



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Физика»

## Практикум

Лабораторная работа № М11  
«Проверка теоремы Штейнера»  
по дисциплине

«Физика»

Авторы  
Жданова Т. П.,  
Кудря А. П.,  
Лемешко Г. Ф.,  
Попова И. Г.

Ростов-на-Дону, 2020

## Аннотация

Настоящая лабораторная работа посвящена проверке теоремы Штейнера и аддитивности момента инерции.

Методические указания предназначены для организации самостоятельной работы студентов всех форм обучения, изучающих физику, при подготовке к лабораторному практикуму и рейтинговому контролю.

## Авторы

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Физика»

Жданова Т.П.,

ст. преподаватель кафедры «Физика»

Кудря А.П.,

к.ф.-м.н., профессор кафедры «Физика»

Лемешко Г.Ф.,

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Физика»

Попова И.Г.



## Оглавление

<b>Краткая теория .....</b>	<b>4</b>
<b>Вывод рабочей формулы.....</b>	<b>6</b>
<b>Ход работы.....</b>	<b>7</b>
<b>Приложение 1 .....</b>	<b>12</b>
<b>Приложение 2.....</b>	<b>14</b>
<b>Контрольные вопросы .....</b>	<b>15</b>
<b>Рекомендуемая литература.....</b>	<b>15</b>

- Цель работы:** 1. Проверка теоремы Штейнера.  
2. Проверка аддитивности момента инерции.

**Оборудование:** В комплект экспериментальной установки входят: вращающийся вал, на который устанавливают твёрдое тело, динамометр, масштабная линейка, световой барьер со счетчиком, источник питания, два полых толстостенных цилиндра, несколько тел правильной геометрической формы.

## КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

**Моментом инерции материальной точки** называется скалярная величина, равная произведению массы точки на квадрат расстояния от точки до оси вращения:

$$I = m \cdot r^2.$$

**Моментом инерции твердого тела** называется сумма моментов инерции материальных точек, из которых состоит тело:

$$I = \sum_i m_i r_i^2.$$

**Момент инерции** – это мера инертности при вращательном движении (в этом состоит физический смысл момента инерции).

В случае непрерывного распределения масс момент инерции может быть определен интегралом:  $I = \int r^2 dm$ , где интегрирование ведется по всему объёму тела. Величина  $r$  – функция положения точки с координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Момент инерции зависит от массы тела и распределения ее относительно оси вращения.

Теорема Штейнера

$$I = I_c + ma^2,$$

где  $I_c$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс;  $I$  – момент инерции этого тела относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии  $a$ ;  $m$  – масса тела.

**Аддитивность момента инерции** заключается в том, что момент инерции объекта, состоящего из нескольких тел, равен алгебраической сумме моментов инерции этих тел.

**Моменты инерции** тел правильной геометрической формы относительно оси, проходящей через центр масс (тела считаются однородными;  $m$  – масса тела):

Тело	Момент инерции
Обруч или полый тонкостенный цилиндр радиусом $R$	$mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиусом $R$	$\frac{mR^2}{2}$
Прямой тонкий стержень длиной $l$	$\frac{ml^2}{12}$
Шар радиусом $R$	$\frac{2}{5}mR^2$
Толстостенный полый цилиндр ( $R, r$ - внешний и внутренний радиус соответственно)	$\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$

**Моментом силы относительно неподвижной точки** называется векторная физическая величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из данной точки в точку приложения силы, на силу  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Модуль момента силы относительно неподвижной оси:

$$M = Fr \sin \alpha = Fl,$$

где  $l = r \sin \alpha$  – плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения);  $\alpha$  – угол между направлениями силы и радиус-вектора. Направление момента силы совпадает с осью, относительно которой происходит вращение, и может быть определено по правилу буравчика.

**Основное уравнение динамики вращательного движения** твердого тела относительно неподвижной оси  $Z$ :

$$M_Z = I_Z \frac{d\omega}{dt} = I_Z \varepsilon,$$

где  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$  – угловое ускорение;  $I_Z$  – момент инерции тела относительно оси  $Z$ ,  $M_Z$  – момент силы относительно оси  $Z$ .

## ВЫВОД РАБОЧЕЙ ФОРМУЛЫ

Закрепим диск на вращающийся вал и повернем его на угол  $\varphi_0 \approx 90^\circ$ . Если предоставить систему самой себе, то в ней возникнут свободные крутильные колебания: потенциальная энергия спиральной пружины будет переходить в кинетическую энергию диска и наоборот. В реальных условиях под действием моментов сил трения в подшипниках и сопротивления воздуха диск совершает затухающие колебания. При слабом затухании в пределах одного периода потерями механической энергии можно пренебречь ввиду их малости, а закон сохранения механической энергии имеет вид

$$\frac{G \cdot \varphi_0^2}{2} = \frac{I \cdot \omega_m^2}{2}, \quad (1)$$

где  $G$  - угловой коэффициент упругости спиральной пружины;  $I$  - момент инерции диска;  $\omega_m$  - максимальная угловая скорость диска.

При слабом затухании механические колебания можно считать гармоническими. Угловое перемещение  $\varphi$  в момент времени  $t$  описывается уравнением

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega_0 t, \quad (2)$$

где собственная циклическая частота свободных колебаний диска  $\omega_0$  связана с периодом  $T$  соотношением

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (3)$$

Модуль угловой скорости маятника определим, как первую производную от углового перемещения (2)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_0 \omega_0 \sin \omega_0 t = -\omega_m \sin \omega_0 t, \quad (4)$$

где  $\varphi_0 \omega_0 = \omega_m$  - максимальная угловая скорость диска.

Подставим максимальную скорость диска в уравнение (1) :

$$G \varphi_0^2 = I \cdot \varphi_0^2 \cdot \omega_0^2. \quad (5)$$

Получаем формулу, с помощью которой можно определить момент инерции диска

$$I = \frac{G}{\omega_0^2}. \quad (6)$$

Совместное решение уравнений (3) и (6) позволяет определить момент инерции диска по его периоду крутильных колебаний:

$$I = \frac{G \cdot T^2}{4\pi^2}, \quad (7)$$

где  $G$  - угловой коэффициент упругости спиральной пружины (указан на рабочем месте),  $T$  - период свободных колебаний.

## ХОД РАБОТЫ

### *Задание 1. Проверка теоремы Штейнера*



Рис.1

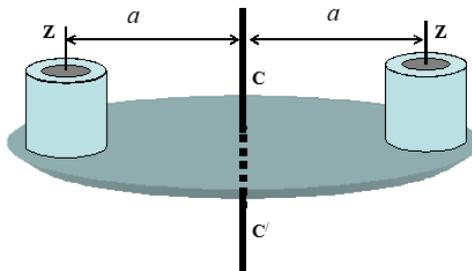


Рис.2

1. Занесите значения массы цилиндра  $m$  и коэффициент упругости пружины  $G$  в таблицу 1 (указаны на рабочем месте).
2. Закрепите однородный диск на вращающемся валу (рис.1).
3. Для измерения периода колебаний на диск прикрепите листок бумаги (ширина  $\leq 3$  мм). Установите диск так, чтобы листок находился точно под световым барьером. Световой барьер включите в сеть и выберите режим . Отклоните диск на  $\approx 90^\circ$ . Нажатием кнопки в верхнем левом углу включите световой барьер и освободите диск.
4. Измерьте величину периода крутильных колебаний диска  $T_0$  пять раз. Вычислите среднее значение периода крутильных колебаний диска  $\langle T_0 \rangle$ . Результаты занесите в таблицу 1.
5. По **среднему** значению периода определите по формуле (7) момент инерции однородного диска  $\langle I_0 \rangle$ .
6. Установите в центр диска два цилиндрика. Измерьте величину периода крутильных колебаний  $T_1$  диска с двумя цилиндриками пять раз. Вычислите среднее значение периода крутильных колебаний диска  $\langle T_1 \rangle$ . Результаты занесите в таблицу 1.
7. По среднему значению периода определите момент инерции  $\langle I_1 \rangle$  диска с цилиндриками по формуле (7).
8. Вычислите момент инерции двух цилиндриков относительно их оси симметрии  $CC'$  (см. рис. 2) по формуле:  $I_1^{CC'} = \langle I_1 \rangle - \langle I_0 \rangle$ .

Таблица 1

№ п/п	$m =$		$G =$			$a =$			
	$T_0$	$I_0$	$T_1$	$I_1$	$I_1^{CC'}$	$T_2$	$I_2$	$I_2^{CC'}$	$I_{TEOP}^{CC'}$
	с	кг м <sup>2</sup>	с	кг м <sup>2</sup>	кг м <sup>2</sup>	с	кг м <sup>2</sup>	кг м <sup>2</sup>	кг м <sup>2</sup>
1									
2									
3									
4									
5									
<Ср>									

9. Расположите цилиндрики на некотором расстоянии  $a$  от оси вращения, как указано на рисунке 2. Занесите значение  $a$  в таблицу 1.

10. Повторите пункты 3-5, т.е. найдите период  $T_2$  и момент инерции  $\langle I_2 \rangle$  диска с цилиндриками, расположенными на расстоянии  $a$  от оси вращения.

11. Вычислите момент инерции двух цилиндриков, расположенных на расстоянии  $a$  от оси вращения относительно оси  $CC'$  по формуле:  $I_2^{CC'} = \langle I_2 \rangle - \langle I_0 \rangle$ .

12. Используя табличные данные (указаны на рабочем месте) рассчитайте момент инерции двух цилиндриков, расположенных на расстоянии  $a$  (задается преподавателем) от оси вращения с помощью теоремы Штейнера:

$$I_{TEOP}^{CC'} = 2 \cdot \left( \frac{m(R^2 + r^2)}{2} + ma^2 \right).$$

13. Сравните результаты эксперимента с теоретическим значением момента инерции тела, оцените погрешность по формуле:

$$\delta = \frac{|I_{TEOP}^{CC'} - I_2^{CC'}|}{I_{TEOP}^{CC'}}.$$

14.

Выполните статистическую

обработку

прямых и косвенных измерений для однородного диска. (Алгоритм обработки прямых и косвенных измерений приведен в Приложении 1).

### ***Задание 2. Проверка аддитивности момента инерции***

1. По заданию преподавателя закрепите на вращающемся валу два тела (например, шар и цилиндр). Занесите в таблицу 2 значения масс и геометрических размеров этих тел (указаны на рабочем месте).

2. Для измерения периода колебаний на одно из тел прикрепите листок бумаги (ширина  $\leq 3$  мм). Поместите тела так, чтобы листок находился точно под световым барьером. Световой барьер включите в сеть и выберите режим . Отклоните тела на  $\approx 90^\circ$ . Нажатием кнопки в верхнем левом углу включите световой барьер и освободите систему двух тел.

3. Измерьте величину периода крутильных колебаний  $T$  пять раз. Результаты занесите в таблицу 2.

5. Вычислите среднее значение периода крутильных колебаний системы двух тел.

6. По среднему значению периода определите по формуле (7) момент инерции системы двух тел  $\langle I \rangle$ .

7. По табличным значениям масс и геометрических размеров тел (указаны на рабочем месте), вычислите их моменты инерции  $I_1$  и  $I_2$ . Определите теоретическое значение момента инерции двух тел  $I_{TEOP.} = I_1 + I_2$ .

8. Сравните моменты инерции  $\langle I \rangle$  и  $I_{TEOP.}$  по формуле:

$$\delta = \frac{|I_{TEOP.} - \langle I \rangle|}{I_{TEOP.}}$$

Таблица 2

$m_1 =$	$m_2 =$	$R_1 =$	$R_2 =$			
X	1	2	3	4	5	$\langle T \rangle$
$T, \text{с}$						
$\langle I \rangle =$		$I_1 =$		$I_2 =$		
$I_{TEOP} =$		$\delta =$				

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Статистическая обработка прямых измерений.

(Выполняется только для задания 1)

1. Занесите измеренные значения периода колебаний  $T$  из таблицы 1 в таблицу 3.

2. Найдите абсолютные погрешности каждого измерения по формулам:  $\Delta T_1 = |\langle T \rangle - T_1|$ ;  $\Delta T_2 = |\langle T \rangle - T_2|$  и т.д.

3. Возведите в квадрат каждое значение  $\Delta T$ .

4. Вычислите стандартный доверительный интервал  $S_{n,T}$  по формуле:

$$S_{n,T} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta T_i)^2}{n(n-1)}}, \text{ где } n - \text{ число измерений.}$$

Занесите данные в таблицу 4.

5. Задайте доверительную вероятность  $\alpha$  по заданию преподавателя (обычно  $\alpha = 0,95$ ).

6. По таблице найдите коэффициент Стьюдента  $t(n, \alpha)$  для данного числа измерений  $n$  и вероятности  $\alpha$ .

7. Найдите  $\Delta T_{СЛ}$  по формуле:  $\Delta T_{СЛ} = t(\alpha, n) \cdot S_{n,T}$ .

8. С учетом приборной погрешности  $\Delta T_{ПР}$  рассчитайте величину доверительного интервала  $\Delta T_{ДОВ}$  по формуле:

$$\Delta T_{ДОВ} = \sqrt{(\Delta T_{СЛ})^2 + (\Delta T_{ПР})^2},$$

помня, что абсолютная погрешность округляется до первой значащей цифры.

9. Определите относительную погрешность  $\delta T$  по формуле:

$$\delta T = \frac{\Delta T_{ДОВ}}{\langle T \rangle} 100\% .$$

10. Окончательный результат представьте в виде:

$$T = \langle T \rangle \pm \Delta T_{ДОВ}, \text{ с.}$$

11. Рассчитайте относительную погрешность момента инерции по формуле

$$\delta I = \frac{\Delta G}{\langle G \rangle} + \frac{\Delta T_{\text{ДОВ}}}{\langle T \rangle},$$

где  $\Delta G = 0,002 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}$ .

Таблица 3

	1	2	3	4	5	$\langle T \rangle$
$T, \text{с}$						
$\Delta T, \text{с}$						X
$\Delta T^2, \text{с}^2$						

Таблица 4

$S_{n,T}$	$\alpha$	$t(n, \alpha)$	$\Delta T_{\text{СП}}$	$\Delta T_{\text{ПР}}$	$\Delta T_{\text{ДОВ}}$	$\delta T$
$\text{с}$	-	-	$\text{с}$	$\text{с}$	$\text{с}$	%

12. Рассчитайте абсолютную погрешность по формуле

$$\Delta I = I_{\text{ЭКСП}} \cdot \delta I, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

13. Окончательный результат запишите в виде

$$I = \langle I \rangle \pm \Delta I, \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Определение углового коэффициента упругости пружины.

### (Инструкция для инженера)

1. Закрепите стержень на вращающемся валу. Установите ноль на динамометре. Кольцо динамометра наденьте на стержень на расстоянии  $r$  от оси вращения (это плечо силы). Линейкой измерьте плечо силы, поверните стержень на угол  $\varphi$ . При измерении силы динамометр должен находиться под прямым углом к плечу рычага.

2. Измерьте силу при помощи динамометра для углов поворота стержня  $\pi, 3\pi/2, 2\pi, 5\pi/2, 3\pi, 7\pi/2$ . Исходя из требований к безопасности и устойчивости, не рекомендуется перегибать пружину на  $\pm 4\pi$ . Рассчитайте для каждого угла момент силы  $M = F \cdot r$ .

3. Занесите данные в таблицу 5, рассчитайте коэффициент упругости для каждого угла по формуле  $G = \frac{M}{\varphi}$  и найдите среднее значение  $\langle G \rangle$  или постройте график зависимости  $M(\varphi)$  и по тангенсу угла наклона найдите  $G$ .

Таблица 5

$\varphi, \text{рад}$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$	$5\pi/2$	$3\pi$	$7\pi/2$
$F, \text{Н}$						
$M, \text{Н} \cdot \text{м}$						
$G, \text{Н} \cdot \text{м} / \text{рад}$						

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Момент инерции материальной точки.
2. Момент инерции твёрдого тела. От чего он зависит?
3. Физический смысл момента инерции.
4. Основной закон динамики вращательного движения.
5. Теорема Штейнера.
6. Применение теоремы Штейнера.
7. Момент сил относительно точки.
8. Чем обусловлен момент сил трения в данной работе?
9. Работа при вращательном движении.
10. Кинетическая энергия при вращательном движении.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Трофимова Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимов. – М.: Высш. шк., 2015.
2. Справочное руководство по физике. Ч.1. Механика, молекулярная физика, электричество, магнетизм: учеб.-метод. пособие. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2008.