

где $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$ - производная, взятая вдоль траектории движения.

Плотность тока в плазме находится по закону Ома как

$$\bar{j} = \sigma \cdot E^* = \sigma \cdot \left(E + \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot [\bar{j} \cdot \bar{H}] \right), \quad (6.8)$$

где E - напряженность электрического поля, σ - проводимость плазмы, E^* - напряженность электрического поля в системе отсчета, движущейся вместе с плазмой.

С учетом уравнений Максвелла, формул векторного анализа и частного случая, когда магнитное поле меняется только поперёк направления течения, уравнение движения примет вид



$$\frac{\partial \bar{v}_\perp}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla \cdot \left(P + \frac{H^2}{8 \cdot \pi} \right). \quad (6.9)$$

Анализ данной формулы показывает, что движение плазмы поперек магнитного поля происходит так, как если бы на неё кроме давления P действовало магнитное давление $\frac{\nabla H^2}{8 \cdot \pi}$. Поэтому величину

$$\frac{\nabla H^2}{8 \cdot \pi}$$

называют силой магнитного давления.

Взаимодействие между частицами плазмы проявляется как вязкость. Действие вязкости можно учесть введением в уравнение движения добавочного слагаемого $\nu \cdot \Delta \bar{v}$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla \cdot P + \frac{1}{\rho \cdot c} \cdot [\bar{j} \cdot \bar{H}] + \nu \cdot \Delta \cdot \bar{v}, \quad (6.10)$$

где $\Delta = \nabla^2$, $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ - кинематическая вязкость, η - коэффициент

вязкости.

6.3. Идеальная проводимость и дрейфовое движение

Во многих задачах используют более простой подход, в частности, приближение идеальной проводимости. В этом случае полагают, что проводимость плазмы стремится к бесконечности, т.е. $\sigma \rightarrow \infty$. В том случае, когда проводимость бесконечна $\sigma = \infty$, любое малое электрическое поле вызвало бы бесконечный по величине ток и такие же энергозатраты и поэтому невозможно. Поэтому полагают, что электрическое поле в системе координат связанной с плазмой должно равняться нулю

$$\bar{E}^* \equiv \bar{E} + \frac{1}{c} \cdot [\bar{V} \cdot \bar{H}] = 0. \quad (6.11)$$



Выполним анализ уравнения. Векторное произведение $[\overline{v} \cdot \overline{H}]$ зависит только от составляющей скорости v_{\perp} , а скорость v_{\parallel} может принимать любые значения. Тогда уравнение (6.11) примет вид

$$E = - \frac{1}{c} \cdot [\overline{v}_{\perp} \cdot \overline{H}]. \quad (6.12)$$

Таким образом, данное условие накладывает ограничение на скорость движения плазмы поперек поля \overline{v}_{\perp} . Значение v_{\perp} можно получить, умножив последнее выражение на вектор напряженности магнитного поля \overline{H} :

$$\overline{v}_{\perp} = c \cdot \frac{[\overline{E} \cdot \overline{H}]}{H^2}. \quad (6.13)$$

Движение плазмы в скрещенных магнитном и электрическом полях, описываемое данной формулой называется дрейфом (или дрейфовой скоростью). Величина дрейфовой скорости определяется формулой

$$|\overline{v}_{\perp}| = c \cdot \frac{|\overline{E}_{\perp}|}{H}. \quad (6.14)$$

6.4. Проводимость плазмы

Для случая постоянного тока в однородной плазме уравнение обобщенного закона Ома имеет вид

$$\mathbf{j} + \omega_e \cdot \tau \cdot [\mathbf{j} \cdot \overline{h}] = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot \tau \cdot \mathbf{E}^*, \quad (6.15)$$

где $\omega_e = \frac{e \cdot H}{m \cdot c}$ (6.16) есть электронная циклотронная частота, \overline{h}

- единичный вектор в направлении магнитного поля.



При отсутствии магнитного поля векторное произведение $\overline{j} \cdot \overline{h}$ выпадает из уравнения (6.15). Тогда нормальная и продольная проводимости определяются формулой

$$\sigma_0 = \sigma_{||} = \frac{n \cdot e^2}{m} \cdot \tau \quad , \quad (6.17)$$

где τ - время передачи импульса.

Поперечная проводимость плазмы есть величина тензорная и может быть получена из закона Ома. В этом случае тензор проводимости однородной плазмы для постоянного тока имеет вид:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_0}{1 + \omega_e^2 \cdot \tau^2} & -\frac{\omega_e \cdot \tau \cdot \sigma_0}{1 + \omega_e^2 \cdot \tau^2} & 0 \\ \frac{\omega_e \cdot \tau \cdot \sigma_0}{1 + \omega_e^2 \cdot \tau^2} & \frac{\sigma_0}{1 + \omega_e^2 \cdot \tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} . \quad (6.18)$$

В явном виде составляющие тока определяется по формулам:

$$\begin{aligned} \overline{j}_x &= \sigma_0 \cdot \frac{\overline{E}_x - \omega_e \cdot \tau \cdot \overline{E}_y}{1 + \omega_e^2 \cdot \tau^2} ; \\ \overline{j}_y &= \sigma_0 \cdot \frac{\overline{E}_y + \omega_e \cdot \tau \cdot \overline{E}_x}{1 + \omega_e^2 \cdot \tau^2} ; \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\overline{j}_z = \sigma_0 \cdot \overline{E}_z .$$

Здесь ось oz направлена вдоль магнитного поля.



6.5. Кулоновские столкновения

В плазме передача импульса происходит при двойных столкновениях. Вероятность взаимодействия характеризуется эффективным сечением Q . Время передачи импульса есть величина

$$\tau = \frac{1}{\langle Q \cdot U \rangle \cdot n_i}. \quad (6.20)$$

Нормальная проводимость плазмы выражается через сечение взаимодействия:

$$\sigma_0 = \frac{n \cdot e^2}{n_i \cdot m \cdot \langle Q \cdot u \rangle} = \frac{Z \cdot e^2}{n_i \cdot \langle Q \cdot u \rangle}, \quad (6.21)$$

где u - относительная скорость, m - приведенная масса.

Величина передаваемого импульса определяется прицельным параметром b , т.е. распределением по перпендикуляру от одной частицы до невозмущенной траектории другой. Передаваемый импульс оценивается как

$$\Delta(\tilde{m} \cdot \bar{V}) \approx Z_1 \cdot \frac{Z_2 \cdot e^2}{b \cdot U}. \quad (6.22)$$

Расстояние ближнего взаимодействия оценивается как

$$b_0 = Z_1 \cdot \frac{Z_2 \cdot e^2}{m \cdot U^2}.$$

Это расстояние, на котором потенциальная энергия взаимодействия равна по абсолютной величине удвоенной кинетической энергии относительного движения.

Эффективное сечение кулоновского взаимодействия выражается формулой

$$\bar{Q} = 2 \cdot \pi \cdot b_0^2 \cdot \ln \Lambda, \quad (6.23)$$



где $\Lambda = \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$. Величину $\ln \Lambda$ называют кулоновским логарифмом.

Под верхним пределом b_{\max} понимают длину экранирования (дебаевская длина), под нижним пределом b_{\min} берется большее из двух величин: расстояние ближнего взаимодействия b_0 и квантово-механическая длина волны частицы

$$\tilde{\lambda} = \frac{\hbar}{\tilde{m} \cdot U}. \quad (6.24)$$

Проводимость полностью ионизированной плазмы определяется кулоновским сечением рассеяния электрона на ионе. Для рассматриваемого случая

$$b_0 = \frac{Z \cdot e^2}{m \cdot u^2} \quad (6.25)$$

где m - масса электрона, u - скорость движения электронов относительно ионов.



7. СТАТИЧЕСКАЯ И ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

7.1. Основное термодинамическое неравенство

В курсе общей физики было показано, что энтропия замкнутой системы оказывается равной логарифму числа состояний системы и определяется формулой Больцмана

$$\sigma = k \cdot \ln \Omega \quad , \quad (7.1)$$

где σ -энтропия;

k - постоянная Больцмана;

Ω -число состояний в макроскопических системах.

Можно установить закономерности изменения во времени состояния замкнутой системы, основываясь на формуле Больцмана. Пусть замкнутая система в начальный момент уже находилась в состоянии полного статистического равновесия, в котором её энтропия имеет максимальное значение. Тогда в течение длительного времени, превышающего время релаксации, система будет оставаться в состоянии равновесия, а её энтропия - сохранять неизменное максимальное значение.

В общем случае, в замкнутой макроскопической системе, энтропия σ возрастает или остается постоянной:

$$\Delta\sigma \geq 0 \quad . \quad (7.2)$$

В случае необратимого процесса, происходящего в системе, при соприкосновении ее частей с различной температурой выражение (7.2) может быть представлено следующим образом

$$\delta\sigma = \delta\sigma_1 + \delta\sigma_2 = \frac{\partial\sigma_1}{\partial E_1} \delta E_1 + \frac{\partial\sigma_2}{\partial E_2} \delta E_2 = \frac{\delta E_1}{\theta_1} + \frac{\delta E_2}{\theta_2} \geq 0 \quad (7.3)$$



Поскольку система замкнута, ее полная энергия сохраняется. Тогда имеем

$$\delta E = \delta E_1 + \delta E_2 = 0. \quad (7.4)$$

Следовательно, формула (7.3) может быть представлена как

$$\delta \sigma = \delta E_1 \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \geq 0 \quad . \quad (7.5)$$

Формула (7.5) показывает, что из закона возрастания энтропии следует, что $\delta E_1 \geq 0$. Это означает, что первая часть системы с более низкой температурой, получает энергию от второй.

Обобщая закон возрастания энтропии на случай незамкнутых, но теплоизолированных систем получаем неравенство вида

$$\delta \sigma \geq \frac{\delta Q}{\theta} \quad . \quad (7.6)$$

Физически это означает, что при необратимых процессах, энтропия системы возрастает на величину, избыточную по сравнению с $\frac{\delta Q}{\theta}$, на которую увеличивается энтропия вследствие получения

системой тепла. Это избыточное, по сравнению с $\frac{\delta Q}{\theta}$, возрастание энтропии, связано с переходом в более вероятное состояние, т.е. с приближением к равновесию.

Комбинируя это неравенство с основным термодинамическим равенством, можно записать для общего случая произвольных процессов в незамкнутых системах основное термодинамическое неравенство:

$$\delta E \leq \theta \delta \sigma + \delta A \quad . \quad (7.7)$$

Основное термодинамическое неравенство (7.7) объединяет запись закона сохранения энергии и закона сохранения энтропии.

Связь между статистической и абсолютной температурами выражается формулой



$$\theta = k \cdot T, \quad (7.8)$$

где k - постоянная Больцмана; θ - статистическая температура, измеряемая в Джоулях; T - абсолютная температура, К.

Если ввести энтропию как

$$S = k\sigma,$$

то изменение энергии системы при квазистатическом процессе может быть записано как:

$$\delta E = T \delta S - p\delta V. \quad (7.9)$$

7.2. Максимальная работа и термодинамические потенциалы

Рассмотрим вопрос о максимальной работе, которая может быть выполнена системой, совершающей некруговой процесс. Пусть эта (основная) система находится в термостате при T_0 и p_0 . Между системой и средой существует обмен теплом и работой. Пусть кроме основной системы и среды, имеется некоторое тело, над которым система может производить механическую работу. Пусть основная система переходит из начального состояния в некоторое конечное состояние, производя при этом полезную работу ($-\delta A$). Если бы система не взаимодействовала со средой, полезная работа (δA) была бы равна изменению ее энергии δE . В то время как основная система выполняет полезную работу, среда, в свою очередь, может обмениваться энергией с системой. Баланс энергии в замкнутой системе (основная система + среда + объект работы) может быть записан в виде

$$\delta E + \delta E_0 = \delta A, \quad (7.10)$$

где δE_0 - изменение энергии среды, которое может быть записано как:



Физика

$$\delta E_0 = \delta Q_0 + \delta A_0 \quad (7.11)$$

Здесь, δQ_0 - тепло, переданное основной системе средой; δA_0 - работа, произведенная средой над системой.

В случае квазистатического процесса (размеры среды велики), полезная работа определяется формулой:

$$\delta A = \delta E + T_0 \delta S_0 + P_0 \delta V = \delta R . \quad (7.12)$$

Наибольшая полезная работа может быть совершена над объектом при обратном процессе, т.е.

$$|\delta A|_{max} = -\delta R . \quad (7.13)$$

Конкретное выражение для $|\delta A|_{max}$ возможно лишь для некоторых процессов.

1. Пусть система совершает изотермический процесс, и объем системы не меняется. Если система находится во внешнем поле или является неоднородной, то при заданных температуре T и объеме V , состояние системы может измениться. Получаемая при этом работа равна

$$|-\delta A| > \delta(E - TS) = \delta F , \quad (7.14)$$

где $F = E - TS$ - является мерой работы, которая может быть получена при изотермоизохорическом процессе, происходящем в системе, взаимодействующей со средой, и называется свободной энергией системы. Таким образом, полностью, на получение полезной работы может быть затрачена лишь часть внутренней энергии системы. Часть же, равная TS и именуемая связанной энергией, остается в системе.

2. Другим важным случаем является процесс при постоянной температуре $T = T_0 = const$ и постоянном давлении $p = p_0 = const$. При этом работа определяется соотношением



$$|-\delta A| \geq \delta(E + pV - TS) = \delta\Phi, \quad (7.15)$$

где $\Phi = E + pV - TS$ носит название термодинамического потенциала Гиббса.

Термодинамический потенциал является мерой работы при изотермоизобарическом процессе.

7.3. Свойства термодинамических потенциалов

Рассмотрим случай, когда работа ($-\delta A$) производимая системой, находящейся в среде, равна нулю. Тогда

$$\delta R = \delta(E - T_0 S + p_0 V) \leq 0. \quad (7.16)$$

Знак равенства относится к обратимым процессам, знак неравенства – к необратимым. Величина R при всех процессах, происходящих в системе, взаимодействующей со средой, не увеличивается. Для частных случаев данное выражение упрощается. В случае замкнутой системы $\delta E = 0$ и $\delta V = 0$, откуда следует, что

$$\delta S \geq 0. \quad (7.17)$$

Другими важными случаями являются изотермоизохорического и изотермоизобарического процессы, происходящие в системе, при которых ее температура и давление равны соответствующим величинам для среды. В первом случае $T = T_0$ и $\delta V = 0$ так что имеет место неравенство

$$\delta(E - T_0 S) = \delta F \leq 0. \quad (7.18)$$

Во втором случае $T = T_0$ и $p = p_0$. Тогда

$$\delta(E - T_0 S + p_0 V) = \delta\Phi \leq 0. \quad (7.19)$$



Таким образом, при необратимом изотермоизохорическом процессе, происходящем в системе, взаимодействующей со средой, ее свободная энергия уменьшается. При обратном изотермоизохорическом процессе свободная энергия остается постоянной. Свободная энергия является аналогом энтропии и подобно энтропии служит критерием обратимости и необратимости процесса. Аналогичными свойствами обладает термодинамический потенциал (Гиббса).

Свободная энергия и термодинамический потенциал играют важную роль в термодинамике. Из двух последних неравенств (7.18) и (7.19) следует, что свободная энергия и потенциал заменяют энтропию в случае незамкнутых систем и одновременно являются аналогом внутренней энергии.

Изменения свободной энергии и термодинамического потенциала при обратимом процессе имеют вид:

$$\delta E = T \delta S - p \delta V \quad (7.20)$$

Вычитая из нее $\delta(TS)$ и используя определение свободной энергии, получим

$$\delta F = -S \delta T - p \delta V \quad (7.21)$$

Таким образом, свободная энергия является функцией переменных T и V . Из данной формулы следует, что

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V ; \quad (7.22)$$

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T . \quad (7.23)$$



Величины S и p , полученные из F дифференцированием, играют роль обобщенных сил. Особенно важной является формула (7.23), так как определяет зависимость давления от объема и температуры, т.е. представляет собой уравнение состояния.

Прибавляя к формуле (7.21) полный дифференциал $\delta(pV)$ и учитывая определение термодинамического потенциала, имеем

$$\delta\Phi = \delta(E - TS + pV) = -S\delta T + V\delta p \quad (7.24)$$

Таким образом, термодинамический потенциал Гиббса является потенциалом по отношению к переменным T и p . Роль общих сил играют величины S и V :

$$S = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_p; \quad (7.25)$$

$$V = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)_T. \quad (7.26)$$

Так как на практике удобнее изменять или поддерживать постоянными температуру и давление, термодинамический потенциал Гиббса особенно часто применяют и, порой, называют основным потенциалом.

Потенциалом, относительно пары переменных p и S , служит величина, называемая энтальпией

$$H = E + pV. \quad (7.27)$$

Для энтальпии легко получить выражение вида

$$\delta H = T\delta S + V\delta p, \quad (7.28)$$



откуда:

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_p ; \quad (7.29)$$

$$V = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_S . \quad (7.30)$$

Если состояние системы (кроме объема) зависит от других внешних параметров λ , то формулы для потенциалов могут быть обобщены в следующем виде

$$\begin{aligned} \delta F &= -S\delta T - p\delta V - \Lambda\delta\lambda \\ \delta\Phi &= S\delta T - V\delta p - \Lambda\delta\lambda \\ \delta H &= S\delta T + V\delta p - \Lambda\delta\lambda \end{aligned} \quad (7.31)$$

и соответственно, средняя сила, действующая на систему при изменении параметра λ , определяется как

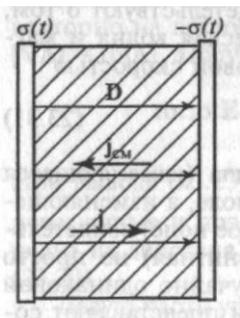
$$\Lambda = -\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)_{T,V} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_{S,V} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{T,p} . \quad (7.32)$$

Отметим, что термодинамические потенциалы и их производные полностью определяют термодинамическое поведение произвольной системы.



ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор медленно разряжается объемными токами проводимости, возникающими в диэлектрике между обкладками из-за наличия слабой электрической проводимости. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить напряженность магнитного поля внутри конденсатора.



Решение. Если σ — поверхностная плотность заряда на положительной обкладке с.), то электрическая индукция внутри конденсатора $D = \sigma$. Следовательно, плотность а смещения по определению (см. формулу !)) равна

$$j_{cm} = \frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} < 0,$$

так как σ в результате разрядки уменьшается, значит, ток смещения направлен от отрицательной к положительной обкладке. Ток проводимости приводит к изменению заряда на обкладке. Заряд, который он уносит за время dt : $dq = Idt$, равен уменьшению заряда на обкладке конденсатора ($Sd\sigma$), т. е.

$$Sd\sigma = -Idt.$$

Отсюда плотность тока проводимости

$$j = \frac{I}{S} = \frac{d\sigma}{dt} > 0,$$

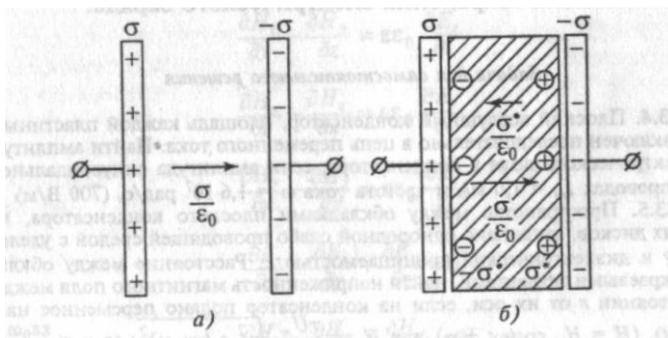
т. е. ток проводимости направлен от положительной обкладки к отрицательной.



$$\text{Плотность полного тока } \mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\sigma}{dt} = 0.$$

Но именно полный ток определяет магнитное поле в окружающем пространстве, согласно второму уравнению Максвелла. Поскольку $\mathbf{j}_{\text{полн}} = 0$, то и напряженность магнитного поля равна нулю.

Задача 2. Длинный цилиндрический конденсатор заряжается от источника электричества. Доказать, что ток смещения в диэлектрике, заполняющем пространство между обкладками конденсатора, равен току проводимости в подводящей цепи. Считать диэлектрик идеальным изолятором, и искажениями поля у концов конденсатора пренебречь.



Решение. Для определенности предположим, что внутренняя обкладка конденсатора заряжается положительно. Построим внутри конденсатора мысленную цилиндрическую поверхность некоторого радиуса r и высотой l , где l — длина конденсатора (рис.).

Используя теорему Гаусса, легко рассчитать величину электрической индукции внутри диэлектрика на расстоянии r от оси конденсатора:



Физика

$$D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

где $\lambda = \frac{q}{l}$ — линейная плотность заряда на обкладке.

Плотность тока смещения внутри диэлектрика на расстоянии r от оси

$$j_{см}(r) = \frac{dD(r)}{dt} = \frac{1}{2\pi \cdot r} \frac{dq}{dt},$$

где q - заряд на обкладке конденсатора. Тогда ток смещения через боковую поверхность вспомогательного цилиндра, т. е. ток смещения в диэлектрике, будет равен

$$I_{см} = \int_{S_6} \frac{1}{2\pi \cdot r \cdot l} \cdot \frac{dq}{dt} dS = \frac{1}{2\pi \cdot r} \cdot \frac{dq}{dt} \int_{S_6} dS = \frac{dq}{dt}.$$

Но $\frac{dq}{dt} = I$ - это ток зарядки конденсатора. Таким образом,

$I = I_{см}$ задача доказана.

Задача 3. Доказать, что из уравнений Максвелла вытекает уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения электрического заряда.

Решение. Запишем второе и третье уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$\text{rot}\bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$



$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho.$$

Поддействуем оператором набла скалярно на первое уравнение:

$$\operatorname{div} \cdot \operatorname{rot} \bar{H} = \operatorname{div} \bar{j} + \operatorname{div} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \operatorname{div} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{D},$$

(учтено, что операторы div и $\frac{\partial}{\partial t}$ коммутируют). С учетом другого уравнения Максвелла получаем

$$\operatorname{div} \cdot \operatorname{rot} \bar{H} = \operatorname{div} \bar{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Но дивергенция ротора любого вектора тождественно равна нулю, поскольку $\operatorname{div} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla [\nabla \mathbf{H}]$, а векторы ∇ , $[\nabla \mathbf{H}]$ всегда взаимно перпендикулярны (по свойству векторного произведения) и, следовательно, их скалярное произведение равно нулю. Итак, мы получили

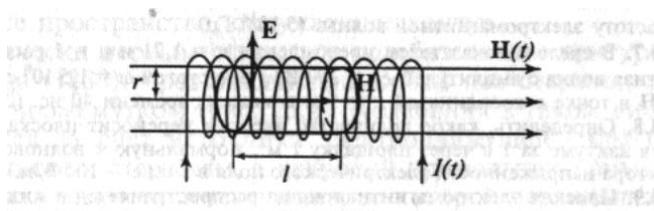
$$\operatorname{div} \bar{j} + \operatorname{div} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \bar{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

но это и есть уравнение непрерывности. Таким образом, обобщение теоремы о циркуляции напряженности магнитного поля путем введения тока смещения, по сути дела, являлось необходимым условием согласования уравнений Максвелла с уравнением непрерывности, т. е. с фундаментальным законом сохранения электрического заряда.

Задача 4. Сила тока в очень длинном соленоиде увеличивается равномерно от нуля до I в течение времени τ . Число витков соленоида на единицу длины равно n . Построив внутри соленоида в средней его части коаксиальную с ним воображаемую замкнутую поверхность длины l и радиуса r (рис.), определить энергию, протекают через эту



поверхность за время τ .



Решение. Напряженность магнитного поля, создаваемого длинным соленоидом, как известно, определяется формулой $H(t) = nI(t)$. Поскольку ток в цепи соленоида растёт, то напряженность магнитного поля (силовые линии которого направлены вдоль оси соленоида) будет увеличиваться. Но возрастающее магнитное поле породит вихревое электрическое поле. Силовые линии этого поля будут иметь вид концентрических окружностей, причем их направление, в согласии с правилом Ленца, должно быть таким, чтобы соответствующий индукционный ток (который возник бы, если бы среда внутри соленоида была проводящей) имел магнитный момент, направленный против изменения магнитного поля соленоида. Нетрудно убедиться, что вектор напряженности вихревого электрического поля ориентирован таким образом, что векторное произведение $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ на боковой поверхности воображаемой фигуры будет направлено внутрь этой фигуры. Таким образом, направление вектора Пойнтинга, а значит, и направление потока энергии электромагнитного поля таково, что можно говорить о поступлении энергии внутрь этой фигуры.

Из закона электромагнитной индукции имеем

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = E 2\pi r = \int \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\sigma = -\mu_0 n \frac{dl}{dt} \pi r^2,$$

откуда модуль напряженности вихревого электрического поля равен

$$E(t) = \frac{\mu_0 n r}{2} \frac{dl}{dt}$$

Плотность тока энергии через боковую поверхность воображаемой фигуры

$$S = EH = \frac{\mu_0 n^2 r}{2} I \frac{dl}{dt} \Rightarrow dW = S \sigma dt = \frac{\mu_0 n^2 r}{2} \sigma I dl$$



Получаем энергию, поступившую внутрь фигуры при увеличении тока от нуля до I

$$W = \int \frac{\mu_0 n^2 r}{2} 2\pi r l I dl = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} (\pi r^2 l) = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} V$$

Но эта величина в точности совпадает с полной энергией магнитного поля, сосредоточенной внутри воображаемой фигуры к моменту времени, когда ток в соленоиде достигнет значения I (действительно

$$W = w_H V \frac{\mu_0 H^2}{2} V = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} V).$$



ТЕМЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ «СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ФИЗИКИ»

Вариант	Номер задачи					
	1	20	21	40	41	10
0	1	20	21	40	41	10
1	2	19	22	39	42	9
2	3	18	23	38	43	8
3	4	17	24	37	44	7
4	5	16	25	36	45	6
5	6	15	26	35	46	5
6	7	14	27	34	47	4
7	8	13	28	33	48	3
8	9	12	29	32	49	2
9	10	11	30	31	50	1

1. Применить теорему Остроградского-Гаусса к потоку вектора A .
2. Применить теорему Стокса к циркуляции вектора E .
3. Вывести уравнение непрерывности.
4. Доказать, что из уравнений Максвелла вытекает уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения заряда.
5. Доказать, что уравнения Максвелла $\text{rot } E = - \partial B / \partial t$ и $\text{div } B = 0$ совместимы, т.е. не противоречат друг другу.
6. Используя операцию дивергенция, получить второе уравнение Максвелла.
7. Используя операцию дивергенция, получить четвёртое уравнение Максвелла.
8. На основе формальных рассуждений, не противоречащих закону сохранения заряда, получить явный вид тока смещения
9. Длинный цилиндрический конденсатор заряжается от источника электричества. Доказать, что ток смещения в диэлектрике $\epsilon = 2$ (между обкладками) равен току проводимости в подводящей цепи. Считать диэлектрик идеальным изолятором.
10. Описать векторное поле по его дифференциальным характеристикам (вывести формулы).
11. Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор медленно разряжается токами проводимости, возникающими в диэлектрике между обкладками из-за наличия слабой электрической проводимости. Вычислить напряженность магнитного поля внутри конденсатора.



12. В однородной и изотропной среде $\epsilon = 1$ и $\mu = 1$ распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 10$ В/м. Найти амплитуду напряженности магнитного поля волны и скорость распространения волны.

13. Написать уравнение плоской электромагнитной волны в вакууме, если при прохождении этой волны в стекле на расстоянии 200 нм фаза колебаний изменилась на величину $3\pi/2$ и приняла значение $\varphi = \pi/4$.

14. В среде с параметрами $n = 1,71$ и $\mu = 1$ распространяется электромагнитная волна с амплитудой $E_0 = 200$ В/м и частотой $\omega = 1,5 \cdot 10^8$ Гц. Найти модуль вектора H в точке с координатой $x = 5$ м в момент времени 40 нс.

15. Электромагнитная волна распространяется в немагнитной среде. Отношение векторов напряженностей электрического и магнитного полей в этой среде равно 251,2 В/А. Фаза колебаний в волне на расстоянии 100 нм изменяется на величину $\Delta\varphi = \pi/2$. Определить частоту электромагнитной волны.

16. В некоторый момент времени вектор напряженности электрического поля в плоской электромагнитной волне частотой $\omega = 3 \cdot 10^{10}$ Гц в вакууме был равен $E = 0,5 E_0 = 200$ В/м. Определить через какой промежуток времени в этой же точке вектор напряженности магнитного поля будет равен $H = 1,062$ А/м.

17. Описать электромагнитное поле векторным A и скалярным φ потенциалами.

18. В среде с параметрами $n = 1,5$ и $\mu = 1$ распространяется электромагнитная волна с амплитудой $E_0 = 100$ В/м и частотой $\omega = 2 \cdot 10^8$ Гц. Найти модуль вектора H в точке с координатой $x = 3$ м в момент времени 20 нс.

19. В некоторый момент времени вектор напряженности электрического поля в плоской электромагнитной волне частотой $\omega = 2 \cdot 10^{10}$ Гц в вакууме был равен $E = 0,5 E_0 = 100$ В/м. Определить через какой промежуток времени в этой же точке вектор напряженности магнитного поля будет равен $H = 0,6$ А/м.

20. В среде с параметрами $n = 1,7$ и $\mu = 1$ распространяется электромагнитная волна с амплитудой $E_0 = 150$ В/м и частотой $\omega = 3 \cdot 10^8$ Гц. Найти модуль вектора H в точке с координатой $x = 2$ м в момент времени 10 нс.

21. Определить какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 1 секунду через площадку 1 м^2 , нормальную волновому вектору k . Амплитуда вектора напряженности электрического поля в волне 100 В/м.

22. Определить, какое количество энергии переносит плоская



Физика

электромагнитная волна в вакууме за 10 секунду через площадку 10 м^2 , нормаль которой составляет угол 30 градусов с волновым вектором. Амплитуда вектора напряженности электрического поля в волне 150 В/м .

23. Определить, какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 5 секунд через площадку 2 м^2 , нормаль которой составляет угол 60 градусов с волновым вектором. Амплитуда вектора напряженности электрического поля в волне 250 В/м .

24. Определить, какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 1 секунду через площадку 10 м^2 , нормальную к волновому вектору. Амплитуда вектора напряженности электрического поля в волне 200 В/м .

25. Атом излучает электромагнитные волны и находится в возбужденном состоянии в течение времени τ . Зависимость напряженности электрического поля атома от времени дается формулой $E(t) = E_0 e^{-(t/\tau + i\omega_0 t)}$. Определить ширину линии, излучаемой атомом.

26. Описать распространение электромагнитных волн в пространстве между проводящими плоскостями, разделенными диэлектриком. Расстояние между плоскостями d , диэлектрическая постоянная среды ϵ .

27. Определить, какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 10 секунд через площадку 1 м^2 , нормаль которой составляет угол 30° с волновым вектором. Амплитуда вектора напряженности электрического поля в волне 200 В/м .

28. Определить, какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 8 секунд через площадку 15 кв.м , нормаль которой составляет угол 45 градусов с волновым вектором. Амплитуда вектора напряженности электрического поля в волне 300 В/м .

29. В однородной и изотропной среде $\epsilon = 3$ и $\mu = 1$ распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 100 \text{ В/м}$. Найти амплитуду напряженности магнитного поля волны и скорость распространения волны.

30. Определить, какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 7 секунд через площадку 5 кв.м , нормаль которой составляет угол 30 градусов с волновым вектором. Амплитуда вектора напряженности электрического поля в волне 300 В/м .

31. В однородной и изотропной среде $\epsilon = 2$ и $\mu = 1$ распро-



страняется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 150$ В/м. Найти скорость распространения волны в среде.

32. В однородной и изотропной среде $\epsilon = 4$ и $\mu = 2$ распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 190$ В/м. Найти амплитуду напряженности магнитного поля волны и скорость распространения волны.

33. В среде с параметрами $n = 2.5$ и $\mu = 1$ распространяется электромагнитная волна с амплитудой $E_0 = 200$ В/м и частотой $\omega = 3 \cdot 10^8$ Гц. Найти модуль вектора H в точке с координатой $x = 2$ м в момент времени 10 нс.

34. В среде с параметрами $n = 1.5$ и $\mu = 1$ распространяется электромагнитная волна с амплитудой $H_0 = 100$ А/м и частотой $\omega = 2 \cdot 10^8$ Гц. Найти модуль вектора E в точке с координатой $x = 3$ м в момент времени 20 нс.

35. В однородной и изотропной среде $\epsilon = 3.5$ и $\mu = 2$ распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны $H_0 = 250$ А/м. Найти амплитуду напряженности электрического поля волны и скорость распространения волны.

36. Определить, какое количество энергии переносит плоская электромагнитная волна в вакууме за 12 секунд через площадку 35 кв.м, нормаль которой составляет угол 45 градусов с волновым вектором. Амплитуда вектора напряженности магнитного поля в волне 230 А/м.

37. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с ω порядка 10^{10} с^{-1} . Амплитуда колебаний электрического поля $E_0 = 0.8$ В/м. На пути волны располагается поглощающий экран радиусом $r = 0.6$ м. Какую энергию поглотит экран за время 2 с?

38. Определить напряженность электрического поля в лазерном излучении, прошедшем в вакууме расстояние 100 м, если мощность импульса $5 \cdot 10^{10}$ Вт, а расхождение пучка 0.5 мрад.

39. Найти амплитудное значение напряженности электрического поля излучения лазера, если известны его параметры: длительность импульса 0.12 мс, энергия импульса 1.5 Дж, диаметр пучка 3 мм.

40. Получить потенциалы поля вдали от излучателя.

41. Найти собственные значения энергии частицы массой m , находящейся в двумерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме, имеющей размеры: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

42. Описать распространение электромагнитных волн в пространстве между проводящими плоскостями, разделенными диэлек-



триком. Расстояние между плоскостями d , диэлектрическая постоянная среды ε .

43. Определить уровни энергии атома водорода, свободно движущегося в объеме, ограниченном: $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$.

44. Найти напряженность, 3-и дисперсии и граничную частоту для ТЕ- и ТН- волн, в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками, имеющими размеры a и b .

45. Найти траекторию движения заряженной частицы в однородном электрическом поле с напряженностью E_0 .

46. В среде, движущейся со скоростью U относительно некоторой системы K , распространяется плоская электромагнитная волна. Найти скорость распространения волны в системе K , если показатель преломления среды n . Рассмотреть также случай $U \ll c$.

47. Считая, что при малых скоростях частицы выполняется условие $p^2 \ll m^2 c^2$, найти зависимость энергии частицы от импульса до члена порядка $(p^2 / m^2 c^2)^2$.

48. Получить выражение для потенциалов равномерно движущегося заряда со скоростью U_0 .

49. Получить выражение для напряженности электрического и магнитного полей движущегося заряда со скоростью U_0 .

50. Определить уровни энергии частицы, находящейся в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, при $x=0$ и $x=a$.



ЛИТЕРАТУРА

1. **Курс физики.** В 3 кн. Кн. 2. Физические основы электромагнитных явлений: Учебник / Г.А. Бордовский, Ю.А. Гороховатский, А.Д. Суханов, Д.Э. Темнов; Под ред. Г.А. Бордовского.- М.: Высш.шк., 2004.- 424 с.: ил.
2. Левич В.Г. **Курс теоретической физики.** Т. 1 – М.: Наука, 1969. – 912 с.
3. Илясов В.В., Жданова Т.П. Физические основы генерации плазменного излучения: Учеб. пособие.- Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2008.- 76с.