ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Физика»

Практикум

Лабораторная работа № М1 «Определение кинематических характеристик равнопеременного движения»

по дисциплине

«Физика»

Авторы
Егорова С. И.,
Жданова Т. П.,
Лемешко Г. Ф.,
Пруцакова Н. В.

Ростов-на-Дону, 2019

Аннотация

Настоящая лабораторная работа посвящена знакомству с элементарными методами измерений и их математической обработке.

Методические указания предназначены для организации самостоятельной работы студентов всех форм обучения, изучающих физику, при подготовке к лабораторному практикуму и рейтинговому контролю.

Авторы

д.т.н., профессор кафедры «Физика»
Егорова С.И.,
к.ф.-м.н, доцент кафедры «Физика»
Жданова Т.П.,
к.ф.-м.н, профессор кафедры «Физика»
Лемешко Г.Ф.,
к.ф.-м.н, доцент кафедры «Физика»
Пруцакова Н.В.

Оглавление

Теоретическая часть 4

Физические измерения и обработка их результатов 4
Определение случайных погрешностей прямых измерений 6
Определение погрешностей косвенных измерений 7
Кинематические характеристики равнопеременного движения 8
Порядок выполнения 9

Обработка результатов измерений 10
Приложение 1 13

Приложение 2 13

Контрольные вопросы 14

Список литературы 14

Цель работы: 1. Знакомство с элементарными методами измерений, приобретение навыков оформления результатов эксперимента и математической обработки результатов измерений.

2. Определение основных кинематических характеристик равнопеременного поступательного и вращательного движений.

Оборудование: Измерительная установка; масштабная линейка; штангенциркуль.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Физические измерения и обработка их результатов

Измерением называется операция, с помощью которой устанавливается, во сколько раз измеряемая величина больше или меньше соответствующей величины, принятой за единицу. Измерения бывают **прямые** и **косвенные**.

При **прямых** измерениях определяется непосредственно исследуемая величина (секундомером, линейкой и т.д.).

При **косвенных** измерениях величина не измеряется, а вычисляется по результатам измерений величин, связанных с искомой величиной определенной функциональной зависимостью (т.е. по формуле).

Из-за несовершенства измерительных приборов и наших органов чувств все измерения можно делать только с определенной степенью точности. Поэтому результаты измерений позволяют найти не истинное значение измеряемой величины, а лишь приближенное.

Погрешность измерения - отклонение результата измерения от истинного (действительного) значения измеряемой величины.

Различают три вида погрешностей прямых измерений: *промахи, систематические и случайные.*

Промах – погрешность измерения, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда.

Промахи возникают в результате небрежности при отсчете по прибору, при неправильном включении прибора, или при нарушении условий опыта. При обнаружении промаха результат измерения следует отбросить, а само измерение повторить.

Систематическая погрешность измерения – составляющая погрешности результата измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же физической величины.

Систематические погрешности являются следствием несовершенства приборов, а также недостатков методики измерений. Увеличение числа измерений этих ошибок не уменьшит.

Погрешность прибора определяется как половина наименьшего деления, кроме приборов, имеющих нониусы, у которых приборная погрешность равна цене деления нониуса.

Случайная погрешность – погрешность, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях.

Случайные погрешности яв- ляются следствием неконтролируемых помех, влияние которых на эксперимент нельзя учесть непосредственно.

Оценку случайных погрешностей и определение интервала, внутри которого с заданной вероятностью лежит истинное значение физической величины, проводят по результатам ее многократных измерений. При этом считается, что среднее арифметическое значение результатов измерений наиболее близко к истинному значению измеряемой величины.

Пусть, например, x_1, x_2, …, x_n - результаты отдельных измерений величины x; здесь n – число повторных измерений. Тогда среднее арифметическое значение

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

является наиболее близким к истинному значению измеряемой величины.

Абсолютная погрешность показывает, насколько измеренное значение физической величины отличается от истинного, в качестве которого принимается среднее арифметическое значение. Абсолютная погрешность отдельного измерения Δx_i определяется как модуль разности среднего $\langle x \rangle$ и измеренного x_i значений физической величины:

$$\Delta x_i = \left| \langle x \rangle - x_i \right|.$$

Относительная погрешность показывает, какую часть измеряемой величины составляет абсолютная погрешность, и является безразмерной величиной (обычно выражается в процентах):

$$\delta x = \frac{\langle \Delta x \rangle}{\langle x \rangle} \qquad \text{или} \qquad \delta x = \frac{\langle \Delta x \rangle}{\langle x \rangle} 100\%$$

Величина $\langle x \rangle \pm \langle \Delta x \rangle$ определяет интервал, внутри которого с доверительной вероятностью α лежит истинное значение измеряемой величины. Этот интервал называют **доверительным** (рис. 1).

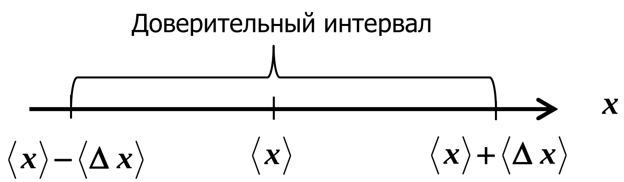

Рис. 1

Доверительная вероятность α показывает, с какой вероятностью истинное значение измеряемой величины x находится внутри доверительного интервала.

Определение случайных погрешностей прямых измерений

Метод Стьюдента

В теории ошибок считается, что случайные погрешности подчиняются вероятностным закономерностям. При постоянном числе измерений n, чем больше ошибка по абсолютной величине, тем меньше ее вероятность. Зависимость плотности распределения вероятностей измеряемой величины $p(x)$ от измеренного значения x описывается кривой (рис. 2), называемой кривой нормального распределения Гаусса. Площадь, отвечающая какому-либо интервалу оси абсцисс, изображает вероятность попадания случайного результата в данный интервал. По распределению Гаусса наиболее вероятным значением измеряемой величины является ее среднее значение.

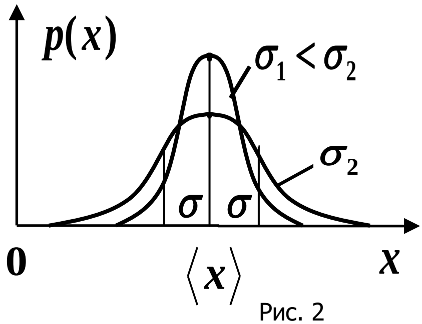

Рис. 2

Вид кривой распределения определяется величиной σ, называемой среднеквадратической ошибкой (стандартное отклонение):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x \rangle\right)^2}{n-1}}.$$

С увеличением σ точность измерения уменьшается, и кривая нормального закона распределения имеет более пологий вид (рис. 2).

Величина σ характеризует разброс отклонений от среднего значения. На практике число измерений ограничено (чаще всего не более 5-7). В этом случае пользуются распределением Стьюдента.

Английский математик и химик В.С. Госсет (псевдоним Стьюдент) в 1908 г. предложил методику обработки результатов многократных измерений одной и той же величины.

Существуют специальные таблицы, в которых приведены **коэффициенты Стьюдента** $t(\alpha, n)$, определяемые доверительной вероятностью α и числом измерений n. Например, при $n = 5$ для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ получим $t(\alpha, n) = 2{,}8$ (см. таблицу в приложении 1).

Согласно методике Стьюдента среднеквадратичная ошибка среднего арифметического определяется формулой:

$$S_{n,x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}},$$

где Δx_i - абсолютная погрешность каждого измерения,

n - число измерений.

Границы среднеквадратичной погрешности:

$$\Delta x_{СЛ} = t(\alpha, n) \cdot S_{n,x}.$$

Абсолютная погрешность измерений, которая устанавливает границы доверительного интервала, равна

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{СЛ})^2 + (\Delta x_{ПР})^2},$$

где $\Delta x_{ПР}$ – приборная погрешность.

Если $\Delta x_{СЛ} >> \Delta x_{ПР}$, то $\Delta x = \Delta x_{СЛ}$;

если $\Delta x_{СЛ} << \Delta x_{ПР}$, то $\Delta x = \Delta x_{ПР}$.

Окончательный результат записывается в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x.$$

Определение погрешностей косвенных измерений

1. Взять натуральный логарифм от левой и правой частей формулы, помня, что

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b, \quad \ln(a/b) = \ln a - \ln b, \quad \ln(a^b) = b \ln a.$$

2. Найти полный дифференциал полученного выражения, помня, что $d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$.

3. Заменить знаки дифференциала d на знаки Δ.

4. Знаки «-», стоящие перед дифференциалами, заменить на знаки «+», так как суммарная погрешность всегда больше погрешности отдельных измерений.

5. В полученную формулу подставить средние арифметические значения прямо измеренных величин и их абсолютные погрешности.

6. Вычислить относительную и абсолютную погрешности косвенно измеряемой величины.

7. Записать окончательный результат в виде $x = \langle x \rangle \pm \Delta x$.

ПРИМЕР:

Найдём относительную и абсолютную погрешности для ускорения при поступательном движении.

$$a = \frac{2h}{t^2},$$

$$\ln a = \ln 2 + \ln h - 2\ln t,$$

$$\frac{da}{a} = \frac{dh}{h} - 2\frac{dt}{t},$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta h}{h} + 2\frac{\Delta t}{t} = \delta a.$$

δa - относительная погрешность величины ускорения a.

Абсолютная погрешность равна $\Delta a = \delta a \cdot a$.

Окончательный результат: $a = \langle a \rangle \pm \Delta a, \quad м/с^2$.

Кинематические характеристики равнопеременного движения

Если тело, поднятое на высоту h (рис. 3), движется поступательно вниз без начальной скорости с ускорением a, то

$$h = \frac{a\,t^2}{2}.$$

Отсюда
$$a = \frac{2h}{t^2} \qquad (1)$$

Максимальная скорость тела, движущегося без начальной скорости, в нижней точке траектории движения равна:

$$\upsilon = at. \qquad (2)$$

Максимальная угловая скорость блока (шкива, оси) радиуса R:

$$\omega = \frac{\upsilon}{R}. \qquad (3)$$

Точки, расположенные на ободе колеса, движутся с полным ускорением $\vec{a}_0 = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ (см. рис. 3), где $\vec{a}_\tau$ - тангенциальная составляющая ускорения, направленная по касательной, равная по модулю ускорению поступательного движения тела, т.е. $a_\tau = a$;

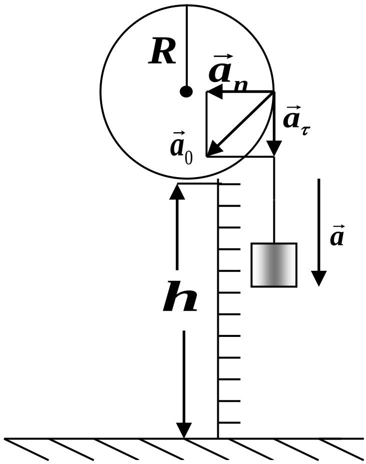

Рис. 3

$\vec{a}_n$ – нормальная составляющая ускорения, направленная к центру окружности равная по модулю

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (4)$$

Модуль полного ускорения

$$a_0 = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (5)$$

Угловое ускорение маховика (блока, шкива) радиуса R:

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{R}. \qquad (6)$$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ

1. Включить в сеть измерительную установку.
2. Наматывая нить на свободную ось или шкив, поднять тело, участвующее в поступательном движении, на высоту h (по заданию преподавателя).
3. Нажатием кнопки «СБРОС» обнулить показания электронного секундомера.
4. Освободить тело нажатием кнопки “ПУСК” и измерить время t прохождения телом высоты h.
5. Пункты 2-4 повторить 5 – 7 раз для одной и той же высоты h. Данные эксперимента занести в табл. 1.
6. Записать в таблицу 2 погрешность секундомера $\Delta t_{ПР}$.
7. Измерить штангенциркулем радиус шкива (оси) R, на который наматывается нить.
8. Занести в таблицу 3 значения h, R.

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7	$\langle t \rangle$
t, с								
Δt, с								
$(\Delta t)^2$, с²								

Таблица 2

$S_{n,t}$	α	$t(n,\alpha)$	$\Delta t_{СЛ}$	$\Delta t_{ПР}$	$\Delta t_{ДОВ}$	δt
с	–	–	с	с	с	-

Обработка результатов измерений

1. Найти среднее арифметическое значение времени по формуле:

$$\langle t \rangle = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n},$$

где n – число измерений; занести $\langle t \rangle$ в табл. 1.

2. Найти абсолютные погрешности каждого измерения по формулам: $\Delta t_1 = \left| \langle t \rangle - t_1 \right|$; $\Delta t_2 = \left| \langle t \rangle - t_2 \right|$ и т.д.

3. Возвести в квадрат каждое значение Δt.

4. Вычислить среднеквадратичную ошибку среднего арифметического $S_{n,t}$ по формуле:

$$S_{n,t} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta t_i)^2}{n(n-1)}},$$ занести в табл. 2.

5. Задать доверительную вероятность α (обычно $\alpha = 0{,}95$).

6. По таблице найти коэффициент Стьюдента $t(n,\alpha)$ для данного числа измерений n и вероятности α.

7. Найти $\Delta t_{СЛ}$ по формуле

$$\Delta t_{СЛ} = t(n,\alpha)\cdot S_{n,t} \,.$$

8. Найти абсолютную погрешность $\Delta t_{ДОВ}$ по формуле:

$$\Delta t_{ДОВ} = \sqrt{(\Delta t_{СЛ})^2 + (\Delta t_{ПР})^2}\,,$$

помня, что абсолютная погрешность **округляется до первой значащей цифры** (см. приложение 2)**.**

9. Определить относительную погрешность δt по формуле:

$$\boldsymbol{\delta t} = \frac{\boldsymbol{\Delta t}_{ДОВ}}{\langle \boldsymbol{t} \rangle}\,.$$

10. Окончательный результат представить в виде:

$$t = \langle t \rangle \pm \Delta t_{ДОВ}\,,\ c\,.$$

11. По формулам (1) – (6) вычислить все кинематические характеристики движения, подставляя время, как среднее значение $\langle t \rangle$ из таблицы 1. Занести значения кинематических характеристик в таблицу 3.

12. Вычислить относительные погрешности для высоты h и радиуса R по формулам:

$$\delta h = \frac{\Delta h}{h}; \qquad \delta R = \frac{\Delta R}{R}\,.$$

13. Вычислить относительные и абсолютные погрешности всех кинематических характеристик по следующим формулам:

$$\delta a = \delta h + 2\delta t \qquad \Delta a = \delta a \cdot \langle a \rangle$$

$$\delta \upsilon = \delta h + \delta t \qquad \Delta \upsilon = \delta \upsilon \cdot \langle \upsilon \rangle$$

$$\delta \omega = \delta \upsilon + \delta R \qquad \Delta \omega = \delta \omega \cdot \langle \omega \rangle$$

$$\delta \varepsilon = \delta a + \delta R \qquad \Delta \varepsilon = \delta \varepsilon \cdot \langle \varepsilon \rangle$$

$$\delta a_n = 2\delta \upsilon + \delta R \qquad \Delta a_n = \delta a_n \cdot \langle a_n \rangle$$

$$\delta a_0 = \frac{a_n \Delta a_n + a_\tau \Delta a_\tau}{a_0^2} \qquad \Delta a_0 = \delta a_0 \cdot \langle a_0 \rangle$$

14. Окончательный результат записать в виде:

$$a = \langle a \rangle \pm \Delta a,\ м/с^2 \qquad \upsilon = \langle \upsilon \rangle \pm \Delta \upsilon, м/с$$

$$\omega = \langle \omega \rangle \pm \Delta \omega, рад/с \qquad \varepsilon = \langle \varepsilon \rangle \pm \Delta \varepsilon, рад/с^2$$

$$a_n = \langle a_n \rangle \pm \Delta a_n,\ м/с^2 \qquad a_0 = \langle a_0 \rangle \pm \Delta a_0,\ м/с^2 .$$

15. Результаты обработки косвенных измерений занести в табл. 3.
16. По проделанной работе сделать вывод.

Таблица 3

h = Δh = 0,0005 м			R = ΔR = 0,0001 м			
	a (a_τ)	υ	ω	ε	a_n	a_0
	м/с^2	м/с	рад/с	рад/с^2	м/с^2	м/с^2
Среднее значение $\langle\ \rangle$						
Относительная погрешность δ						
Абсолютная погрешность Δ						

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица некоторых значений коэффициентов Стьюдента

α \ n	2	3	4	5	6	7	10	30
0,9	6,3	2,9	2,4	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7
0,95	12,7	4,3	3,2	2,8	2,6	2,4	2,3	2,0

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Точность вычислений

В итоге измерений или вычислений получается число, в котором различают цифры верные, не содержащие ошибок, и сомнительные, в которых содержатся погрешности.

Абсолютная погрешность показывает, в каком знаке определяемой величины содержится неточность. Поэтому абсолютная погрешность должна быть вычислена с точностью до первой значащей цифры, а численное значение искомой величины должно оканчиваться на этом знаке.

Например, $t = 2{,}86745\ c$, $\Delta t = 0{,}0783\ c$. Округляем: $\Delta t = 0{,}0783\ c \approx 0{,}08\ c$, соответственно $t = 2{,}86745\ c \approx 2{,}87\ c$. Окончательный результат: $t = (2{,}87 \pm 0{,}08)\ c$.

В промежуточных вычислениях пишут ещё одну цифру, что даёт возможность более точно округлить окончательный результат.

Правила округления

1. При сложении (вычитании) приближённых чисел округление слагаемых производится до разряда, на единицу большего, чем разряд наименее точного числа. В окончательном результате сохраняется столько значащих цифр, сколько их в наименее точном числе.

Например,

$$2{,}38 + 1{,}17273 + 1{,}026205 \approx 2{,}38 + 1{,}173 + 1{,}026 \approx 4{,}579 \approx 4{,}58.$$

(Здесь $2{,}38$ - наименее точное число).

Без округления это выглядело бы так:

$$2{,}38 + 1{,}17273 + 1{,}026205 = 4{,}578935 \approx 4{,}58.$$

2. При умножении (делении) приближённых чисел в каждом сомножителе остаётся столько значащих цифр, сколько их имеется в сомножителе с наименьшим числом цифр. В окончательном результате остаётся такое же число значащих цифр, какое имеется в сомножителях после их округления.

Например, $3{,}5273 \cdot 0{,}24 \approx 3{,}53 \cdot 0{,}24 = 0{,}8472 \approx 0{,}85$.

Без округления это выглядело бы так: $3{,}5273 \cdot 0{,}24 = 0{,}846552 \approx 0{,}85$.

3. При возведении в степень берётся столько значащих цифр, сколько их в основании степени. Например, $1{,}32^2 = 1{,}7424 \approx 1{,}74$.

4. При извлечении корня в результате берётся столько значащих цифр, сколько их в подкоренном выражении.

Например, $\sqrt{1{,}17 \cdot 10^{-18}} = 1{,}0816653826392 \cdot 10^{-9} \approx 1{,}08 \cdot 10^{-9}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие измерения называются прямыми, какие косвенными? Приведите примеры.
2. Что такое промах, систематическая и случайная погрешности.
3. Как находится абсолютная и относительная погрешности?
4. Как записать окончательный результат при прямых измерениях?
5. Что такое доверительная вероятность и доверительный интервал?
6. Знать последовательность операций при нахождении погрешности прямых измерений.
7. Знать последовательность операций при нахождении погрешности косвенных измерений.
8. Сколько значащих цифр должна иметь абсолютная погрешность результата измерений и почему?
9. Знать физический смысл всех кинематических характеристик ($\vec{a}_\tau, \vec{a}_n, \vec{a}_0, \vec{\upsilon}, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$), формулы для их расчета и уметь определять направления их векторов.
10. Вывести формулы для определения относительных погрешностей косвенных измерений $\delta\upsilon, \delta\omega, \delta\varepsilon$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трофимова Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 2010. – С. 6-14.