

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ФИЗИКИ

Лаборатория

«Инновационные технологии обучения физике и КСЕ»

## *Проверка теоремы Штейнера*

Методические указания к лабораторной работе № М-2

Ростов-на-Дону

2010

Составители: А.П.Кудря, Т.П.Жданова, И.Г.Попова.

УДК 530.1

Проверка теоремы Штейнера: метод. указания. Ростов-на-Дону/  
Издательский центр ДГТУ. 2010. 10с

Методические указания предназначены для организации самостоятельной работы студентов при подготовке к лабораторному практикуму на оборудовании фирмы «PHUWE» и рейтинговому контролю.

Печатается по решению методической комиссии факультета  
«Нанотехнологии и композиционные материалы»

Научный редактор проф., д.т.н. В.С.Кунаков

© Издательский центр ДГТУ, 2010



## Проверка теоремы Штейнера

ЛЭФ  
1.3.31  
-00

**Цель работы.** *Определить: 1) угловой коэффициент упругости спиральной пружины; 2) момент инерции двух полых цилиндров. Проверить аддитивность момента инерции и теорему Штейнера.*

**Оборудование.** В комплект экспериментальной установки входят: вращающийся вал, на который устанавливают стержень или диск; два полых толстостенных цилиндра; динамометр; масштабная линейка; световой барьер со счетчиком; источник питания (рис.1).



Рис. 1. Внешний вид установки

## Краткая теория

Закрепим диск на вращающийся вал и повернем его на угол  $\varphi_0 \approx 90^\circ$ . Если предоставить систему самой себе, то в ней возникнут свободные крутильные колебания: потенциальная энергия спиральной пружины будет переходить в кинетическую энергию диска и наоборот. В реальных условиях под действием моментов сил трения в подшипниках и сопротивления воздуха диск совершает затухающие колебания. При слабом затухании в пределах одного периода потерями механической энергии можно пренебречь ввиду их малости, а закон сохранения механической энергии имеет вид

$$\frac{G \cdot \varphi_0^2}{2} = \frac{I \cdot \omega_m^2}{2}, \quad (1)$$

где  $G$  - угловой коэффициент упругости спиральной пружины;  $I$  - момент инерции диска;  $\omega_m$  - максимальная угловая скорость диска.

При слабом затухании механические колебания можно считать гармоническими. Угловое перемещение  $\varphi$  в момент времени  $t$  описывается уравнением

$$\varphi = \varphi_0 \cos \Omega_0 t, \quad (2)$$

где  $\Omega_0$  - собственная циклическая частота свободных колебаний диска. Циклическая частота связана с периодом  $T$  свободных колебаний соотношением

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (3)$$

Модуль угловой скорости маятника определим как первую производную от углового перемещения (2)

$$\omega = \dot{\varphi} = -\varphi_0 \Omega_0 \sin \Omega_0 t = -\omega_m \sin \Omega_0 t, \quad (4)$$

где  $\varphi_0 \Omega_0 = \omega_m$  - максимальная угловая скорость диска. (5)

Если подставить максимальную скорость диска в уравнение (1)  $G\varphi_0^2 = I \cdot \varphi_0^2 \cdot \Omega_0^2$ , то получим формулу, с помощью которой можно определить момент инерции диска

$$I = \frac{G}{\Omega_0^2}. \quad (6)$$

Совместное решение уравнений (3) и (6) позволяет определить момент инерции диска по его периоду крутильных колебаний:

$$I = \frac{G \cdot T^2}{4\pi^2}. \quad (7)$$

Формула (7) является универсальной, с ее помощью можно определить момент инерции любого твердого тела, способного совершать крутильные колебания.

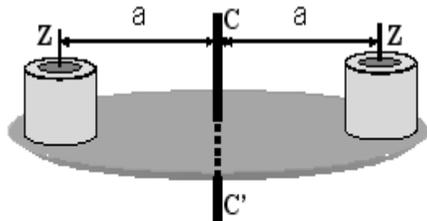


Рис. 2. Принципиальная схема установки для проверки теоремы Штейнера

Если на диск установить, например, два полых толстостенных цилиндра на расстоянии  $a$  от оси вращения (рис.2), то увеличится момент инерции  $I_0$  системы и, следовательно, период колебаний. Момент инерции цилиндров относительно оси  $CC'$  с учетом аддитивности определяется разностью:

$$I_{CC'} = I_0 - I, \quad (8)$$

где  $I_0$  – момент инерции диска с цилиндрами;  $I$  – момент инерции диска без цилиндров.

Теоретическое значение момента инерции цилиндров относительно оси  $CC'$  можно оценить с помощью теоремы Штейнера:

$$I_{CC'_{теор}} = 2 \cdot \left( \frac{m}{2} (R^2 + r^2) + ma^2 \right), \quad (9)$$

где  $R$  и  $r$  – внешний и внутренний радиусы цилиндров соответственно;  $m$  – масса цилиндра,  $a$  – расстояние от оси симметрии цилиндров  $Z$  до оси вращения  $CC'$ .

## Выполнение работы

### Задание 1. Определение углового коэффициента упругости пружины

1. Для определения углового коэффициента упругости закрепите стержень на вращающемся валу (рис.1). Кольцо динамометра оденьте на стержень на расстоянии  $r$  от оси вращения (это плечо силы). Линейкой измерьте плечо силы. Под действием момента

силы  $M = Fr$  поверните стержень на угол  $\varphi$ . При измерении силы динамометр должен находиться под прямым углом к плечу рычага.

2. Измерьте силу при помощи динамометра для углов поворота стержня  $\pi$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$ ,  $4\pi$ . Исходя из требований к безопасности и устойчивости

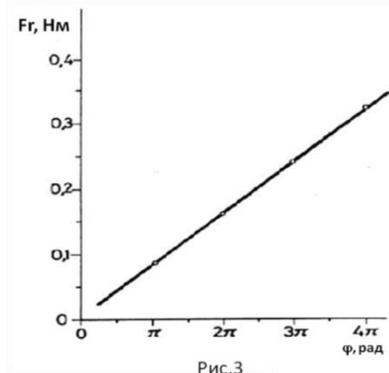


Рис.3

вращающегося вала, не рекомендуется перегибать пружину на  $\pm 720^\circ$ .

3. Постройте график зависимости момента силы спиральной пружины от угла ее закручивания. Из графика (рис.3) найдите тангенс угла наклона, численное значение которого равно угловому коэффициенту упругости пружины:  $G = M/\varphi = (F \cdot r)/\varphi$ .

**Задание 2. Определение момента инерции двух полых толстостенных цилиндров.**

1. Закрепите однородный диск на вращающемся валу (рис.1).
2. Несколько раз (5-7) измерьте период крутильных колебаний диска. Для измерения периода колебаний на диск прикрепите листок бумаги (ширина  $\leq 3$  мм). Разместите диск так, чтобы листок находился точно под световым барьером. Световой барьер включите в сеть и выберите режим . Отклоните диск приблизительно на  $90^\circ$ . Нажатием кнопки в верхнем левом углу включите световой барьер и освободите диск. Измерьте величину периода для каждого случая.
3. Вычислите среднее значение периода крутильных колебаний диска.
4. По среднему значению периода определите по формуле (7) момент инерции однородного диска  $I$ .
5. Установите в центр диска два полых цилиндра и повторите пункт 2.
6. По среднему значению периода  $T_0$  определите момент инерции  $I_0$  диска с цилиндрами.
7. Вычислите момент инерции двух цилиндров относительно их оси симметрии  $Z$ :  $I_z = I_0 - I$ .
8. С помощью рычажных весов измерьте массу цилиндра  $m$ .

9. Найдите теоретическое значение момента инерции цилиндров по формуле:  $I_{Z_{теор}} = m(R^2 + r^2)$ ;  $R = 15 \text{ мм}$ ,  $r = 3 \text{ мм}$ .

10. Результаты измерений и вычислений занесите в таблицу 1.

Таблица 1

№	T	I	T <sub>0</sub>	I <sub>0</sub>	I <sub>Z</sub>	R	r	I <sub>Z теор</sub>
п/п	с	кг м <sup>2</sup>	с	кг м <sup>2</sup>	кг м <sup>2</sup>	10 <sup>-3</sup> м	10 <sup>-3</sup> м	кг м <sup>2</sup>
1								
2								
3								
Ср.								

11. Сравните результаты эксперимента с теоретическим значением момента инерции цилиндров, оцените погрешность и сделайте вывод.

**Примечание.** Алгоритм обработки прямых и косвенных измерений приведен в приложении.

### **Задание 3.** Проверка теоремы Штейнера.

1. Установите цилиндры на расстоянии  $a$  (20-90 мм) от оси вращения.

2. Несколько раз (5-7) измерьте период колебаний диска с цилиндрами.

3. По среднему значению периода  $T_0$  определите по формуле (7) момент инерции диска с цилиндрами.

4. Вычислите момент инерции двух цилиндров относительно оси  $CC'$ :  $I_{CC'} = I_0 - I$ , где  $I$  – момент инерции диска (см. задание 2).

5. Найдите теоретическое значение момента инерции цилиндров по формуле:  $I_{CC' теор} = I_{Z теор} + 2ma^2$ .

6. Результаты измерений и вычислений занесите в таблицу 2.

Таблица 2

№	$T_0$	$I_0$	$I_{cc'}$	$a$	$I_{cc'} \text{ теор}$	$\Delta I$	$\varepsilon$
п/п	с	кг м <sup>2</sup>	кг м <sup>2</sup>	10 <sup>-3</sup> м	кг м <sup>2</sup>	кг м <sup>2</sup>	%
1							
2							
3							
4							
5							
Ср.							

7. Сравните результаты эксперимента с теоретическим значением момента инерции цилиндров, оцените погрешность и сделайте вывод.

### Контрольные вопросы

1. Что называется моментом инерции твердого тела?
2. В чем состоит смысл аддитивности момента инерции?
3. Сформулируйте теорему Штейнера.
4. Какие энергетические преобразования происходят в системе, совершающей крутильные колебания?
5. Выведите формулу, позволяющую определить момент инерции твердого тела методом крутильных колебаний.

### Рекомендуемая литература

1. Савельев И.В. Курс физики. Т2/ И.В. Савельев. - М.: Наука. 1989. §§ 64.
2. Савельев И.В. Курс физики. Т1/ И.В. Савельев. - М.: Наука. 1989. §§ 32,33.
3. Трофимова Т.И. Курс физики/ Т.И. Трофимова. - М.: Высшая школа. 2003. §§ 16, 17, 141.
4. Федосеев В.Б. Физика/ В.Б. Федосеев. - Ростов-на-Дону: Феникс. 2009.
5. Инструкция по эксплуатации оборудования фирмы "PHYWE".

## Приложение

### Статистическая обработка прямых измерений

1. Измеренный несколько раз период крутильных колебаний и его среднее значение занесите в таблицу 3.
2. Определите абсолютные погрешности отдельных измерений:  $\Delta T_i = | \langle T \rangle - T_i |$ .
3. Возведите в квадрат абсолютные погрешности отдельных измерений:  $\Delta T_1^2, \Delta T_2^2, \Delta T_3^2 \dots$
4. Вычислите стандартный доверительный интервал по формуле:

$$S_{T,n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta T_i^2}{n(n-1)}} \cdot$$

5. При заданном преподавателем значении доверительной вероятности  $\alpha$  записать соответствующий коэффициент Стьюдента  $t(\alpha, n)$ . Найти случайную погрешность по формуле:  $\Delta T_{сл} = t(\alpha, n) S_{T,n}$ .
6. С учетом приборной погрешности  $\Delta T_{пр}$  рассчитать величину доверительного интервала по формуле:

$$\Delta T = \sqrt{(\Delta T_{сл})^2 + (\Delta T_{пр})^2}$$

7. Результаты вычислений занести в таблицу 3.
8. Результаты измерений представьте в виде:  $T = \langle T \rangle + \Delta T$ .

Таблица 3

№	T	ΔT	ΔT <sup>2</sup>	S <sub>T,n</sub>	t(α,n)	ΔT <sub>сл</sub>	ΔT <sub>пр</sub>	ΔT
п/п	с	с	с <sup>2</sup>	с	—	с	с	с
1.								
2.								
...								
7.								
Ср.								

### Обработка косвенных измерений

1. Средние значения периода, углового коэффициента упругости пружины и момента инерции занесите в таблицу 4.
2. Получите формулу относительной погрешности. Для этого необходимо:
  - а) расчетную формулу (9) прологарифмировать  
 $\ln I = \ln G + 2 \ln T - \ln 4\pi^2$ ;
  - б) взять полный дифференциал от натурального логарифма:  
 $dI/I = dG/G - 2dT/T$ ;
  - в) сгруппировать члены с одинаковым дифференциалом, знаки «-», стоящие перед дифференциалом, заменить на знак «+», а знак дифференциала  $d$  заменить на знак приращения  $\Delta$ :  
 $\varepsilon_I = \Delta I / \langle I \rangle = \Delta G / \langle G \rangle + 2 \Delta T / \langle T \rangle$ .
3. Вычислите относительную погрешность  $\varepsilon_I$  и доверительный интервал:  $\Delta I = \varepsilon_I \langle I \rangle$ .
4. Повторите вычисления (см. пункты 1-3) относительной погрешности и доверительного интервала для момента инерции  $I_0$ .
5. Вычислите относительную погрешность для двух цилиндров относительно их оси симметрии  $Z$  по формуле:

$$\varepsilon_{I_z} = \frac{\Delta I_z}{I_z} = \frac{\Delta I + \Delta I_0}{I_0 - I}$$

6. Вычислите доверительный интервал  $\Delta I_z$ .
7. Результаты вычислений занесите в сводную таблицу 4.

Таблица 4

	G (Нм/рад)	T (с)	T <sub>0</sub> (с)	I (кгм <sup>2</sup> )	I <sub>0</sub> (кг м <sup>2</sup> )	I <sub>z</sub> (кгм <sup>2</sup> )
<A>						
ε	0.01					
ΔA						

8. Результаты измерений представьте в виде:  $I_z = \langle I_z \rangle + \Delta I_z$ .