



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Физика»

Учебное пособие по дисциплине

«Физика конденсированного состояния и элементы квантовой механики»

Авторы
Благин А. В.,
Попова И. Г.

Ростов-на-Дону, 2019

Аннотация

Учебное пособие предназначен для студентов очной формы обучения направления 11.03.04 Электроника и нанoeлектроника.

Авторы



д.ф.-м.н., профессор
кафедры «Физика»
Благин А.В.



к.ф.-м.н., ст. преподаватель
кафедры «Физика»
Попова И.Г.



Оглавление

1. Основы кристаллографии	Ошибка! Закладка не определена.
1.1. Примеры решения задач.....	7
1.2. Задачи для самостоятельного решения.....	12
2. Тепловые свойства твердых тел.....	16
2.1. Примеры решения задач.....	21
2.2. Задачи для самостоятельного решения.....	24
3. Элементы квантовой механики.....	33
3.1. Примеры решения задач.....	35
3.2. Задачи для самостоятельного решения	39
4. Электрические и магнитные свойства твердых тел.....	56
4.1. Примеры решения задач.....	58
4.2. Задачи для самостоятельного решения	64
5. Зонная теория твердых тел. Электрические свойства твердых тел.....	70
5.1. Примеры решения задач.....	74
5.2. Задачи для самостоятельного решения	75
Список литературы	79

1. ОСНОВЫ КРИСТАЛЛОГРАФИИ

- Молярный объем кристалла

$$V_m = \frac{M}{\rho},$$

где M – молярная масса вещества; ρ – плотность кристалла.

Объем V элементарной ячейки в кристаллах:

a) При кубической сингонии $V = a^3$;

b) При гексагональной сингонии $V = \sqrt{3}a^2c/2$.

Здесь a и c – параметры и решетки.

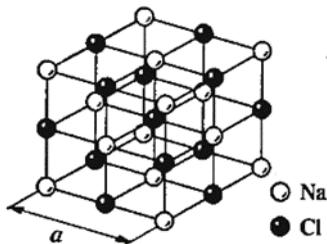


Рисунок 1 – Структура $NaCl$

Если для гексагональной решетки принять теоретическое значение

$$c = \sqrt{\frac{8}{3}}a, \text{ то } V = \sqrt{2}a^3.$$

- Число Z_M элементарных ячеек в одном моле кристалла

$$Z_M = \frac{V_M}{V}, \text{ или } Z_M = \frac{kN_A}{n},$$

где k – число одинаковых атомов в химической формуле соединения (например, формуле соединения равно единице); N_A – постоянная Авогадро; n – число одинаковых атомов, приходящихся на элементарную ячейку. На рис. 1 представлена структура $NaCl$; аналогичную структуру имеют соединения KBr , $AgBr$, MnO и др.

Число Z элементарных ячеек в единице объема кристалла

$$Z = \frac{Z_M}{V_M},$$

или в общем случае

$$Z = \rho \frac{k N_A}{n M};$$

для кристалла, состоящего из одинаковых атомов ($k = 1$),

$$Z = \rho \frac{N_A}{nM}.$$

- Параметр a кубической решетки

$$a = \sqrt[3]{\frac{nM}{k\rho N_A}}.$$

Расстояние d между соседними атомами в кубической решетке:

а) в гранецентрированной $d = a/\sqrt{2}$;

б) в объемно-центрированной $d = \sqrt{3}a/2$.

- Для обозначения узлов направлений и плоскостей в решетке вводятся специальные индексы.

Индексы узлов записывают в двойных квадратных скобках $[[mnp]]$.

Для отрицательных индексов над буквой становится знак минус, например \bar{m} (рис. 2).

- Индексы направлений записываются в одинарных квадратных скобках $[mnp]$. Индекс направления совпадает с индексом узла, через который проходит прямая, если эта прямая одновременно проходит и через начало координат $[[000]]$ (рис. 2).

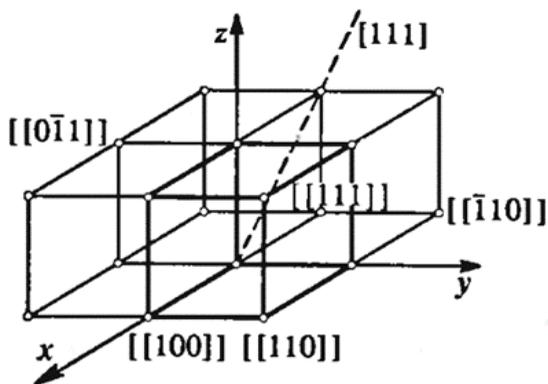


Рисунок 2 – Индексы узлов

Индексы направления задают не одну прямую в кристалле, а семейство параллельных прямых. Изменение всех индексов на обратные по знаку $[\bar{m}\bar{n}\bar{p}]$, в кубической решетке выражается соотношением

$$l = a\sqrt{m^2 + n^2 + p^2},$$

где a – параметр решетки.

• Угол φ между прямыми $[m_1 n_1 p_1]$ и $[m_2 n_2 p_2]$ в кубической решетке выражается формулой

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

• Индексы плоскости (индексы Миллера) записывают в круглых скобках (hkl) . Изменение всех индексов на обратные $\bar{h}\bar{k}\bar{l}$ отвечает тому же семейству плоскостей.

Индексы Миллера связаны с минимальными отрезками, отсекаемыми плоскостью на осях координат.

• Для нахождения отрезков следует взять величины, обратные индексам Миллера $(1/h; 1/k; 1/l)$ и привести их к наименьшему целому, кратному каждому из полученных чисел. Полученные значения и есть наименьшие отрезки, отсекаемые плоскостью (hkl) на осях координат.

Если известны отрезки, отсекаемые на осях координат, то индексы Миллера находятся аналогичным путем (см. пример 4). Индексы Миллера пропорциональны направляющим косинусам вектора нормали к данной плоскости. Поэтому индексы Миллера для некоторого семейства плоскостей совпадают с индексами направлений нормали к этим плоскостям.

• Угол между плоскостями $(h_1 k_1 l_1)$ и $(h_2 k_2 l_2)$ определяется из формулы:
$$\cos \varphi = \frac{h_1 h_2 + k_1 k_2 + l_1 l_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + l_1^2} \sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}}.$$

1.1. Примеры решения задач

Пример 1. Определить число n узлов, приходящихся на одну элементарную ячейку в гранецентрированной кубической решетке.

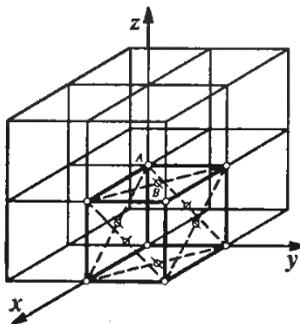


Рисунок 3 – Элементарная ячейка в кубической решетке

Решение. Выделим элементарную ячейку в кубической решетке (рис. 3) и определим, скольким соседним элементарным ячейкам принадлежит тот или иной узел выделенной ячейки. В этой ячейке имеются узлы двух типов: A (находящиеся в вершинах куба) и B (находящиеся на гранях куба в точке пересечения диагоналей).

Узел A принадлежит одновременно восьми элементарным ячейкам. Следовательно, в данную ячейку узел A входит с долей $1/8$. Узел B входит одновременно только в две ячейки и, следовательно, в данную ячейку узел B входит с долей $1/2$. Если учесть, что число узлов типа A в ячейке равно восьми, а число узлов типа B равно шести, т.е. числу граней, то общее число узлов, прихо-

дящихся на одну элементарную ячейку в гранцентрированной решетке,

$$n = \frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 1 + 3 = 4 \text{ узла.}$$

Так как число узлов равно числу атомов, то в соответствующей структуре на элементарную ячейку приходится четыре атома.

Пример 2. Определить параметр a решетки и расстояние d между ближайшими соседями атомами кристалла кальция (решетка гранцентрированная кубической сингонии).

Плотность ρ кристалла кальция равна $1,55 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Решение. Параметр a кубической решетки связан с объемом элементарной ячейки соотношением $V = a^3$. С другой стороны, объем элементарной ячейки равен отношению молярного объема к числу элементарных ячеек в одном моле кристалла: $V = V_M / Z_M$. Приравняв правые части приведенных выражений для V , найдем

$$a^3 = \frac{V_M}{Z_M} \quad (1)$$

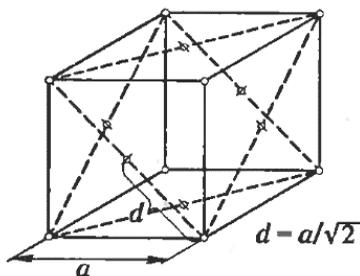


Рисунок 4 – Расстояние d между ближайшими соседними атомами

Молярный объем кальция $V_M = \frac{N_A}{n}$, где ρ — плотность кальция;

M — его молярная масса. Число элементарных ячеек в одном моле

$$Z_M = \frac{N_A}{n'}$$

где n — число атомов, приходящихся на одну ячейку. Подставив в формулу (1) приведенные выражения для V_M и Z_M , получим

$$a^3 = \frac{nM}{\rho N_A}.$$

Отсюда

$$a = \sqrt[3]{\frac{nM}{\rho N_A}}. \quad (2)$$

Подставим значения величин n , M , ρ и N_A в формуле (2), учитывая, что $n = 4$ (см. предыдущим пример). Произведя вычисления, найдем

$$a = 556 \text{ пм.}$$

Расстояние d между ближайшими соседними атомами находится из простых геометрических соотношений, ясных из рис. 4:

$$d = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Подставив в это выражение найденное ранее значение a , получим:

$$d = 393 \text{ пм.}$$

Пример 3. Написать индексы направления прямой, проходящей через узлы $[[100]]$ и $[[001]]$ кубической примитивной решетки.

Решение. Эту задачу можно решить двумя способами.

1-ый способ. Изобразим кубическую примитивную ячейку, отметим на ней узлы с индексами $[[110]]$ и $[[001]]$ и проведем через эти узлы прямую (рис. 5а).

Заданная прямая не проходит через начало координат. Но этого можно достигнуть, перенеся начало координат в один из узлов, через которые проходит прямая.

Если перенести начало координат в узел $[[100]]$ (рис. 5б), то узел, лежащий на той же прямой и ближайший к выбранному началу координат, будет иметь индексы $[[\bar{1}01]]$, а искомое направление в этом случае определится индексами $[[\bar{1}01]]$.

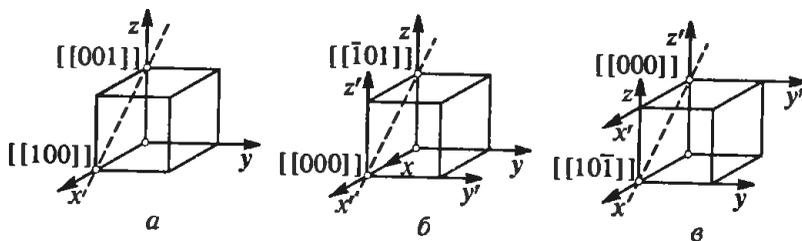


Рисунок 5 – Индексы направлений

Если же начало координат перенести в узел $[[001]]$ (рис. 5, в), то соответственно индексы искомого направления будут $[10\bar{1}]$. Итак, индексы *искомого* направления в кристалле $[10\bar{1}]$ или $[10\bar{1}]$.

2-й способ. Не всегда бывает легко определить, как изменятся индексы узлов при переносе начала координат. Поэтому рассмотрим аналитический метод решения.

Напишем в общем виде уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве, с индексами узлов $[[m_1 n_1 p_1]]$ и $[[m_2 n_2 p_2]]$:

$$\frac{x-m_1}{m_2-m_1} = \frac{y-n_1}{n_2-n_1} = \frac{z-p_1}{p_2-p_1}. \quad (3)$$

Величины, стоящие в знаменателе, пропорциональны направляющим косинусам прямой. Но так как эти величины целочисленны, то они и будут являться индексами направления.

Подставив в знаменатель выражения (3) значения индексов узлов

$$m_1 = 1, n_1 = 0, p_1 = 0 \text{ и } m_2 = 0, n_2 = 0, p_2 = 1,$$

$$\text{Получим: } m_2 - m_1 = 0 - 1 = -1;$$

$$n_2 - n_1 = 0 - 0 = 0;$$

$$p_2 - p_1 = 1 - 0 = 1.$$

Таким образом, искомые индексы направления $[\bar{1}01]$.

Пример 4. Написать индексы Миллера для плоскости, содержащей узлы с индексами $[[200]]$, $[[010]]$ и $[[001]]$. Решетка кубическая, примитивная.

Решение. Возможны два способа решения задачи.

1-й способ применим в тех случаях, когда узлы, принадле-

жащие плоскости, лежат одновременно и на осях координат (т.е. известны отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат).

В данном случае узлы, принадлежащие плоскости, лежат на осях координат, и отрезки (в единицах постоянной решетки), отсекаемые на осях координат этой плоскостью, соответственно будут 2, 1, 1 (рис. 6).

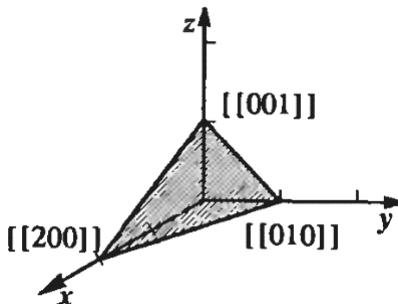


Рисунок 6 – Индексы Миллера для плоскости

В соответствии с общим правилом нахождения индексов Миллера напишем обратные значения полученных чисел $\frac{1}{2}; \frac{1}{1}; \frac{1}{1}$ и приведем их к наименьшему целому кратному этих чисел. Для этого умножим числа на два. Полученная совокупность значений, заключенная в круглые скобки, и есть искомые индексы Миллера (1, 2, 2).

2-й способ (аналитический) особенно удобен тогда, когда известные узлы не лежат на осях координат. Этот способ является общим и применим во всех случаях.

Известно, что индексы Миллера равны наименьшим целочисленным коэффициентам при переменных в уравнении плоскости. Поэтому решение задачи по определению индексов Миллера, по существу, к отысканию уравнения плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки с координатами $[[m_1 n_1 p_1]]$, $[[m_2 n_2 p_2]]$, $[[m_3 n_3 p_3]]$, дается определителем третьего порядка

$$\begin{vmatrix} x - m_1 & y - n_1 & z - p_1 \\ m_2 - m_1 & n_2 - n_1 & p_2 - p_1 \\ m_3 - m_1 & n_3 - n_1 & p_3 - p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В нашем случае:

$$m_1 = 2, n_1 = 0, p_1 = 0; m_2 = 0, n_2 = 1, p_2 = 0;$$

$$m_3 = 0, n_3 = 0, p_3 = 1.$$

Подставляя значения индексов узлов в определитель, получим

$$\begin{bmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 0-2 & 1-0 & 0-0 \\ 0-2 & 0-0 & 1-0 \end{bmatrix} = 0, \text{ или}$$

$$\begin{bmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Разложим этот определитель по элементам первой строки:

$$(x-2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - y \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель второго порядка, получим

$$(x-2)(+1) - y(-2) + z(+2) = 0,$$

$$\text{или } x + 2y + 2z = 2.$$

Выписав коэффициенты при x, y, z и заключив их в круглые скобки, получим индексы Миллера $(1, 2, 2)$.

Эти значения индексов, как и следовало ожидать, совпадают со значениями, полученными первым способом.

1.2. Задачи для самостоятельного решения

Элементарная ячейка. Параметры решетки

1.1. Сколько атомов приходится на одну элементарную ячейку: 1) примитивной решетки кубической сингонии; 2) объемно-центрированной решетки ромбической сингонии; 3) граничноцентрированной решетки кубической сингонии; 4) базоцентрированной решетки ромбической сингонии; 5) примитивной решетки гексагональной сингонии; 6) гексагональной структуры с плотной упаковкой. [1] 1; 2) 2; 3) 4; 4) 2; 5) 1]

1.2. Определитель число элементарных ячеек кристалла объемом $V = 1\text{ м}^3$: 1) хлористого цезия (решетка объемно-центрированная кубической сингонии); 2) меди (решетка граничноцентрированная кубической сингонии); 3) кобальта, имеющего гексагональную структуру с плотной упаковкой. [1] $1,44 \cdot 10^{28}$;

2) $2,1 \cdot 10^{28}$; 3) $4,54 \cdot 10^{28}$]

1.3. Найти плотность ρ кристалла неона (при 20 К), если известно, что решетка – гранецентрированная, кубической сингонии. Постоянная a решетки при той же температуре равно 0,452 нм. [1] $1,46 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$]

1.4. Найти плотность ρ кристалла стронция, если известно, что решетка гранецентрированная кубической сингонии, а расстояние d между ближайшими соседними атомами равно 0,43 нм. [1] $2,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$]

1.5. Определить относительную атомную массу A_r кристалла, если известно, что расстояние d между ближайшими соседними атомами равно 0,304 нм. Решетка объемно-центрированная кубической сингонии. Плотность ρ кристалла равна 534 кг/м³. [6,95 литий]

1.6. Найти постоянную a решетки и расстояние d между ближайшими соседними атомами кристалла: 1) алюминия (решетка гранецентрированная кубической сингонии); 2) вольфрама (решетка объемно-центрированная кубической сингонии). [1] 0,404 нм; 0,286 нм; 2) 0,316 нм; 0,274 нм]

1.7. Используя метод упаковки шаров, найти отношение c/a параметров в гексагональной решетке с плотнейшей упаковкой. Указать причины отклонения этой величины в реальном кристалле от вычисленного. [1,63. Отклонение обусловлено тем, что в реальном кристалле атомы не обладают сферической симметрией]

1.8. Определить постоянные a и c решетки кристалла магния, который представляет собой гексагональную структуру с плотной упаковкой. Плотность ρ кристаллического магния равна $1,74 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. [0,320 нм; 0,521 нм]

1.9. Вычислить постоянную a решетки кристалла бериллия, который представляет собой гексагональную структуру с плотной упаковкой. Параметр a решетки равен 0,359 нм. Плотность ρ кристалла бериллия равна $1,82 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. [0,23 нм]

1.10. Найти плотность ρ кристалла гелия (при температуре $T = 2 \text{ К}$), который представляет собой гексагональную структуру с плотной упаковкой. Постоянная a решетки, определенная при той же температуре, равна 0,357 нм. [**207 кг/м³**]

Индексы узлов, направлений и плоскостей

1.11. Определить индексы узлов, отмеченных на рис. 7 буквам *A, B, C, D*. [*A* $[[221]]$; *B* $[[021]]$; *C* $[[\bar{1}22]]$; *D* $[[\bar{1}12]]$]

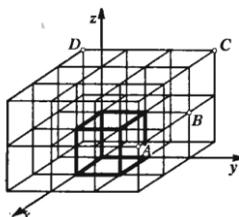


Рисунок 7

1.12. Написать индексы направления прямой, проходящей в кубической решетке через начало координат и узел с кристаллографическими индексами, в двух случаях: 1) $[[242]]$; 2) $[[112]]$. [$[[121]]$; $[[112]]$]

1.13. Найти индексы направлений прямых *AB, CD, KL*, изображенных на рис. 8 *a, б, в*. [$[[\bar{1}10]]$; $[[\bar{1}11]]$; $[[101]]$]

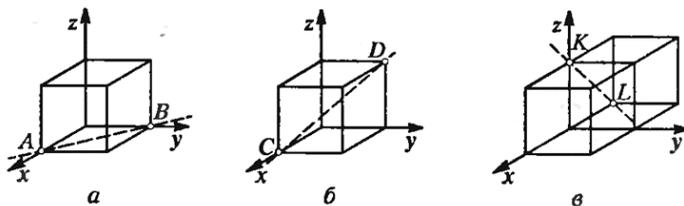


Рисунок 8

1.14. Написать индексы направлений прямой, проходящей через два узла с кристаллографическими индексами (в двух случаях): 1) $[[123]]$ и $[[321]]$; 2) $[[121]]$ и $[[201]]$. [1) $[[111]]$; 2) $[[\bar{1}2\bar{2}]]$ или $[[1\bar{2}\bar{2}]]$]

1.15. Вычислить период / идентичности вдоль прямой $[[111]]$ в решетке кристалла *NaCl*, если плотность ρ кристалла равно $2,17 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. [$0,975 \text{ нм}$]

1.16. Вычислить угол ϕ между двумя направлениями в кубической решетке кристалла, которые заданы кристаллографическими индексами $[[110]]$ и $[[111]]$. [$35^\circ 15'$]

1.17. Написать индексы Миллера для плоскостей в прими-

тивной кубической решетке, изображенный на рис. 9, *a-c*.
 [а) (111); б) (011); в) $(1\bar{1}\bar{1})$; г) $(\bar{1}\bar{1}0)$; д) (112); е) (111)]

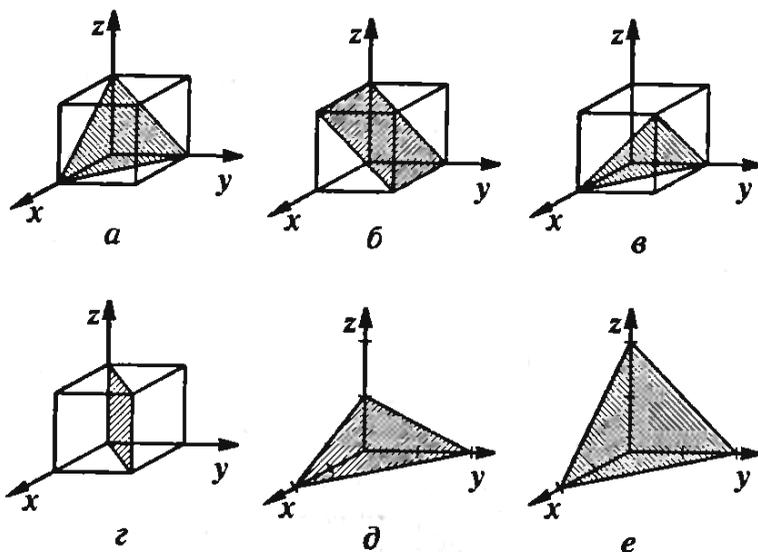


Рисунок 9

1.18. Плоскость проходит через узлы $[\bar{1}00]$, $[0\bar{1}0]$, $[00\bar{1}]$ кубической решетки. Написать индексы Миллера для этой плоскости. [(111)]

1.19. Система плоскостей в примитивной кубической решетке задана индексами Миллера (221). Найти наименьшие отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат, и изобразить эту плоскость графически. [Отрезки, отсекаемые на осях $[x, y, z]$, соответственно равны 1, 1, 2 см. рис. 10]

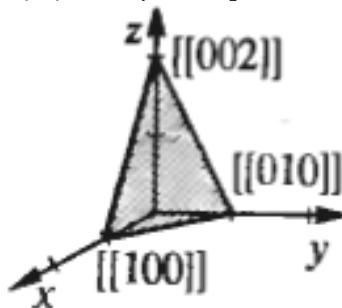


Рисунок 10

1.20. Направление нормали к некоторой плоскости в кубической решетке задано индексами $[110]$. Написать индексы Миллера для этой плоскости и указать наименьшие отрезки, отсекаемые плоскостью на осях. $[(110), \text{отрезки на осях } 1, 1, \infty]$

1.21. Написать индексы Миллера для плоскостей, содержащих узлы с кристаллографическими индексами, в двух случаях: 1) $[[111]], [[1\bar{1}2]], [[\bar{1}01]]$; 2) $[[1\bar{1}1]], [[010]], [[\bar{1}\bar{1}1]]$. Найти отрезки, отсекаемые этими плоскостями на осях координат. [1] $(\bar{1}24)$, отрезки на осях 4, 2, 1; 2) (012) , отрезки на осях $\infty, 2, 1]$

1.22. Система плоскостей примитивной кубической решетки задана индексами (111) . Определить расстояние d между соседними плоскостями, если параметр a решетки равен 0,3 нм. $[0,173 \text{ нм}]$

1.23. Определить параметр a примитивной кубической решетки, если межплоскостное расстояние d для системы плоскостей, заданных индексами Миллера (212) при рентгеноструктурном измерении, оказалось равным 0,12 нм. $[0,36 \text{ нм}]$

1.24. Три системы плоскостей в примитивной кубической решетке заданы индексами Миллера: а) (111) ; б) (110) ; в) (100) . Указать, для какой системы межплоскостные расстояния d минимальны и для какой системы — максимальны. Определить отношения межплоскостных расстояний $d_{111}:d_{110}:d_{100}$. [Минимальная для (111) , максимальная для (100) ;

$$d_{111}:d_{110}:d_{100} = \frac{1}{\sqrt{3}}:\frac{1}{\sqrt{2}}:1]$$

1.25. Вычислить угол φ между нормалью и плоскостями (в кубической решетке), заданных индексами Миллера (111) и $(11\bar{1})$. $[70^\circ 20']$

1.26. Две плоскости в кубической решетке заданы индексами Миллера (010) и (011) . Определить угол φ между плоскостями. $[\frac{\pi}{4}]$

1.27. В кубической решетке направление прямой задано индексами $[011]$. Определить угол φ между этой прямой и плоскостью $(11\bar{1})$. $[0 \text{ (прямая лежит в плоскости)}]$

1.28. Определить в кубической решетке угол φ между пря-

мой $[111]$ и плоскостью $(\bar{1}\bar{1}1)$. $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

1.29. Плоскость в кубической решетке задана индексами Миллера (011) , направление прямой — индексами $[111]$. Определить угол φ между прямой и плоскостью. $[54^{\circ}40']$

2. ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

• Молярная внутренняя энергия химически простых (состоящих из одинаковых атомов) твердых тел в классической теории теплоемкости выражается формулой

$$U_M = 3RT,$$

где R – молярная газовая постоянная; T – термодинамическая температура.

• Теплоемкость C системы (тела) при постоянном объеме определяется как производная от внутренней энергии U по температуре, т.е.

$$C = \frac{dU}{dT}$$

• Закон Дюлонга и Пти. Молярная теплоемкость C_M химически простых твердых тел $C_M = 3R$.

• Закон Неймана-Коппа. Молярная теплоемкость химически сложных тел (состоящих из различных атомов)

$$C_M = n \cdot 3R,$$

где n – общее число частиц в химической формуле соединения.

• Среднее значение энергии $\langle \varepsilon \rangle$ квантового осциллятора, приходящейся на одну степень свободы, в квантовой теории Эйнштейна выражается формулой

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_0 + \frac{h\omega}{\exp\left(\frac{h\omega}{kT}\right) - 1},$$

где ε_0 – нулевая энергия ($\varepsilon_0 = (1/2)h\omega$); h – постоянная Планка; ω – циклическая частота колебаний осциллятора; k – Постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура.

• Молярная внутренняя энергия кристалла в квантовой теории теплоемкости Эйнштейна определяется по формуле

$$U_M = U_{0,M} + 3R \frac{\theta_E}{(\exp(\theta_E/T) - 1)^2}$$

где $U_{0,M} = (3/2)R\theta_E$ – молярная нулевая энергия по Эйнштейну; θ_E – характеристическая температура Эйнштейна.

• Молярная теплоемкость кристалла в квантовой теории теплоемкости Эйнштейна

$$C_M = 3R \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{\exp(\theta_E/T)}{(\exp(\theta_E/T) - 1)^2}$$

При низких температурах ($T \ll \theta_E$)

$$C_M = 3R \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \exp\left(-\frac{\theta_E}{T}\right)$$

• Частотный спектр колебаний в квантовой теории теплоемкости Дебая задается функцией распределения частот $g(\omega)$. Число dZ собственных частот тела, приходящихся на интервал частот от ω до $\omega + d\omega$, определяется выражением

$$dZ = g(\omega)d\omega$$

Для трехмерного кристалла, содержащего N атомов,

$$dZ = \frac{9N}{\omega_{max}^3} \omega^2 d\omega,$$

где ω_{max} – максимальная частота, ограничивающая спектр колебаний.

• Энергия U твердого тела связана со средней энергией $\langle \epsilon \rangle$ квантового осциллятора и функцией распределения частот $g(\omega)$ соотношением

$$U = \int_0^{\omega_{max}} \langle \epsilon \rangle g(\omega) d\omega.$$

• Молярная внутренняя энергия кристалла по Дебаю

$$U_M = U_{0,M} + 3RT \cdot 3 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T}} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx,$$

где $U_{0,M} = \left(\frac{9}{8} \right) R\theta_D$ – молярная нулевая энергия кристалла по Дебаю; $\theta_D = \hbar\omega_{max}/k$ – характеристическая температура Дебая.

- Молярная теплоемкость кристалла по Дебаю

$$C_M = 3R \left(12 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} - \frac{3(\theta_D/T)}{\exp(\theta_D/T) - 1} \right).$$

Предельный закон Дебая. В области низких температур ($T \ll \theta_D$) последняя формула принимает вид

$$C_M = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3.$$

• Энергия ε связана с циклической частотой ω колебаний классической волны соотношением

$$\varepsilon = \hbar\omega.$$

- Квазиимпульс фонона

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

• Скорость фонона является групповой скоростью звуковых волн в кристалле

$$u = \frac{d\varepsilon}{dp}.$$

При малых значениях энергии фонона дисперсией волн можно пренебречь и тогда групповая и фазовая скорости совпа-

дуг:

$$u = v = \frac{\varepsilon}{p}$$

Скорости продольных (v_l) и поперечных (v_t) волн в кристалле определяются по формулам:

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

где E и G – модули соответственно продольной и поперечной упругости.

Усредненное значение скорости звука v связано с v_l и v_t соотношением

$$\frac{3}{v^3} = \frac{2}{v_l^3} + \frac{1}{v_t^3}$$

• Закон Фурье. Количество теплоты dQ , перенесенное через поверхность площадью S , перпендикулярную направлению теплового потока, за время dt , равно

$$dQ = -\lambda \frac{dT}{dx} S dt,$$

где λ – теплопроводность; Dt/dx – градиент температуры. Знак минус в формуле показывает, что направление теплового потока противоположно вектору градиента температуры.

Замечание:

1) Считать при решении задач $T \ll \theta_D$, если $T/\theta_D < 0,1$.

2) Фонон – квазичастица, являющаяся квантом поля колебаний кристаллической решетки.

Теплопроводность λ , теплоемкость \hat{C} , рассчитанная на единицу объема, скорость v звука (усредненное значение) и средняя длина свободного пробега l фононов связаны соотношением

$$\lambda = \frac{1}{3} \hat{C} v l.$$

• Относительное изменение частоты, обусловленное эффек-

том Доплера,

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{v}{c} \cos \theta \quad (v \ll c),$$

где v – скорость атома; c – скорость распространения электромагнитного излучения; θ – угол между вектором v и направлением наблюдения (от атома к наблюдателю).

- Энергия отдачи ядра при испускании гамма-фотона

$$R = \frac{(\hbar\omega)^2}{2m_{\text{я}}c^2},$$

где $\hbar\omega$ – энергия гамма-фотона; $m_{\text{я}}$ – масса ядра.

- Естественная ширина спектральной линии

$$\Gamma = \hbar/\tau,$$

где τ – среднее время жизни ядра (атома) в возбужденном состоянии.

- Сила $f(x)$, возвращающая частицу в положение равновесия при ангармонических колебаниях, определяется выражением

$$f(x) = -\beta x + \gamma x^2,$$

где β – коэффициент гармоничности, связанный с равновесным расстоянием γ_0 между атомами кристалла и модулем продольной упругости E соотношением

$$\beta = \gamma_0 E,$$

где γ – коэффициент ангармоничности, характеризующий асимметрию колебаний атомов в твердом теле. Для оценки по порядку величин можно принять

$$\gamma = \frac{1\beta}{2\gamma_0}.$$

- Коэффициент линейного расширения, по определению,

$$\alpha = \frac{1}{l} \frac{dl}{dT}.$$

Теоретически он выражается через коэффициенты β и γ формулой

$$\alpha = \frac{\gamma k}{\beta^2 r_0} \text{ или приближенно}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{k}{r_0^2 \beta'}$$

где k – постоянная Больцмана.

2.1 Примеры решения задач

Пример 1. Определить количество теплоты ΔQ необходимое для нагревания кристалла $NaCl$ массой $m = 20$ г на $\Delta T = 2$ К, в двух случаях, если нагревание происходит от температуры: 1) $T_1 = \theta_D$; 2) $T_1 = 2$ К. Характеристическую температуру Дебая θ_D для $NaCl$ принять равной 320 К.

Решение. Количество теплоты ΔQ , подводимое для нагревания тела от температуры T_1 до T_2 , может быть вычислено по формуле

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} C dT, \quad (1)$$

где C – теплоемкость тела (системы).

Теплоемкость тела связана с молярной теплоемкостью C_M соотношением $C = \left(\frac{m}{M}\right) C_M$, где m – масса тела; M – молярная масса. Подставив это выражение для C в формулу (1), получим

$$\Delta Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_M dT. \quad (2)$$

В общем случае C_M есть функция температуры, поэтому за знак интеграла ее выносить нельзя. Однако в первом случае изменением теплоемкости по сравнению с ее значением при темпе-

ратуре T_1 можно пренебречь и считать ее на всем интервале температур ΔT постоянной и равной $C_M(T_1)$. Ввиду этого формула (2) примет вид

$$\Delta Q = \frac{m}{M} C_M(T_1) \Delta T. \quad (3)$$

Молярная теплоемкость $C_M(T_1)$ в теории Дебая выражается формулой

$$C_M(T_1) = 3R \left(12 \left(\frac{T_1}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta_D}{T_1}} \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} - \frac{3 \left(\frac{\theta_D}{T_1} \right)}{\exp \left(\frac{\theta_D}{T_1} \right) - 1} \right).$$

В первом случае при $T_1 = \theta_D$ интеграл

$$\int_0^{\frac{\theta_D}{T_1}} \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} = 0,225$$

и, следовательно,

$$C_M = 2,87R.$$

Подставляя это значение C_M в формулу (3) получим

$$\Delta Q = 2,87 \frac{m}{M} R \Delta T. \quad (4)$$

Произведя вычисление по формуле (4), найдем

$$\Delta Q = 16,3 \text{ Дж.}$$

Во втором случае ($T \ll \theta_D$) нахождение ΔQ облегчается тем, что можно воспользоваться предельным законом Дебая, в согласии с которым теплоемкость пропорциональна кубу абсолютной температуры. В этом случае теплоемкость сильно изменя-

ется в пределах заданного интервала температур и ее нельзя выносить за знак интеграла в формуле (2).

Используя выражение предельного закона Дебая

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} \cdot R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3,$$

получим:

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{\theta_D^3} \int_{T_2}^{T_2 + \Delta T} T^3 dT.$$

Выполним интегрирование:

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\theta_D^3} \left(\frac{(T_2 + \Delta T)^4}{4} - \frac{T_2^4}{4} \right). \quad (5)$$

С учетом того, что $T_2 + \Delta T = 2T_2$, выражение (5) примет вид

$$\Delta Q = \frac{3\pi^4}{5} \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{\theta_D^3} 15T_2^4, \text{ или } \Delta Q = 9\pi^4 \cdot \frac{m}{M} R \cdot \frac{T_2^4}{\theta_D^3}.$$

Подставив в последнюю формулу значения величин π , m , M , R , T и θ_D и произведя вычисления, найдем $\Delta Q = 1,22 \text{ мДж}$.

2.2 Задачи для самостоятельного решения

Классическая теория теплоемкости

2.1. Вычислить удельные теплоемкости c кристаллов алюминия и меди по классической теории теплоемкости. [925 Дж/(кг×К); 390 Дж/(кг×К)]

2.2. Пользуясь классической теорией, вычислить удельные теплоемкости c кристаллов $NaCl$ и $CaCl_2$. [825 Дж/(кг×К); 675 Дж/(кг×К)]

2.3. Вычислить по классической теории теплоемкости теплоемкость C кристалла бромида алюминия $AlBr_3$ объемом $V = 1 \text{ м}^3$.

Плотность ρ кристалла бромида алюминия равна $3,01 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. [1,12 МДж/К]

2.4. Определить изменение ΔU внутренней энергии кристалла никеля при нагревании его от $t_1 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ до $t_2 = 200 \text{ }^\circ\text{C}$. Масса m кристалла равна 20 г. Теплоемкость C вычислить. [1,70 кДж]

2.5. Вывести формулу для средней энергии $\langle \varepsilon \rangle$ классического линейного гармонического осциллятора при тепловом равновесии. Вычислить значение $\langle \varepsilon \rangle$ при $T = 300 \text{ К}$. [$\langle \varepsilon \rangle = kT$; $\langle \varepsilon \rangle = 4,14 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$]

2.6. Определить энергию U и теплоемкость C системы, состоящей из $N = 10^{25}$ классических трехмерных независимых гармонических осцилляторов. Температура $T = 300 \text{ К}$.

Указание. Использовать результат решения задачи **2.5**. [124 кДж; 414 Дж/К]

Теория теплоемкости Эйнштейна

2.7. Определить: 1) среднюю энергию $\langle \varepsilon \rangle$ линейного одномерного квантового осциллятора при температуре $T = \theta_E$ ($\theta_E = 200 \text{ К}$); 2) энергию U системы, состоящей из $N = 10^{25}$ квантовых трехмерных независимых осцилляторов, при температуре $T = \theta_E$ ($\theta_E = 300 \text{ К}$). [1) $2,99 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; 2) 134 кДж]

2.8. Найти частоту ν колебаний атомов серебра по теории теплоемкости Эйнштейна, если характеристическая температура серебра $\theta_E = 165 \text{ К}$. [3,44 ТГц]

2.9. Во сколько раз изменится средняя энергия $\langle \varepsilon \rangle$ квантового осциллятора, приходящаяся на одну степень свободы, при повышении температуры от $T_1 = \theta_E/2$ до $T_2 = \theta_E$? Учесть нулевую энергию. [В 3,74 раза]

2.10. Определить отношение $\langle \varepsilon \rangle / \langle \varepsilon_T \rangle$ средней энергии квантового осциллятора к средней энергии теплового движения молекул идеального газа при температуре $T = \theta_E$. [1,16]

2.11. Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна, вычислить изменение ΔU_M молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его на $\Delta T = 2 \text{ К}$ от температуры $T = \theta_E/2$. [36,1 Дж/моль]

2.12. Пользуясь теорией теплоемкости Эйнштейна, опреде-

лечь изменение ΔU_M молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его от 0 до $T_1 = 0,1\theta_E$. Характеристическую температуру θ_E Эйнштейна для данного кристалла принять равной 300 К. [0,34 Дж/моль]

2.13. Определить относительную погрешность, которая будет допущена, если при вычислении теплоемкости C вместо значения, даваемого теорией Эйнштейна (при $T = \theta_E$), воспользоваться значением, даваемым законом Дюлонга и Пти. [8,8 %]

2.14. Вычислить по теории Эйнштейна молярную нулевую энергию $U_{0,M}$ кристалла цинка. Характеристическая температура θ_E для цинка равна 230 К. [2,87 кДж/моль]

Теория теплоемкости Дебая

2.15. Рассматривая в дебаевском приближении твердое тело как систему из продольных и поперечных стоячих волн, установить функцию распределения частот $g(\omega)$ для кристалла с трехмерной кристаллической решеткой. При выводе принять, что число собственных колебаний Z ограничено и равно $3N$ (N – число атомов в рассматриваемом объеме).

$$\left[g(\omega) = \frac{6N}{\omega^3} \omega^2 \right]$$

2.16. Зная функцию распределения частот $g(\omega) = \frac{9N}{\omega^3_{max}} \omega^2$ для трехмерной кристаллической решетки, вывести формулу для энергии кристалла, содержащего число N (равное постоянной Авогадро) атомов.

$$\left[U = 3RT \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}, \text{ где } \theta_D = \frac{h\omega_{max}}{k} \right]$$

2.17. Используя формулу энергии трёхмерного кристалла

$$U_M = 3RT \cdot 3 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

получить выражения для молярной теплоемкости.

$$\left[C = 3R \left(12 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{3(\theta_D/T)}{e^{\theta_D/T} - 1} \right) \right]$$

2.18. Молярная теплоемкость трёхмерного кристалла

$$C_M = 3R \left(12 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{3(\theta_D/T)}{e^{\theta_D/T} - 1} \right)$$

Найти предельное выражение молярной теплоемкости при низких температурах ($T \ll \theta_D$).

$$\left[C = \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \right]$$

2.19. Вычислить по теории Дебая молярную нулевую энергию $U_{0,M}$ кристалла меди. Характеристическая температура θ_D меди равна 320 К. [2,99 кДж/моль]

2.20. Определить максимальную частоту ω_{max} собственных колебаний в кристалле золота по теории Дебая. Характеристическая температура θ_D равна 180 К. [2,36·10¹³ м⁻¹]

2.21. Вычислить максимальную частоту ω_{max} Дебая, если известно, что молярная теплоемкость C_M серебра при $T = 20$ К равна 1,7 Дж/(моль×К). [2,75·10¹³ с⁻¹]

2.22. Найти отношение изменения ΔU внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0,1\theta_D$ к нулевой энергии U_0 . Считать $T \ll \theta_D$. [5,2·10⁻⁸]

2.23. Пользуясь теорией теплоемкости Дебая, определить изменение ΔU_M молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0,1\theta_D$. Характеристическую температуру θ_D Дебая принять равной 300 К. Считать $T \ll \theta_D$. [14,6 Дж/моль]

2.24. Используя квантовую теорию теплоемкости Дебая, вычислить изменение ΔU_M молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его на $\Delta T = 2$ К от температуры $T = \frac{\theta_D}{2}$.

$[\Delta U_M = 2,49R \Delta T = 41,4 \text{ Дж/моль}]$

2.25. При нагревании серебра массой $m=10 \text{ г}$ от $T_1 = 10 \text{ К}$ до $T_2 = 20 \text{ К}$ было подведено $\Delta Q = 0,71 \text{ Дж}$ теплоты. Определить характеристическую температуру θ_D Дебая серебра. Считать $T \ll \theta_D$. [212 К]

2.26. Определить относительную погрешность, которая будет допущена при вычислении теплоемкости кристалла, если вместо значения, даваемого теорией Дебая (при $T = \theta_D$), воспользоваться значением, даваемым законом Дюлонга и Пти. [4,83 %]

2.27. Найти отношение θ_E/θ_D характеристических температур Эйнштейна и Дебая.

Указание: Использовать выражения для нулевых энергий, вычисленных по теориям Эйнштейна и Дебая. [3/4]

2.28. Рассматривая в дебаевском приближении систему из продольных и поперечных стоячих волн, установить функцию распределения частот $g(\omega)$ для кристалла с двумерной решеткой (т.е. кристалла, состоящего из невзаимодействующих колебаний Z ограничено и равно $3N$ (N – число атомов в рассматриваемом объеме)). $\left[g(\omega) = \frac{6N}{\omega^3} \omega \right]$

2.29. Зная функцию распределения частот $g(\omega) = \frac{6N}{\omega^3} \omega$ для кристалла с двумерной решёткой, вывести формулу для внутренней энергии U кристалла, содержащего N (равное постоянной Авогадро) атомов.

$$\left[U = 3RT \cdot 2 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^2 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \right]$$

2.30. Молярная теплоёмкость кристалла с одномерной решеткой выражается формулой

$$C_M = 3R \left(2 \frac{T}{\theta_D} \int_0^{\theta_D/T} \frac{x dx}{\exp(x) - 1} - \frac{\theta_D/T}{\exp(\theta_D/T) - 1} \right).$$

Найти предельное выражение молярной теплоемкости кристалла при низких температурах ($T \ll \theta_D$).

$$\left[C = 43,3R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^2 \right]$$

2.31. Вычислить молярную нулевую энергию $\theta_{0,м}$ кристалла с одномерной решеткой, если характеристическая температура θ_D Дебая равна 300 К.

$$\left[U_{0,м} = R\theta_D = 2,91 \text{ кДж/моль} \right]$$

Теплопроводность неметаллов. Фононы

2.32. Вода при температуре $T_1 = 0$ °С покрыта слоем льда толщиной $h = 50$ см. Температура T воздуха равна 30 °С. Определить количество теплоты Q , переданное водой за время $\tau = 1$ ч через поверхность льда площадью $S = 1$ м². Теплопроводность λ льда равна 2,2 Вт/(м×К). [4,75 кДж]

2.33. Какая мощность N требуется для того, чтобы поддерживать температуру $T_1 = 100$ °С в термостате, площадь S поверхности которого равна 1,5 м², толщина h изолирующего слоя равна 2 см и внешняя температура $T = 20$ °С? [600 Вт]

2.34. Найти энергию ε фоона, соответствующего максимальной частоте ω_{max} Дебая, если характеристическая температура θ_D Дебая равна 250 К. [$3,45 \cdot 10^{-21}$ Дж]

2.35. Определить квазиимпульс ρ фоона, соответствующего частоте $\omega = 0,1\omega_{max}$. Усредненная скорость v звука в кристалле равна 1380 м/с, характеристическая температура θ_D Дебая равна 100 К. Дисперсией звуковых волн в кристалле пренебречь. [10^{-25} Н·с]

2.36. Длина волны λ фоона, соответствующего частоте $\omega = 0,01 \omega_{max}$, равна 52 нм. Пренебрегая дисперсией звуковых волн, определить характеристическую температуру θ_D Дебая, если усредненная скорость v звука в кристалле равно 4,8 км/с. [443 К]

2.37. Вычислить усредненную скорость v фононов (скорость звука) в серебре, Модули продольной E и поперечной G упругости, а также плотность ρ серебра считать известными. [1,50 км/с]

2.38. Характеристическая температура θ_D Дебая для вольфрама равна 310 К. Определить длину волны λ фононов, соответствующих частоте $\nu = 0,1\nu_{max}$. Усредненную скорость звука в вольфраме вычислить. Дисперсией волн в кристалле пренебречь.

[4,8 нм]

2.39. Период d решетки одномерного кристалла (кристалла, атомы которого образуют цепи, не взаимодействующие друг с другом) равен 0,3 нм. Определить максимальную энергию ε_{max} фононов, распространяющихся вдоль этой цепочки атомов. Усредненная скорость u звука в кристалле равна 5 км/с. [$1,1 \cdot 10^{-21}$ Дж]

2.40. Определить усредненную скорость u звука в кристалле, характеристическая температура θ_D которого равно 300 К. Межатомное расстояние D в кристалле равно 0,25 нм. [3,13 км/с]

2.41. Вычислить среднюю длину l свободного пробега фононов k в кварце SiO_2 при некоторой температуре, если при той же температуре теплопроводность $\lambda = 13$ Вт/(м \times К), молярная теплоемкость $C_M = 44$ Дж/(моль \times К) и усредненная скорость u звука равна 5 км/с. Плотность ρ кварца равно $2,65 \cdot 10^3$ кг/м 3 . [4,0 нм]

2.42. Найти отношение средней длины l свободного пробега фононов k параметру d решетки при комнатной температуре в кристалле $NaCl$, если теплопроводность λ при той же температуре равна 71 Вт/(м \times К). Теплоемкость вычислить по закону Неймана-Коппа. Относительные атомные массы: $A_{Na} = 23$, $A_{Cl} = 35,5$; плотность ρ кристалла равна $2,17 \cdot 10^3$ кг /м 3 . Усредненную скорость u звука равна 5 км/с. [4,1]

2.43. Вычислить фононное давление p в свинце при температуре $T = 42,5$ К. Характеристическая температура θ_D Дебая свинца равна 85 К. [46 МПа]

2.44. Определить фононное давление p в меди при температуре $T = \theta_D$, если $\theta_D = 320$ К. [77,7 МПа]

Эффект Мёссбауэра

2.45. Исходя из законов сохранения энергии и импульса при испускании фотона движущимся атомом, получить формулу доплеровского смещения $\Delta\omega/\omega$ для нерелятивистского случая. [$\Delta\omega/\omega \approx (v/c) \cos\theta$]

2.46. Вычислить энергию R , которую приобретает атом вследствие отдачи, в трех случаях: 1) при излучении в видимой части спектра ($\lambda = 500$ нм); 2) при рентгеновском излучении ($\lambda = 0,5$ нм); при γ -излучении ($\lambda = 5 \cdot 10^{-3}$ нм). Массу m_a атома во всех случаях считать одинаковой и равной 100 а.е.м.

$$[R = \frac{2}{m_a} \left(\frac{\pi\hbar}{\lambda} \right)^2 ; 1) 33 \text{ пэВ}; 2) 33 \text{ мэВ}; 3) 0,33 \text{ эВ}]$$

2.47. Уширение спектральной линии излучения атома обусловлено эффектом Доплера и соотношением неопределенностей. Кроме того, вследствие отдачи атома происходит смещение спектральной линии. Оценить для атома водорода относительные изменения $(\Delta\lambda/\lambda)$ длины волны излучения, обусловленные каждой из трех причин. Среднюю скорость $\langle u \rangle$ теплового движения атома принять равной 3 км/с, время τ жизни атома в возбужденном состоянии – 10 нс, энергию ε излучения атома – 10 эВ. $[2 \cdot 10^{-5}; 5 \cdot 10^{-9}; 7 \cdot 10^{-9}]$

2.48. При испускании γ -фотона свободным ядром происходит смещение и уширение спектральной линии. Уширение обусловлено эффектом Доплера и соотношением неопределенностей, а смещение – явлением отдачи. Оценить для ядра ^{57}Fe относительные изменения $(\Delta\lambda/\lambda)$ частоты излучения, обусловленные каждой из трех причин. При расчетах принять среднюю скорость $\langle u \rangle$ ядра (обусловленную тепловым движением) равной 300 м/с, время τ жизни ядра в возбужденном состоянии – 100 нс и энергию ε_γ γ -излучения равной 15 кэВ. $[2 \cdot 10^{-6}; 1,3 \cdot 10^{-7}; 4,4 \cdot 10^{-13}]$

2.49. Найти энергию ΔE возбуждения ядра свободного покоившегося ядра массы m_α , которую оно приобретает в результате захвата γ -фотона с энергией ε . $[\Delta E = \varepsilon_\gamma \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon_\gamma}{m_\alpha c^2}\right]]$

2.50. Свободное ядро ^{40}K испустило γ -фотон с энергией $\varepsilon_\gamma = 30$ кэВ. Определить относительное смещение $(\Delta\lambda/\lambda)$ спектральной линии, обусловленное отдачей ядра.

$$\left[\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\varepsilon_\gamma}{\pm 2m_\alpha c^2} = 4 \cdot 10^{-7}\right]$$

2.51. Ядро ^{67}Zn с энергией возбуждения $\Delta E = 93$ кэВ перешло в основное состояние, испустив γ -фотон. Найти относительное изменение $(\Delta\varepsilon_\gamma/\varepsilon_\gamma)$ энергии γ -фотона, возникающее вследствие отдачи свободного ядра. $\left[\frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_\gamma}{2m_\alpha c^2} = 7,45 \cdot 10^{-7}\right]$

2.52. Энергия связи $E_{\text{св}}$ атома, находящегося в узле кристаллической решетки, составляет 20 эВ. Масса m_α атома равна 80 а.е.м. Определить минимальную энергию ε_γ γ -фотона, при испускании которого атом вследствие отдачи может быть вырван из узла решетки.

$$[\varepsilon_\gamma = \sqrt{2m_\alpha c^2 E_{\text{св}}} = 1,73 \text{ МэВ}]$$

2.53. Энергия возбуждения $\Delta E_{\text{ядра}}$ ^{191}Ir равна 129 кэВ. При какой скорости u сближения источника и поглотителя (содержа-

щих свободные ядра ^{191}Ir) можно вследствие эффекта Доплера скомпенсировать сдвиг полос поглощения и испускания, обусловленных отдачей ядер?

$$\left[v = \frac{\Delta E}{m_{\text{я}} c} = 218 \text{ м/с} \right]$$

2.54. Источник и поглотитель содержат свободные ядра ^{83}Kr . Энергия возбуждения ΔE ядра равна 9,3 кэВ. Определить скорость u сближения источника и поглотителя, при которой будет происходить резонансное поглощение γ -фотона.

$$\left[v = \frac{\Delta E}{m_{\text{я}} c} = 36 \text{ м/с} \right]$$

2.55. Источник и поглотитель содержат ядра ^{161}Dy . Энергия возбуждения ΔE ядер равна 26 кэВ, период полураспада $T_{1/2} = 28$ нс. При какой минимальной скорости u_{min} сближения источника и поглотителя нарушается мёссбауэровское поглощение γ -фотона?

$$\left[v = \frac{\ln 2 \hbar}{T \varepsilon_{\gamma}} = 0,19 \text{ мм/с} \right]$$

2.56. При скорости u сближения источника и поглотителя (содержащих свободные ядра ^{153}Er), равной 10 мм/с, нарушается мёссбауэровское поглощение γ -фотона с энергией $\varepsilon_{\gamma} = 98$ кэВ. Оценить по этим данным среднее время τ жизни возбужденных ядер ^{153}Er .

$$\left[\tau = \frac{\hbar c}{v \varepsilon_{\gamma}} = 0,2 \text{ нс} \right]$$

2.57. Источник γ -фотонов расположен над детектором-поглотителем на расстоянии $l = 20$ м. С какой скоростью u необходимо перемещать вверх источник, чтобы в месте расположения детектора было полностью скомпенсировано изменение энергии γ -фотонов, обусловленное их гравитационным взаимодействием с Землей?

$$\left[v = \frac{gl}{c} = 65 \text{ мкм/с} \right]$$

Тепловое расширение твердых тел

2.58. Найти коэффициент объемного расширения β для анизотропного кристалла, коэффициенты линейного расширения которого по трем взаимно перпендикулярным направлениям составляют $\alpha_1 = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; $\alpha_2 = 1,10 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; $\alpha_3 = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. $[3,40 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}]$

2.59. Вычислить максимальную силу F_{max} , возвращающую атом твердого тела в положение равновесия, если коэффициент

гармоничности $\beta = 50 \text{ Н/м}$, а коэффициент ангармоничности $\gamma = 500 \text{ ГПа}$. [$1,25 \cdot 10^{-9} \text{ Н}$]

2.60. Определить силу F (соответствующую максимальному смещению), возвращающую атом в положение равновесия, если амплитуда тепловых колебаний составляет 5 % от среднего межатомного расстояния при данной температуре. При расчетах принять: коэффициент гармоничности $\beta = 50 \text{ Н/м}$, коэффициент ангармоничности $\gamma = 500 \text{ ГПа}$, среднее межатомное расстояние $r_0 = 0,4 \text{ нм}$. [Максимальная сила притяжения $0,8 \cdot 10^{-9} \text{ Н}$, отталкивания $1,2 \cdot 10^{-9} \text{ Н}$]

2.61. Каково максимальное изменение ΔE_{max} потенциальной энергии атомов в кристаллической решетке твердого тела при гармонических колебаниях, если амплитуда тепловых колебаний составляет 5 % от среднего межатомного расстояния? Среднее расстояние r_0 между атомами принять равным $0,3 \text{ нм}$, модуль Юнга $E = 100 \text{ ГПа}$. [$3,4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$]

2.62. Показать, что если смещение частиц в кристаллической решетке твердого тела подчиняется закону Гука $F(x) = -\beta x$, то тепловое расширение отсутствует. [Среднее смещение $\langle x \rangle$ обращается в нуль при чисто гармонических колебаниях]

2.63. Определить коэффициент гармоничности β в уравнении колебаний частиц твердого тела, если равновесное расстояние r_0 между частицами равно $0,3 \text{ нм}$, модуль Юнга $E = 200 \text{ ГПа}$. [60 Н/м]

2.64. Оценить термический коэффициент расширения α твердого тела, считая, что коэффициент ангармоничности $\gamma \approx \beta/(2r_0)$. При оценке принять: модуль Юнга $E = 100 \text{ ГПа}$, межатомное расстояние $r_0 = 0,3 \text{ нм}$. [$2,5 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$]

2.65. Вычислить коэффициент ангармоничности γ для железа, если температурный коэффициент линейного расширения $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, межатомное расстояние $r_0 = 0,25 \text{ нм}$, модуль Юнга $E = 200 \text{ ГПа}$. [540 ГПа]

2.66. Определить, на сколько процентов изменится межатомное расстояние в твердом теле (при нагревании его до $T = 400 \text{ К}$) по сравнению с равновесным расстоянием $r_0 = 0,3 \text{ нм}$, отвечающим минимуму потенциальной энергии. При расчетах принять $\gamma = \beta/(2r_0)$, модуль Юнга $E = 10 \text{ ГПа}$. [1%]

2.67. Оценить термический коэффициент расширения α твердого тела, обусловленного фононным давлением (в области $T \ll \theta_D$). При оценке принять: плотность ρ кристалла равной 10^4 кг/м^3 , модуль Юнга $E = 100 \text{ ГПа}$, относительную атомную мас-

су $A_r = 60$. [$3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$]

2.68* Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна и классическую теорию (закон Дюлонга и Пти), найти количество теплоты Q , необходимое для нагревания кристалла никеля массой $m = 20$ г при температуре $T_1 = 170$ К на $\Delta T = 2$ К. Характеристическая температура Эйнштейна $\theta_E = 340$ К.

$$\left[Q_{\text{КВ}} = \frac{m}{A} 3R \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \right]$$

3. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

- Одномерное временное уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2},$$

где i – мнимая единица ($\sqrt{-1}$); m – масса частицы; $\psi(x, t)$ – волновая функция, описывающая состояние частицы.

Волновая функция, описывающая одномерное движение свободной частицы,

$$W(x, t) = A \exp \frac{i}{\hbar} (px - Et),$$

где A – амплитуда волны де Бройля; p – импульс частицы; E – энергия частицы.

Одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0,$$

где E – полная энергия частицы; $U(x)$ – потенциальная энергия; $\psi(x)$ – координатная (или амплитудная) часть волновой функции.

Для случая трех измерений $\psi(x, y, z)$, уравнение Шредингера:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0$$

или в операторной форме:

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0, \text{ где}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа.}$$

При решении уравнения Шредингера следует иметь в виду стандартные условия которым должна удовлетворять волновая функция: конечность (во всем пространстве), однозначность, непрерывность самой ψ – функции и ее первой производной.

• Вероятность dW обнаружить частицу в интервале от x до $x + dx$ (в одномерном случае) выражается формулой

$$dW = [\psi(x)]^2 dx,$$

где $[\psi(x)]^2$ – плотность вероятности.

Вероятность W обнаружить частицу в интервале от x_1 до x_2 находится интегрированием dW в указанных пределах

$$W = \int_{x_1}^{x_2} [\psi(x)]^2 dx.$$

• Собственное значение энергии E_n частицы, находящейся на n -м энергетическом уровне в бесконечно глубоко одномерном прямоугольном потенциальном ящике, определяется формулой

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где l – ширина потенциального ящика.

Соответствующая этой энергии собственная волновая функция имеет вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

• Коэффициент преломления n воли де Бройля на границе низкого потенциального барьера бесконечной ширины (рис. 11)

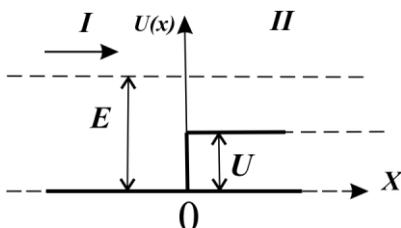


Рисунок 11 – Низкий потенциальный барьер бесконечной ширины

$$n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1},$$

где λ_1 и λ_2 – длины волн де Бройля в областях **I** и **II** (частица движется из области **I** во **II**); k_1 - k_2 – соответствующие значения волновых чисел.

- Коэффициенты отражения ρ и пропускания τ волн де Бройля через низкий ($U < E$) потенциальный барьер бесконечной ширины

$$\rho = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2, \quad \tau = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2},$$

где k_1 и k_2 – волновые числа волн де Бройля в областях **I** и **II**.

- Коэффициент прозрачности D прямоугольного потенциального барьера конечной ширины

$$D \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)d} \right],$$

где U – высота потенциального барьера; E – энергия частицы; d – ширина барьера.

3.1 Примеры решения задач

Пример 1. Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириной l . Вычислить вероятность того, что электрон, находящийся в возбужденном состоянии ($n=2$), будет обнаружен в средней трети ящика.

Решение. Вероятность W обнаружить частицу в интервале $x_1 < x < x_2$ определяется равенством

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx, \quad (1)$$

где $\psi(x)$ – нормированная собственная волновая функция, отвечающая данному состоянию.

Нормированная собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в потенциальном ящике, имеет вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Возбужденному состоянию ($n=2$) отвечает собственная функция

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x. \quad (2)$$

Подставив $\psi_2(x)$ в подынтегральное выражение формулы (1) и вынося постоянные величины за знак интеграла, получим

$$W = \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx. \quad (3)$$

Согласно условию задачи, $x_1 = l/3$ и $x_2 = 2l/3$ (рис. 12). Подставим эти пределы интегрирования в формулу (3), произведем замену

$$\sin^2 \frac{2\pi}{l} x = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi}{l} x \right) \text{ и разобьем интеграл на два:}$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx = \frac{1}{l} \left\{ \int_{l/3}^{2l/3} dx - \int_{l/3}^{2l/3} \cos \frac{4\pi}{l} x dx \right\} = \frac{1}{l} \left\{ \frac{l}{3} - \frac{1}{4\pi} \sin \frac{4\pi}{l} x \Big|_{l/3}^{2l/3} \right\} = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi} \left(\sin \frac{8\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

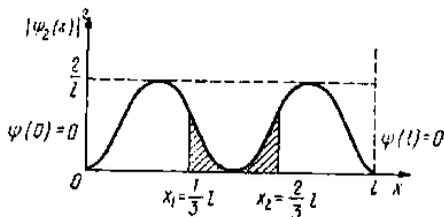


Рисунок 12

Заметив, что

$$\sin \frac{8\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}, \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3},$$

получим $W = 0,195$.

Пример 2. Моноэнергетический поток электронов ($E = 100$ эВ) падает на низкий прямоугольный потенциальный барьер бесконечной ширины (рис. 11). Определить высоту потенциального барьера U , если известно, что 4 % падающих на барьер электронов отражается.

Решение. Коэффициент отражения ρ от низкого потенциального барьера выражается формулой

$$\rho = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2,$$

где k_1 и k_2 – волновые числа, отвечающие движению электронов в областях **I** и **II** (см. рис. 10).

В области **I** кинетическая энергия электрона равна E и волновое число

$$k_1 = (1/\hbar)\sqrt{2mE}.$$

Поскольку координата электрона не определена, то импульс электрона определяется точно и, следовательно, в данном случае можно говорить о точном значении кинетической энергии.

В области **II** кинетическая энергия электрона равна $E-U$ и волновое число

$$k_2 = (1/\hbar)\sqrt{2m(E-U)}.$$

Коэффициент отражения может быть записан в виде

$$\rho = \left(\frac{\sqrt{2mE} - \sqrt{2m(E-U)}}{\sqrt{2mE} + \sqrt{2m(E-U)}} \right)^2$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2mE}$

$$\rho = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - U/E}}{1 + \sqrt{1 + U/E}} \right)^2$$

Решая уравнение относительно $\sqrt{1 - U/E}$, получим:

$$\sqrt{1 - U/E} = \frac{1 - \sqrt{\rho}}{1 + \sqrt{\rho}}$$

Возведя обе части равенства в квадрат, найдем высоту потенциального барьера:

$$U = \left[1 - \left(\frac{1 - \sqrt{\rho}}{1 + \sqrt{\rho}} \right)^2 \right] E,$$

Подставив сюда значения величин и произведя вычисления, найдем $U = 55,6$ эВ.

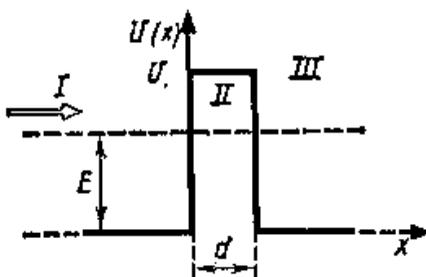


Рисунок 13

Пример 3. Электрон с энергией $E = 4,9$ эВ движется в положительном направлении оси x (рис. 13). Высота U потенциального барьера равна 5 эВ. при какой ширине d барьера вероятность W прохождения электрона через него будет равна 0,2?

Решение. Вероятность W прохождения частицы через потенциальный барьер по своему физическому смыслу совпадает с

коэффициентом прозрачности $D(W=D)$. Тогда вероятность того, что электрон пройдет через прямоугольный потенциальный барьер, выразится соотношением

$$W \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)d} \right], \quad (1)$$

где m – масса электрона. Потенцируя это выражение, получим

$$\ln W = -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)d}.$$

Для удобства вычислений изменим знак у правой и левой части этого равенства и найдем d :

$$d = \frac{\hbar \ln(1/W)}{2\sqrt{2m(U - E)}}.$$

Входящие в эту формулу величины выразим в единицах СИ и произведем вычисления:

$$d = 4,95 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,945 \text{ нм}.$$

Учитывая, что формула (1) приближенная и вычисления носят оценочный характер, можно принять $d \approx 0,5 \text{ нм}$.

3.2 Задачи для самостоятельного решения

Уравнение Шредингера

3.1. Написать уравнение Шредингера для электрона, находящегося в водородоподобном атоме.

$$\left[\Delta \psi \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0 \right]$$

3.2. Написать уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора. Учесть, что сила, возвращающая частицу в положение равновесия, $f = -\beta x$ (где β – коэффициент пропорциональности, x – смещение).

$$\left[\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{1}{2} \beta x^2 \right) \psi = 0 \right]$$

3.3. Временная часть уравнения Шредингера имеет вид

$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi$. Найти решение уравнения.

$$\left[\Psi = C \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \psi = 0 \right]$$

3.4. Написать уравнение Шредингера для свободного электрона, движущегося в положительном направлении оси X со скоростью v . Найти решение этого уравнения.

$$\left[i\hbar \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2}; \psi(x, t) = \exp\left[-i \frac{Et - p_x x}{\hbar}\right] \right]$$

3.5. Почему при физической интерпретации волновой функции говорят не о самой ψ -функции, а о квадрате ее модуля ψ^2 ? [Квадрат модуля волновой функции имеет определенный физический смысл. Аналогично тому как в волновой оптике мерой интенсивности волны является квадрат амплитуды, так $|\psi|^2$ является мерой интенсивности (плотностью вероятности), пропорциональной концентрации частиц]

3.6. Чем обусловлено требование конечности ψ -функции? [Только при условии конечности ψ -функции возможна физическая интерпретация $|\psi|^2$ как плотности вероятности]

3.7. Уравнение Шредингера для стационарных состояний имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (U - E)\psi = 0.$$

Обосновать, исходя из этого уравнения, требования, предъявляемые к волновой функции, – ее непрерывность и непрерывность первой производной от волновой функции. [Значения

энергии U и E , а также ψ конечны. Следовательно, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$, должна

быть ограничена, а это возможно, если непрерывна $\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Но

чтобы $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ существовало во всей интересующей нас области, $\psi(x)$ должна быть непрерывна]

3.8. Может ли $|\psi(x)|^2$ быть больше единицы? [Может. Меньше единицы должно быть выражение $|\psi(x)|^2 dx$, обозна-

чающее вероятность обнаружения частицы в интервале от x до $x+dx$. Но $|\psi(x)|^2 dx$ может быть меньше единицы и при условии $|\psi(x)|^2 > 1$

3.9. Показать, что для ψ -функции выполняется равенство $|\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi^*(x)$, где $\psi^*(x)$ означает функцию, комплексно сопряженную $\psi(x)$. [Если $\psi(x) = a+ib$, то $\psi^*(x) = a-ib$; $|\psi(x)|^2 = a^2+b^2$; $\psi(x)\psi^*(x) = (a+ib) \times (a-ib) = a^2+b^2$. Отсюда $|\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi^*(x)$

3.10. Доказать, что если ψ -функция циклически зависит от времени, т.е.

$$\left[\Psi(x, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right) \psi(x) \right]$$
, то плотность вероятности есть функция только координаты. [$|\psi(x, t)|^2 = \psi(x, t)\psi^*(x, t) = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \psi(x, t) \exp\left(\frac{iEt}{\hbar}\right) \psi^*(x, t)$ или $|\psi(x, t)|^2 = |\psi(x)|^2$]

Одномерный бесконечно глубокий потенциальный ящик

3.11. Электрон находится в бесконечно глубоком прямоугольном одномерном потенциальном ящике шириной l (рис. 14). Написать уравнение Шредингера и его решение (в тригонометрической форме) для области **II** ($0 < x < l$).

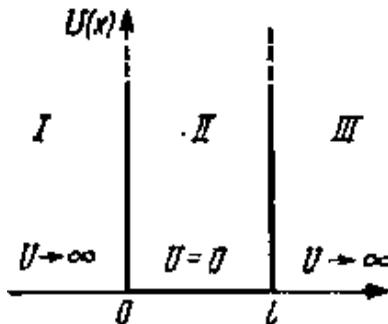


Рисунок 14

3.12. Известна волновая функция, описывающая состояние электрона в потенциальном ящике шириной l : $\psi(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$. Используя граничные условия $\psi(0) = 0$ и $\psi(l) = 0$ определить коэффициент C_2 и возможные значения волнового вектора

k , при котором существуют нетривиальные решения. [$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi(x) = 0$; $\psi(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$]

3.13. Электрону в потенциальном ящике шириной l отвечает волновое число $k = \pi n/l$ ($n=1, 2, 3, \dots$). Используя связь энергии E электрона с волновым числом k , получить выражение для собственных значений энергии E_n . [$C_2=0$; $k = \pi n/l$]

3.14. Частица находится в потенциальном ящике. Найти отношение разности соседних энергетических уровней $\Delta E_{n+1,n}$ к энергии E_n частицы в трех случаях: 1) $n = 3$; 2) $n = 10$; 3) $n \rightarrow \infty$. [$E = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}$]

Пояснить полученные результаты.

3.15. Электрон находится в потенциальном ящике шириной $l = 0,5$ нм. Определить наименьшую разность ΔE энергетических уровней электрона. Ответ выразить в электрон-вольтах.

[$\frac{\Delta E_{n+1,n}}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2}$; 1) 0,78; 2) 0,21; 3) 0. При малых n отчетливо

выступает дискретный характер энергетического спектра, при больших – дискретный характер сглаживается и энергетический спектр становится квазинепрерывным]

3.16. Собственная функция, описывающая состояние частицы в потенциальном ящике, имеет вид $\psi_n(x) = C \sin \frac{\pi n}{l} x$.

Используя условия нормировки, определить постоянную C .

$$[C_n = \sqrt{\frac{2}{l}}]$$

3.17. Решение уравнения Шредингера для бесконечно глубокого одномерного прямоугольного потенциального ящика можно записать в виде $\psi(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$, где $k = \sqrt{2mE} / \hbar$.

Используя граничные условия и нормировку ψ -функции, определить: 1) коэффициенты C_1 и C_2 ; 2) собственные значения энергии E_n . Найти выражение для собственной нормированной ψ -функции.

$$[1) C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{2l}}]$$

$$2) E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2} \text{ и } \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x]$$

3.18. Изобразить на графике вид первых трех собственных

функций $\psi_n(x)$, описывающих состояние электрона в потенциальном ящике шириной l , а также вид $|\psi(x)|^2$. Установить соответствие между числом N узлов волновой функции (т. е. числом точек, где волновая функция обращается в нуль в интервале $0 < x < l$) и квантовым числом n . Функцию считать нормированной на единицу. [См. рисунок. 15 Число узлов N растет с увеличением квантового числа n : $N = n - 1$, т.е. на единицу меньше, чем квантовое число. С увеличением энергии l уменьшается, а число узлов возрастает]

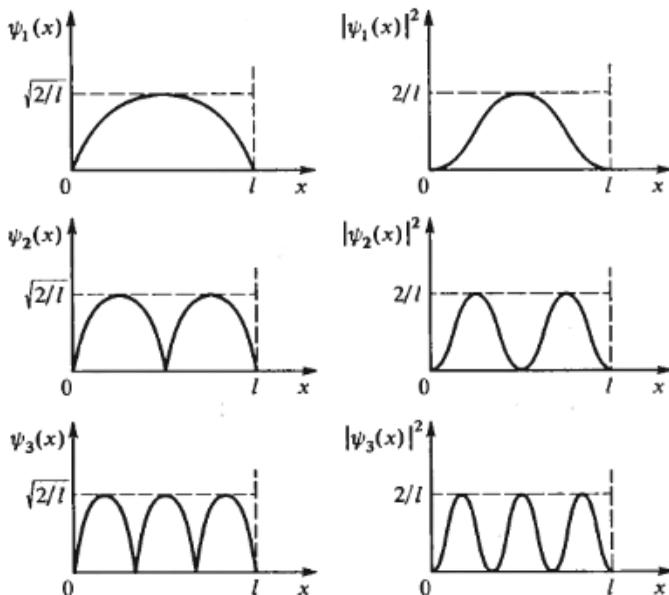


Рисунок 15

3.19. Частица в потенциальном ящике шириной l находится в возбужденном состоянии ($n = 2$). Определить, в каких точках интервала ($0 < x < l$) плотность вероятности $|\psi(x)|^2$ нахождения частицы максимальна и минимальна. [Максимальна при $x_1 = \frac{l}{4}$ и $x_3 = 3\frac{l}{4}$; минимальна при $x_2 = \frac{l}{2}$]

3.20. Электрон находится в потенциальном ящике шириной l . В каких точках в интервале ($0 < x < l$) плотность вероятности нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях одинакова? Вычислить плотность вероятности для этих точек. Решение пояснить графически.

[Рисунок 16. $x_1 = \frac{l}{3}$; $x_2 = \frac{2l}{3}$; $|\psi(x)|^2 = \frac{3l}{2}$]

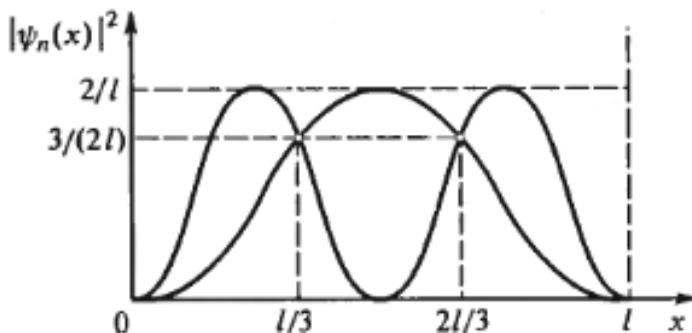


Рисунок 16

3.21. Частица в потенциальном ящике находится в основном состоянии. Какова вероятность W нахождения частицы: 1) в средней трети ящика; 2) в крайней трети ящика? [1) 0,609; 2) 0,195]

3.22. В одномерном потенциальном ящике шириной l находится электрон. Вычислить вероятность W нахождения электрона на первом энергетическом уровне в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ящика. [0,475]

3.23. Частица в потенциальном ящике шириной l находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность W нахождения частицы в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ящика. [0,091]

3.24. Вычислить отношение вероятностей W_1/W_2 нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок одномерной потенциальной ямы шириной l . [5,22]

3.25. Показать, что собственные функции

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad \text{и} \quad \psi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi m}{l} x, \quad \text{описывающие}$$

состояние частицы в потенциальном ящике, удовлетворяют условию ортогональности, т. е.

$$\int_0^l \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_0^l \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{1}{2} \cos \frac{\pi(n-m)}{l} x dx - \frac{2}{l} \int_0^l \frac{1}{2} \cos \frac{\pi(n+m)}{l} x dx.$$

При $n = m$ первый интеграл обращается в $\frac{l}{2}$, а второй в нуль. При $n \neq m$ оба интеграла дают нуль, и, следовательно,

$$\int_0^l \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

3.26. Электрон находится в одномерном потенциальном ящике шириной l . Определить среднее значение координаты $\langle x \rangle$ электрона ($0 < x < l$). [$\langle x \rangle = \frac{l}{2}$]

3.27. Используя выражение энергии $E_n = \pi^2 \hbar^2 n^2 / (m l^2)$ частицы, находящейся в потенциальном ящике, получить приближенное выражение энергии: 1) гармонического осциллятора; 2) водородоподобного атома. Сравнить полученные результаты с истинными значениями энергий. [1) $E_n = \frac{\pi}{4} \hbar \omega n$, отличается от истинного в $\frac{\pi}{4}$ раз; 2) $E_n = \frac{4}{\pi^2} \frac{Z^2 e^4 m}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$, отличается от истинного в $\frac{4}{\pi^2}$ раз]

Двух- и трехмерный потенциальный ящик

3.28. Считая, что нуклоны в ядре находятся в трехмерном потенциальном ящике кубической нормы с линейными размерами $l = 10$ фм, оценить низший энергетический уровень нуклонов в ядре. [6,2 МэВ]

3.29. Определить из условия нормировки коэффициент C собственной ψ -функции

$$\psi_{n_1 n_2}(x, y) = C \sin \frac{\pi n_1}{l_1} x \cdot \sin \frac{\pi n_2}{l_2} y,$$

описывающей состояние электрона в двухмерном бесконечно глубоком потенциальном ящике со сторонами l_1 и l_2 .

$$C = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}}$$

3.30. Электрон находится в основном состоянии в двух-

мерном квадратном бесконечно глубоком потенциальном ящике со стороной l . Определить вероятность W нахождения электрона в области, ограниченной квадратом, который равноудален от стенок ящика и площадь которого составляет $1/4$ площади ящика. [0,67]

3.31. Определить из условия нормировки коэффициент собственной ψ -функции

$$\Psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = C \sin \frac{\pi n_1}{l_1} x \sin \frac{\pi n_2}{l_2} y \sin \frac{\pi n_3}{l_3} z, \quad \text{описывающей}$$

состояние электрона в трехмерном потенциальном бесконечно

глубоком ящике со сторонами l_1, l_2, l_3 .
$$\left[C = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{l_1 l_2 l_3}} \right]$$

Низкий потенциальный барьер бесконечной ширины

3.32. Написать уравнение Шредингера для электрона с энергией E , движущегося в положительном направлении оси X для областей **I** и **II** (см. рис. 14), если на границе этих областей имеется низкий потенциальный барьер высотой U .

$$[\psi_I''(x) + k_1^2 \psi_I(x) = 0; \psi_{II}''(x) + k_2^2 \psi_{II}(x) = 0,$$

$$\text{где } k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}; \quad k_2^2 = \frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}]$$

3.33. Написать решения уравнений Шредингера (см. предыдущую задачу) для областей **I** и **II**. Какой смысл имеют коэффициенты A_1 и B_1 для $\psi_I(x)$ и A_2 и B_2 для $\psi_{II}(x)$? Чему равен коэффициент B_2 ?

$$[\psi_I(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}; \quad \psi_{II}(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x},$$

где $k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$; $k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E-U_0)}$, A_1 – амплитуда вероятности для падающей волны, B_1 – амплитуда вероятности волны, отраженной от барьера, A_2 – амплитуда вероятности волны, прошедшей через барьер (область II), B_2 – амплитуда вероятности волны, идущей справа налево в области II. Т.к. такая волна отсутствует, то $B_2=0$. Рис. 17]



Рисунок 17

3.34. Зная решение уравнений Шредингера для областей **I** и **II** потенциального барьера $\psi_I(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$, $\psi_{II}(x) = A_2 e^{ik_2 x}$ определить из условий непрерывности ψ -функций и их первых производных на границе барьера отношение амплитуд вероятности B_1/A_1 и A_2/A_1 .

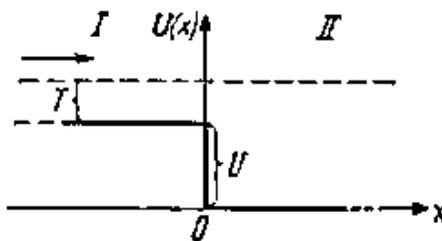


Рисунок 18

$$\left[\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} ; \frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right]$$

3.35. Зная отношение амплитуд вероятности $\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ для волны, отраженной от барьера, и $\frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$ для проходящей волны, найти выражение для коэффициента отражения ρ и коэффициента прохождения τ .

$$\left[\rho = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2; \tau = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \right]$$

3.36. Считая выражения для коэффициента отражения ρ от потенциального барьера и коэффициента прохождения τ известными, показать, что $\rho + \tau = 1$.

$$\left[\rho + \tau = \frac{k_1^2 - 2k_1 k_2 + k_2^2 + 4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{k_1 - 2k_1 k_2 + k_2^2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = 1 \right]$$

3.37. Электрон с энергией $E = 25$ эВ встречает на своем пути потенциальный барьер высотой $U = 9$ эВ (см. рис. 18). Определить коэффициент преломления n волн де Бройля на границе барьера. [0,8]

3.38. Определить коэффициент преломления n волн де Бройля для протонов на границе потенциальной ступени (рис. 18). Кинетическая энергия протонов равна 16 эВ, а высота U потенциальной ступени равна 9 эВ. [Указание: $n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_1}{k_2}$. Но

так как $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ и $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$, то $n = \sqrt{\frac{1-U_0}{E}}$]

3.39. Электрон обладает энергией $E = 10$ эВ. Определить, во сколько раз изменятся его скорость v , длина волны де Бройля λ и фазовая скорость при прохождении через потенциальный ба-

рьер (см. рис. 18) высотой $U = 6$ эВ. $\left[n = \sqrt{\frac{1+U_0}{E}} = 1,25 \right]$

3.40. Протон с энергией $E = 1$ МэВ изменил при прохождении потенциального барьера дебройлевскую длину волны на 1 %. Определить высоту U потенциального барьера. [0,632; 1,58; 0,632]

3.41. На пути электрона с дебройлевской длиной волны $\lambda_1 = 0,1$ нм находится потенциальный барьер высотой $U = 120$ эВ. Определить длину волны де Бройля λ_2 после прохождения барьера. [20 кэВ]

3.42. Электрон с энергией $E = 100$ эВ попадает на потенциальный барьер высотой $U = 64$ эВ. Определить вероятность W того, что электрон отразится от барьера.

$$\left[\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\frac{1-mU_0\lambda_1^2}{2\pi^2\hbar^2}}} = 218\text{пм} \right]$$

3.43. Найти приближенное выражение коэффициента отражения ρ от очень низкого потенциального барьера ($U \ll E$). [0,0625]

3.44. Коэффициент отражения ρ протона от потенциально-го барьера равен $2,5 \cdot 10^{-5}$. Определить, какой процент составляет высота U барьера от кинетической энергии T падающих на барьер протонов.

$$\left[\rho = \frac{1}{16} \left(\frac{U_0}{E} \right)^2 \right]$$

3.45. Вывести формулу, связывающую коэффициент преломления n волн де Бройля на границе низкого потенциального барьера и коэффициент отражения ρ от него.

$$\left[\rho = \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2 \right]$$

3.46. Определить показатель преломления n волн де Бройля при прохождении частицей потенциального барьера с коэффициентом отражения $\rho = 0,5$. [0,172 и 5,83]

3.47. При каком отношении высоты U потенциального барьера и энергии E электрона, падающего на барьер, коэффициент отражения $\rho = 0,5$? [0,971]

3.48. Электрон с энергией $E = 10$ эВ падает на потенциальный барьер. Определить высоту U барьера, при которой показатель преломления n волн де Бройля и коэффициент отражения ρ численно совпадают. [9,13 эВ]

3.49. Кинетическая энергия T электрона в два раза превышает высоту U потенциального барьера. Определить коэффициент отражения ρ и коэффициент прохождения τ электронов на границе барьера. [0,0295; 0,97]

3.50. Коэффициент прохождения τ электронов через низкий потенциальный барьер равен коэффициенту отражения ρ . Определить, во сколько раз кинетическая энергия T электронов больше высоты U потенциального барьера. [В 1,03 раза]

3.51. Вывести формулу, связывающую коэффициент прохождения τ электронов через потенциальный барьер и коэффи-

циент преломления n волн де Бройля. $[\tau = \frac{4n}{(1+n)^2}]$

3.52. Коэффициент прохождения τ протонов через потенциальный барьер равен 0,8. Определить показатель преломления n волн де Бройля на границе барьера. $[0,384; 2,61]$

3.53. Электрон с кинетической энергией T движется в положительном направлении оси X . Найти выражение для коэффициента отражения ρ и коэффициента прохождения τ на границе потенциальной ступени высотой U (рис. 18).

$$\left[\rho = \frac{\left| 1 - \sqrt{1 + \frac{U_0}{T}} \right|^2}{\left| 1 + \sqrt{1 + \frac{U_0}{T}} \right|^2} ; \tau = \frac{4 \sqrt{1 + \frac{U_0}{T}}}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{U_0}{T}} \right)^2} \right]$$

3.54. Найти приближенное выражение для коэффициента прохождения τ через низкий потенциальный барьер при условии, что кинетическая энергия T частицы в области **II** (см. рис. 18)

много меньше высоты U потенциального барьера. $[\tau \approx 4 \sqrt{\frac{T}{U}}]$

3.55. Вычислить коэффициент прохождения τ электрона с энергией $E = 100$ эВ через потенциальный барьер высотой $U = 99,75$ эВ. $[0,2]$

3.56. Показать на частном примере низкого потенциально-го барьера сохранение полного числа частиц, т. е. что плотность потока N электронов, падающих на барьер, равна сумме плотности потока N_p электронов, отраженных от барьера, и плотности потока N_t электронов, прошедших через барьер. [По определению,

$$\rho = \frac{N_p}{N} = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 \text{ и } \tau = \frac{N_t}{N} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 - k_2)^2}, \text{ следовательно}$$

$$\rho + \tau = \frac{N_p}{N} + \frac{N_t}{N} = 1, N_p + N_t = N]$$

3.57. На низкий потенциальный барьер направлен моноэнергетический поток электронов с плотностью потока энергии $J_1 = 10$ Вт/м². Определить плотность потока энергии J_2 электронов, прошедших барьер, если высота его $U = 0,91$ эВ и энергия E электронов в падающем потоке равна 1 эВ.

$$\left[j = 4 \frac{\left(1 - \frac{U_0}{E}\right)^{3/2}}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}\right)^2} j_1 = 0,631 \text{ Вт/м}^2 \right]$$

3.58. Моноэнергетический поток электронов падает на низкий потенциальный барьер (см. рис. 18). Коэффициент прохождения $\tau = 0,9$. Определить отношение J_2/J_1 плотности потока энергии волны, прошедшей барьер, к плотности потока энергии волны, падающей на барьер.

$$\left[\frac{j_2}{j_1} = \tau \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \tau}}{1 + \sqrt{1 - \tau}} \right)^2 = 0,243 \right]$$

3.59. На низкий потенциальный барьер падает моноэнергетический поток электронов. Концентрация n_0 электронов в падающем потоке равна 10^9 мм^{-3} , а их энергия $E = 100 \text{ эВ}$. Определить давление, которое испытывает барьер, если его высота $U = 9,7 \text{ эВ}$. [48 мПа]

Высокий потенциальный барьер бесконечной ширины

3.60. Написать уравнение Шредингера и найти его решение для электрона, движущегося в положительном направлении оси x для областей **I** и **II** (рис. 19), если на границе этих областей имеется потенциальный барьер высотой U .

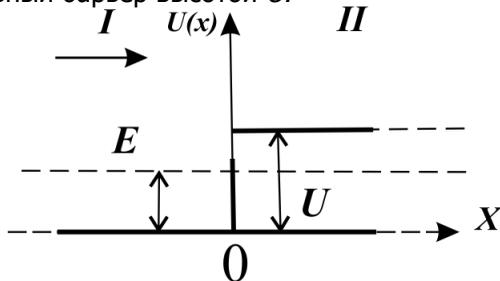


Рисунок 19

[Для области **I**

$$\psi_1''(x) + k_1^2 \psi_1(x) = 0; \psi_I = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-k_1 x}; \text{ где}$$

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}. \text{ Для области II } \psi_{II}''(x) + k_2^2 \psi_{II}(x) = 0, \psi_{II}(x) =$$

$$A_2 e^{-k_2 x}, \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$$



Рисунок 20

3.61. Для областей **I** и **II** высокого потенциального барьера (см. рис. 15) ψ -функции имеют вид $\psi_I = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-k_1 x}$ и $\psi_{II}(x) = A_2 e^{-kx}$. Используя непрерывность ψ -функций и их первых производных на границе барьера, найти отношение амплитуд A_2/A_1 .

$$\left[\frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + ik} \right]$$

3.62. Написать выражение для $\psi_{II}(x)$ в области **II** (рис. 20) высокого потенциального барьера, если ψ -функция нормирована так, что $A_1 = 1$. $\left[\psi_{II}(x) = \frac{2k_1 e^{-kx}}{k_1 + ik} \right]$

3.63. Амплитуда A_2 волны в области **II** высокого потенциального барьера (рис. 19) равна $2k_1 / (k_1 + ik)$ ($k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar, k = \sqrt{2m(U - E)}/\hbar$). Установить выражение для плотности вероятности нахождения частицы в области **II** ($x > 0$), если энергия частицы равна E , а высота потенциального барьера равна U .

$$\left[|\psi_{II}(x)|^2 = \frac{4E}{U} \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}x\right) \right]$$

3.64. Используя выражение для коэффициента отражения от низкой ступени $\rho = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2$, где k_1 и k_2 – волновые числа, найти выражение коэффициента отражения от высокой ступени

$(T < U)$.

$$\left[\rho = \left| \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + k_2} \right|^2 \right]$$

3.65. Показать, что имеет место полное отражение электронов от высокого потенциального барьера, если коэффициент

отражения может быть записан в виде $\rho = \left| \frac{k_1 - ik}{k_1 + ik} \right|^2$.

$$\left[|\rho|^2 = \rho \rho^* \frac{k_1 - ik}{k_1 + ik} \frac{k_1 + ik}{k_1 - ik} = 1 \right]$$

3.66. Определить плотность, вероятности $|\psi_{II}(0)|^2$ нахождения электрона в области **II** высокого потенциального барьера в точке $x = 0$, если энергия электрона равна E , высота потенциального барьера равна U и ψ -функция нормирована так, что $A_I = 1$. [$|\psi_{II}(0)|^2 = \frac{4E}{U_0}$]

Прямоугольный потенциальный барьер конечной ширины

3.67. Написать уравнения Шредингера для частицы с энергией E , движущейся в положительном направлении оси X для областей **I**, **II** и **III** (см. рис. 15), если на границах этих областей имеется прямоугольный потенциальный барьер высотой U и шириной d .

$$\begin{aligned} [\psi_I''(x) + k_1^2 \psi_I(x) = 0; \psi_{II}''(x) + k_2^2 \psi_{II}(x) = 0; \\ \psi_{III}''(x) + k_3^2 \psi_{III}(x) = 0, \text{ где } k_1^2 = k_3^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}; \\ k_2^2 = \frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}] \end{aligned}$$

3.68. Написать решения уравнений Шредингера (см. предыдущую задачу) для областей **I**, **II** и **III**, пренебрегая волнами, отраженными от границ **I** – **II** и **II** – **III**, и найти коэффициент прозрачности D барьера.

$$\begin{aligned} [\psi_I(x) = A_1 e^{ik_1 x}; \psi_{II}(x) = A_2 e^{-kx}; \\ \psi_{III}(x) = A_3 e^{ik_3 x} = 0, \end{aligned}$$

где $k_1 = k_3 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$; $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$,

A_1 – амплитуда вероятности для падающей волны; A_2 – амплитуда вероятности для прошедшей через ступень волны. Пренебрегая отраженными волнами на границах I – II и II– III, можно записать: $A_2 \approx A_1$ и $A_3 \approx a_2 e^{-kd}$;

$$D = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = \exp(-2kd),$$

или $D = \exp\left[-\left(\frac{2}{\hbar}\right) \sqrt{2m(U_0 - E)}\right]$. На рисунке 21 изображены действительная часть падающей волны в области I ($ReA_1 e^{ik_1 x}$), экспоненциально убывающая волновая функция в области II ($\psi_{II}(x) = A_2 e^{-k x}$) и действительная часть прошедшей волны в области III ($ReA_3 e^{ik_3 x}$)

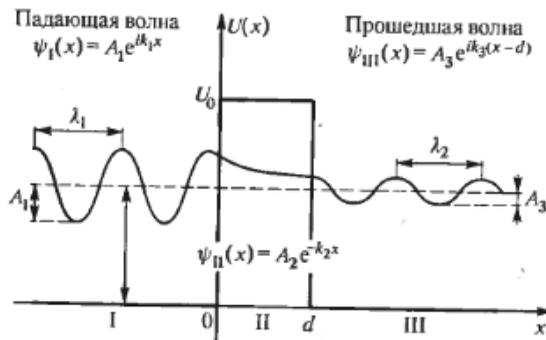


Рисунок 21

3.69. Найти вероятность W прохождения электрона через прямоугольный потенциальный барьер при разности энергий $U - E = 1$ эВ, если ширина барьера: 1) $d = 0,1$ нм; 2) $d = 0,5$ нм. [0,35; $5,9 \cdot 10^{-3}$]

3.70. Электрон проходит через прямоугольный потенциальный барьер шириной $d = 0,5$ нм. Высота U барьера больше энергии E электрона на 1 %. Вычислить коэффициент прозрачности D , если энергия электрона: 1) $E = 10$ эВ; 2) $E = 100$ эВ. [0,2; $6,5 \cdot 10^{-3}$]

3.71. Ширина d прямоугольного потенциального барьера

равна 0,2 нм. Разность энергий $U - E = 1$ эВ. Во сколько раз изменится вероятность W прохождения электрона через барьер, если разность энергий возрастет в $n = 10$ раз? [Уменьшится в 79 раз]

3.72. Электрон с энергией $E = 9$ эВ движется в положительном направлении оси X . При какой ширине d потенциального барьера коэффициент прозрачности $D = 0,1$, если высота U барьера равна 10 эВ? Изобразите на рисунке примерный вид волновой функции (ее действительную часть) в пределах каждой из областей **I**, **II**, **III** (см. рис. 15).

$$\left[d = \frac{\hbar \ln\left(\frac{1}{D}\right)}{2\sqrt{2m(U_0 - E)}} = 0,22 \text{ нм} \right]$$

3.73. При какой ширине d прямоугольного потенциального барьера коэффициент прозрачности D для электронов равен 0,01? Разность энергий $U - E = 10$ эВ. [0,143 нм]

3.74. Электрон с энергией E движется в положительном направлении оси X . При каком значении $U_0 - E$, выраженном в электрон-вольтах, коэффициент прозрачности $D = 10^{-3}$, если ширина d барьера равна 0,1 нм?

$$\left[U_0 - E = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar \ln\left(\frac{1}{D}\right)}{2d} \right)^2 = 0,45 \text{ эВ} \right]$$

3.75. Электрон с энергией $E = 9$ эВ движется в положительном направлении оси X . Оценить вероятность W того, что электрон пройдет через потенциальный барьер, если его высота $U = 10$ эВ и ширина $d = 0,1$ нм. [0,2]

3.76. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $d = 0,1$ нм. При какой разности энергий $U - E$ вероятность W прохождения электрона через барьер равна 0,99? [10^{-4} эВ]

3.77. Ядро испускает α -частицы с энергией $E = 5$ МэВ. В грубом приближении можно считать, что α -частицы проходят через прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 10$ МэВ и шириной $d = 5$ фм. Найти коэффициент прозрачности D барьера для α -частиц. [0,89]

3.78. Протон и электрон прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi = 10$ кВ. Во сколько раз отличаются коэффициенты прозрачности D_e для электрона и D_p для протона, если высота U барьера равна 20 кэВ и ширина $d = 0,1$ пм? [При-

мерно 74]

4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Электроны в металле (по квантовой статистике)

• Распределение Ферми по энергиям для свободных электронов в металле: при $T \neq 0$

$$dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{\exp[(\varepsilon - \varepsilon_F)/(kT)] + 1};$$

при $T = 0$

$$dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \quad (\text{при } \varepsilon < \varepsilon_F),$$

где $dn(\varepsilon)$ – концентрация электронов, энергия которых заключена в интервале значений от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$; m и ε – масса и энергия электрона; ε_F – уровень (или энергия) Ферми.

• Уровень Ферми в металле при $T = 0$:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}.$$

• Температура $T_{\text{кр}}$ вырождения

$$T_{\text{кр}} = \frac{2\pi\hbar^2}{3m} n^{2/3}.$$

Полупроводники

• Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = en(b_n + b_p),$$

где e – заряд электрона; n – концентрация носителей заряда (электронов и дырок); b_n и b_p – подвижности электронов и дырок.

Напряжение U_H на гранях образца при эффекте Холла

$$U_H = R_H B j l,$$

где R_H – постоянная Холла; B – индукция магнитного поля; l – ширина пластины; j – плотность тока.

• Постоянная Холла для полупроводников типа алмаза, кремния германия и др., обладающих носителями заряда одного вида (n или p),

$$R_H = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{en},$$

где n – концентрация носителей заряда.

Магнитный резонанс

• Магнитный момент ядра:

$$M_I = g\mu_N \sqrt{I(I+1)},$$

где g – ядерный фактор Ланде (g -фактор); μ_N – ядерный магнетон ($\mu_N = e\hbar/(2m_p)$), m_p – масса протона; I – спиновое квантовое число ядра спин ядра (магнитным моментом ядра называют также максимальное значение проекции магнитного момента ядра на направление вектора магнитной индукции внешнего поля, т. е. $M = M_{zmax} = g\mu_N I$).

• Связь магнитного момента ядра с моментом импульса L_I ядра

$$M_I = \gamma L_I,$$

где γ – гиромагнитное отношение ($\gamma = g\mu_N/\hbar$) и

$$L_I = \hbar \sqrt{I(I+1)}.$$

• Проекция магнитного момента ядра на направление вектора магнитной индукции внешнего поля

$$M_z = g\mu_N m_I,$$

где m_I – спиновое магнитное квантовое число ядра, $m_I = I, I-1, I-2, \dots, -I$.

• Циклическая частота ω_0 переменного магнитного поля, при которой происходит резонансное поглощение энергии,

$$\omega_0 = \gamma B_0,$$

где B_0 – магнитная индукция внешнего постоянного магнитного поля.

• Отношение заселенностей энергетических уровней (в отсутствие высокочастотного поля)

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right),$$

где N_1 – заселенность энергетического уровня E_1 , N_2 – заселенность энергетического уровня E_2 ; $E_2 > E_1$.

4.1. Примеры решения задач

Пример 1. Кусок металла объемом $V = 20 \text{ см}^3$ находится при температуре $T = 0$. Определить число ΔN свободных электронов, импульсы которых отличаются от максимального импульса p_{max} не более чем на $0,1p_{max}$. Энергия Ферми $\varepsilon_F = 5 \text{ эВ}$.

Решение. Для того чтобы установить распределение свободных электронов в металле по импульсам, воспользуемся распределением Ферми для свободных электронов при $T = 0$:

$$dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon. \quad (1)$$

Так как $dn(\varepsilon)$ есть число электронов в единице объема, энергии которых заключены в интервале значений от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$ ($\varepsilon < \varepsilon_F$), то оно должно быть равно числу электронов $dn(p)$ в единице объема, заключенных в интервале значений импульса от p до $p + dp$, т. е.

$$dn(p) = dn(\varepsilon). \quad (2)$$

При этом должно соблюдаться следующее условие. Данной энергии ε соответствует определенный импульс p ($\varepsilon = p^2/(2m)$) и интервалу энергии $d\varepsilon$ отвечает соответствующий ему интервал импульсов dp ($d\varepsilon = \frac{p}{m} dp$).

Заметив, что $\varepsilon^{1/2} = p/(2m)^{1/2}$, подставим в правую часть равенства (2) вместо $dn(\varepsilon)$ выражение (1) с заменой ε на p и $d\varepsilon$ на dp в соответствии с полученными соотношениями, т. е.

$$dn(p) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{p}{(2m)^{1/2}} \frac{p}{m} dp.$$

После сокращений получим искомое распределение свободных электронов в металле по импульсам при $T = 0$:

$$dn(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp.$$

Число электронов в единице объема, импульсы которых за-

ключены в интервале от $p_{max}^{-0,1} p_{max}$ до p_{max} , найдем интегрированием в соответствующих пределах:

$$\Delta n = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_{0,9 p_{max}}^{p_{max}} p^2 dp = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} p_{max}^3 (1 - (0,9)^3),$$

или

$$\Delta n = \frac{0,271 p_{max}^3}{3\pi^2 \hbar^2}.$$

Учитывая, что максимальный импульс p_{max} и максимальная энергия ε электронов в металле (при $T = 0$) связаны соотношением $p_{max}^3 = 2m\varepsilon_F$, найдем искомое число ΔN свободных электронов в металле:

$$\Delta N = \frac{0,271}{3\pi^2 \hbar^3} (2m\varepsilon_F)^{3/2} V, \text{ или } \Delta N = \frac{0,271}{3\pi^2} \left(\frac{3m\varepsilon_F}{\hbar^2}\right)^{3/2} V.$$

Подставив значения величин π , m , ε_F , \hbar и V и произведя вычисления ($5 \text{ эВ} = 8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$), получим $\Delta N = 2,9 \cdot 10^{23}$ электронов.

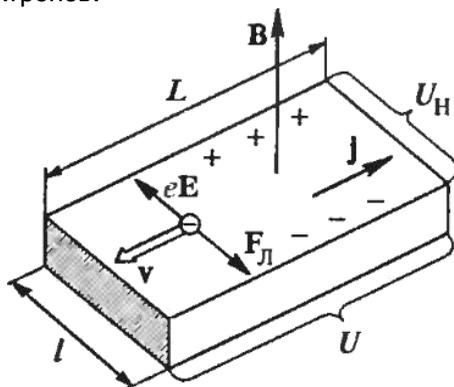


Рисунок 22

Пример 2. Образец из германия n -типа в виде пластины длиной $L = 10$ см и шириной $I = 6$ мм помещен в однородное магнитное поле ($B = 0,1$ Тл) перпендикулярно линиям магнитной индукции. При напряжении $U = 250$ В, приложенном к концам пластины, возникает холловская разность потенциалов $U_H = 8,8$ мВ.

Определить: 1) постоянную Холла R_H ; 2) концентрацию n_n носителей тока. Удельную проводимость γ германия принять равной 80 См/м.

Решение.

1. При помещении полупроводника в магнитное поле (рис. 16) носители тока (в полупроводнике n -типа это электроны), перемещающиеся под действием приложенной к нему разности потенциалов U , будут отклоняться в поперечном направлении. Это отклонение, вызванное силой Лоренца, приведет к «накоплению» заряда на боковых поверхностях образца, причем создаваемое в результате этого напряжение U_H (холловская разность потенциалов) действием своим будет уравнивать силу Лоренца. Холловская разность потенциалов определяется соотношением

$$U_H = R_H B j l,$$

откуда постоянная Холла

$$R_H = \frac{U_H}{B j l} \quad (3)$$

Плотность тока j найдем, воспользовавшись законом Ома в дифференциальной форме:

$$j = \gamma E,$$

где E – напряженность поля в образце.

Считая поле в образце однородным, можно написать $E = U/L$ и тогда

$$j = \gamma \frac{U}{L}.$$

Подставив плотность тока в выражение (3), получим

$$R_H = \frac{U_H L}{B U \gamma l} \quad (4)$$

Убедимся в том, что правая часть равенства (4) дает единицу постоянной Холла ($\text{м}^3/\text{Кл}$):

$$\begin{aligned} \frac{[U_H][L]}{[B][U][\gamma][l]} &= \frac{1 \text{ В} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ См/м} \cdot 1 \text{ м}} \\ &= \frac{1 \text{ м}}{1 \text{ м}} = \frac{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ В}}{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ А}} \\ &= \frac{1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ См}}{1 \text{ Дж} \cdot 1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ А}}{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ А}} \\ &= 1 \text{ м}^3/\text{Кл} \end{aligned}$$

Выразим все величины в единицах СИ ($U = 8.8 \cdot 10^{-3}$ В, $L=0,1$ м, $B=0,1$ Тл, $U=250$ В, $\gamma=80$ См/м, $l=6 \cdot 10^{-3}$ м) и произведем

вычисления:

$$R_H = 7,33 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{Кл.}$$

2. Концентрацию n носителей тока в полупроводнике одного типа (в нашем случае n -типа) можно найти из соотношения

$$R_H = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{en'}$$

где e – элементарный заряд. Отсюда

$$n = \frac{3\pi}{8R_H e}$$

Произведя вычисления, получим $n = 10^{23}$ электронов/ м^3 .

Пример 3. Образец из вещества, содержащего эквивалентные ядра (протоны), находится в однородном внешнем магнитном поле ($B = 1$ Тл). Определить: 1) относительную разность заселенностей энергетических уровней при температуре $T = 300$ К;

2) частоту ν_0 , при которой будет происходить ядерный магнитный резонанс. Экранирующим действием электронных оболочек и соседних ядер пренебречь.

Решение.

1. В магнитном поле ядра приобретают дополнительную энергию, определяемую соотношением

$$E = -M_z B, \quad (5)$$

где M_z – проекция магнитного момента ядра на направление вектора B (ось Oz). Проекция магнитного момента ядра выражается формулой

$$M_z = g\mu_N m_I,$$

где g – ядерный фактор Ланде; μ_N – ядерный магнетон; m_I – спиновое магнитное квантовое число ядра.

Подставив это выражение в формулу (5), получим

$$E = -g\mu_N B m_I.$$

Спиновое магнитное квантовое число m_I протона может принимать только два значения: $m_I = +1/2$ и $m_I = -1/2$. Значение $m_I = +1/2$ соответствует нижнему энергетическому уровню:

$$E_1 = -\frac{1}{2} g\mu_N B. \quad (6)$$

Значение $m_I = -1/2$ соответствует верхнему энергетическому уровню (рис. 23):

$$E_2 = +\frac{1}{2}g\mu_N B. \quad (7)$$

В отсутствие магнитного поля число ядер с противоположно направленными спинами одинаково и равно $N/2$ (N — общее число ядер).

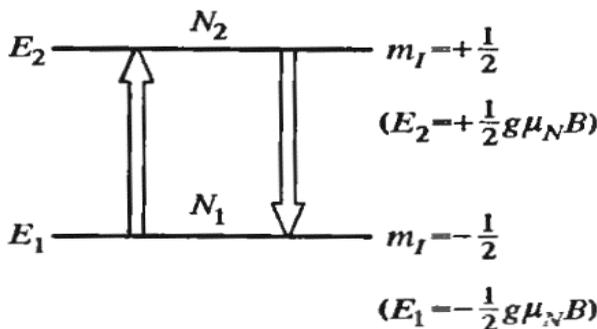


Рисунок 23

В магнитном поле происходит перераспределение ядер по энергетическим уровням. На нижнем уровне с энергией E_1 будет находиться больше ядер, чем на верхнем с энергией E_2 . Число ядер N_1 (заселенность данного уровня), находящихся на нижнем энергетическом уровне E_1 , может быть вычислено по формуле Больцмана:

$$N_1 = \frac{N}{2} \exp\left(-\frac{E_1}{kT}\right), \text{ или } N_1 = \frac{N}{2} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{g\mu_N B}{kT}\right).$$

Соответственно можно найти и число ядер N_2 , находящихся на верхнем энергетическом уровне:

$$N_2 = \frac{N}{2} \exp\left(-\frac{E_2}{kT}\right), \text{ или } N_2 = \frac{N}{2} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{g\mu_N B}{kT}\right).$$

Так как $(1/2)g\mu_N B \ll kT$ (это будет показано ниже), то можно воспользоваться приближенными равенствами

$\exp(-x) \approx 1 - x$ и $\exp(x) \approx 1 + x$, если $x \ll 1$. Тогда

$$N_1 \approx \frac{N}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{g\mu_N B}{kT}\right) \text{ и } N_2 \approx \frac{N}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{g\mu_N B}{kT}\right).$$

Разность ΔN заселенности энергетических уровней найдем, вычитая из первого приближенного равенства второе:

$$\Delta N = N_1 - N_2 = \frac{1}{2} \frac{Ng\mu_N B}{kT}.$$

Разделив ΔN на N , получим относительную разность заселенностей энергетических уровней:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{2} \frac{g\mu_N B}{kT}. \quad (8)$$

Выразим все величины в единицах СИ: $g = 5,58$ (для протона),

$$\mu_N = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ А} \times \text{м}^2, B = 1 \text{ Тл},$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}, T = 300 \text{ К}.$$

Подставим эти значения в формулу (8) и произведем вычисления:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{5,58 \cdot 5,05 \cdot 10^{-27} \cdot 1 \text{ А} \times \text{м}^2 \times \text{Тл}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \text{ (Дж/К)} \times \text{К}} = 3,4 \cdot 10^{-6}.$$

Полученный результат оправдывает наше допущение, что

$$g\mu_N B/2 \ll kT.$$

2. Под действием электромагнитного излучения, циклическая частота которого

$$\omega_0 = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}, \quad (9)$$

будут происходить переходы между уровнями энергии E_1 и E_2 , причем электромагнитное излучение вызывает переходы $E_1 \rightarrow E_2$ и $E_2 \rightarrow E_1$ с равной вероятностью при условии одинаковой заселенности энергетических уровней. Так как нижний уровень имеет большую заселенность, чем верхний, то переходы с поглощением электромагнитного излучения ($E_1 \rightarrow E_2$) будут происходить чаще, чем с излучением ($E_2 \rightarrow E_1$). Это и есть резонансное поглощение электромагнитного излучения, обусловленное ядерным магнетизмом (ЯМР).

Подставив в (9) выражение для энергий E_1 и E_2 согласно (6) и (7) и заменив циклическую частоту ω_0 на частоту ν_0 ($\omega_0 = 2\pi\nu_0$), найдем резонансную частоту ν_0 для внешнего магнитного поля В:

$$\nu_0 = \frac{g\mu_N B}{2\pi\hbar}.$$

В реальных образцах магнитное поле B_1 действующее на ядро, отличается от внешнего постоянного поля B_0 на величину B_1 поля, создаваемого в месте нахождения ядра электронами и ядрами всех молекул образца, в том числе и той, к которой принадлежит данное ядро. В условиях данной задачи полем B_1 мы пренебрегаем.

Подставим в это выражение числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$v_0 = \frac{5,58 \cdot 5,05 \cdot 10^{-27} \cdot 1}{2 \cdot 3,14 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}} \frac{\text{А} \times \text{м}^2 \times \text{Тл}}{\text{Дж} \times \text{с}} = 4,27 \cdot 10^7 \text{ Гц},$$

или $v_0 = 42,7 \text{ МГц}$.

4.2. Задачи для самостоятельного решения

Электроны в металле. Распределение Ферми-Дирака

4.1. Определить концентрацию n свободных электронов в металле при температуре $T = 0 \text{ К}$. Энергию Ферми \mathcal{E} принять равной 1 эВ . [$4,57 \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3}$]

4.2. Определить отношение концентраций n_1/n_2 свободных электронов при $T = 0 \text{ К}$ в литии и цезии, если известно, что уровни Ферми в этих металлах соответственно равны $\mathcal{E}_{F,1} = 4,72 \text{ эВ}$, $\mathcal{E}_{F,2} = 1,53 \text{ эВ}$. [5,41]

4.3. Определить число свободных электронов, которое приходится на один атом натрия при температуре $T = 0 \text{ К}$. Уровень Ферми \mathcal{E}_F для натрия равен $3,12 \text{ эВ}$. Плотность ρ натрия равна 970 кг/м^3 . [0,9]

4.4. Во сколько раз число свободных электронов, приходящихся на один атом металла при $T = 0 \text{ К}$, больше в алюминии, чем в меди, если уровни Ферми соответственно равны $\mathcal{E}_{F,1} = 11,7 \text{ эВ}$, $\mathcal{E}_{F,2} = 7,0 \text{ эВ}$? [В 3 раза]

4.5. Определить вблизи уровня Ферми интервал энергий $\Delta \mathcal{E}$ (в эВ) между соседними энергетическими уровнями электронов в кристаллике цезия объемом $V = 1 \text{ мм}^3$ при температуре $T = 0 \text{ К}$. При расчетах принять, что на каждый атом цезия приходится один свободный электрон.

$$\left[\Delta \mathcal{E} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{(3\pi^2 n)^{1/3}} \frac{\Delta N}{V} = 2,37 \cdot 10^{-19} \text{ эВ} \right]$$

4.6. Вычислить среднюю кинетическую энергию $\langle \mathcal{E} \rangle$ электронов в металле при температуре $T = 0 \text{ К}$, если уровень Ферми $\mathcal{E}_F = 7 \text{ эВ}$. [$\langle \mathcal{E} \rangle = \left(\frac{3}{5}\right)_{E_F} = 4,2 \text{ эВ}$]

4.7. Металл находится при температуре $T = 0$ К. Определить, во сколько раз число электронов с кинетической энергией от $\varepsilon_F / 2$ до ε_F больше числа электронов с энергией от 0 до $\varepsilon_F / 2$. [В 1,83 раза]

4.8. Электроны в металле находятся при температуре $T = 0$ К. Найти относительное число $\Delta N / N$ свободных электронов, кинетическая энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на 2 %. [0,03]

4.9. Оценить температуру $T_{кр}$ вырождения для калия, если принять, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону. Плотность ρ калия 860 кг/м^3 . [31,2 · 10³ К]

4.10. Определить отношение концентрации n_{max} электронов в металле (при $T = 0$ К), энергия которых отличается от максимальной не более чем на $\Delta\varepsilon$, к концентрации n_{min} электронов, энергии которых не превышают значения $\varepsilon = \Delta\varepsilon$; $\Delta\varepsilon$ принять равным $0,01\varepsilon_F$. [В 14,9 раза]

4.11. Зная распределение $dn(\varepsilon)$ электронов в металле по энергиям, установить распределение $dn(p)$ электронов по импульсам. Найти частный случай распределения при $T = 0$ К.

$$\left[\begin{array}{l} dn(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{E_F}{kT}\right)} \right) \text{ (при } T \neq 0 \text{ К);} \\ dn(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp; \text{ (при } T = 0 \text{ К)} \end{array} \right]$$

4.12. По функции распределения $dn(p)$ электронов в металле по импульсам установить распределение $dn(v)$ по скоростям: 1) при любой температуре T ; 2) при $T = 0$ К.

$$\left[\begin{array}{l} 1) dn(v) = \frac{m}{\pi^2 \hbar^3} \frac{v^2 dv}{\exp\left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{E_F}{kT}\right)}; \text{ (при } T \neq \\ 0 \text{ К); 2) } dn(v) = \frac{m}{\pi^2 \hbar^3} v^2 dv; \text{ (при } T = 0 \text{ К)} \end{array} \right]$$

4.13. Определить максимальную скорость v_{max} электронов в металле при $T = 0$ К, если уровень Ферми $\varepsilon_F = 5$ эВ.

$$[v_{max} = \sqrt{2E_F/m} = 1,32 \cdot 10^6 \text{ м/с}]$$

4.14. Выразить среднюю скорость $\langle v \rangle$ электронов в металле при $T = 0 \text{ К}$ через максимальную скорость v_{max} . Вычислить $\langle v \rangle$ для металла, уровень Ферми ε_F которого при $T = 0 \text{ К}$ равен 6 эВ. [$\langle v \rangle = \frac{3}{4} v_{max} = 1,09 \cdot 10^6 \text{ м/с}$]

4.15. Металл находится при температуре $T = 0 \text{ К}$. Определить, во сколько раз число электронов со скоростями от $v_{max}/2$ до v_{max} больше числа электронов со скоростями от 0 до $v_{max}/2$. [В 7 раз]

4.16. Выразить среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ электронов в металле при $T = 0 \text{ К}$ через максимальную скорость v_{max} электронов. Функцию распределения электронов по скоростям считать известной. [$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3}{5}} v_{max}$]

4.17. Зная распределение $dn(v)$ электронов в металле по скоростям, выразить $\langle 1/v \rangle$ через максимальную скорость v_{max} электронов в металле. Металл находится при $T = 0 \text{ К}$. [$v_{max} \langle \frac{1}{v} \rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{v_{max}}$]

4.18. Определить уровень Ферми ε_F в собственном полупроводнике, если энергия ΔE_0 активации равна 0,1 эВ. За нулевой уровень отсчета кинетической энергии электронов принять низший уровень зоны проводимости. [-0,05]

4.19. Собственный полупроводник (германий) имеет при некоторой температуре удельное сопротивление $\rho = 0,48 \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Определить концентрацию n носителей заряда, если подвижности b_n и b_p электронов и дырок соответственно равны 0,36 и 0,16 м²/(Вхс). [$2,5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$]

4.20. Удельная проводимость γ кремния с примесями равна 112 См/м. Определить подвижность b_p дырок и их концентрацию n_p , если постоянная Холла $R_H = 3,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$. Принять,

что полупроводник обладает только дырочной проводимостью. $[3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/(\text{В} \times \text{с}); 2 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}]$

4.21. В германии часть атомов замещена атомами сурьмы. Рассматривая дополнительный электрон примесного атома по модели Бора, оценить его энергию E связи и радиус r орбиты. Диэлектрическая проницаемость ϵ германия равна 16. $[0,053 \text{ эВ}; 0,85 \text{ нм}]$

4.22. Полупроводник в виде тонкой пластины шириной $l = 1 \text{ см}$ и длиной $L = 10 \text{ см}$ помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,2 \text{ Тл}$. Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости пластины. К концам пластины (по направлению L) приложено постоянное напряжение $U = 300 \text{ В}$. Определить холловскую разность потенциалов U_H на гранях пластины, если постоянная Холла $R_H = 0,1 \text{ м}^3/\text{Кл}$, удельное сопротивление $\rho = 0,5 \text{ Ом} \times \text{м}$. $[1,2 \text{ В}]$

4.23. Тонкая пластина из кремния шириной $l = 2 \text{ см}$ помещена перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля ($B = 0,5 \text{ Тл}$). При плотности тока $j = 2 \cdot 10^{-6} \text{ А/мм}^2$, направленного вдоль пластины, холловская разность потенциалов U_H оказалась равной $2,8 \text{ В}$. Определить концентрацию n носителей заряда. $[5,25 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}]$

Магнитный резонанс

4.24. Определить гиромагнитное отношение γ для свободного электрона. $[1,76 \cdot 10^{11} (\text{Тл} \cdot \text{с})^{-1}]$

4.25. Свободный электрон находится в постоянном магнитном поле ($B_0 = 1 \text{ Тл}$). Определить частоту ν_0 переменного магнитного поля, при которой происходит резонансное поглощение энергии электроном (g -фактор для свободного электрона равен 2). $[\nu_0 = g\mu_B B_0 / (2\pi\hbar) = 28 \text{ ГГц}]$

4.26. Определить отношение $\omega_{\text{ЭПР}}/\omega_{\text{цикл}}$ резонансной частоты электронного парамагнитного резонанса к циклотронной частоте (g -фактор равен 2,00232). $[\omega_{\text{ЭПР}}/\omega_{\text{цикл}} = \frac{g}{2} = 1,00116]$

4.27. Стандартные спектрометры для наблюдения электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) имеют на одном из

диапазонов фиксированную частоту ν_0 9,9 ГГц. Определить магнитную индукцию поля B_0 , при которой происходит резонансное поглощение энергии радиочастотного поля свободным электроном (g -фактор равен 2). $\left[B_0 = \frac{2\pi\hbar}{2\mu_B} \nu_0 = 0,353 \text{ Тл} \right]$.

4.28. Определить гиромагнитное отношение γ для свободного протона. $[2,68 \cdot 10^8 \text{ (Тл} \cdot \text{с)}^{-1}]$

4.29. Свободный протон находится в постоянном магнитном поле ($B_0 = 1 \text{ Тл}$). Определить частоту переменного магнитного поля, при которой происходит резонансное поглощение энергии протоном (g -фактор равен 5,58).

$$[\nu_0 = \gamma B_0 / (2\pi) = 42,6 \text{ МГц}]$$

4.30. В опытах по изучению магнитным резонансным методом магнитных свойств атомов ^{25}Mg в основном состоянии обнаружено резонансное поглощение энергии при магнитной индукции B_0 поля, равной 0,54 Тл, и частоте ν_0 переменного магнитного поля, равной 1,4 МГц. Определить ядерный g -фактор. $\left[g = \frac{2\pi\hbar\nu_0}{\mu_N B_0} = 0,34 \right]$

4.31. Методом магнитного резонанса определяют магнитный момент нейтрона. Резонансное поглощение наблюдается при магнитной индукции B_0 поля, равной 0,682 Тл, и частоте ν_0 переменного магнитного поля, равной 19,9 МГц. Вычислить ядерный g -фактор и магнитный момент M_n нейтрона. Известно, что направления спинового механического и магнитного моментов противоположны. Спин нейтрона $I = 1/2$. $[-3,82; -1,91\mu_N]$

4.32. Для молекулы HD, находящейся в основном состоянии, ядерный магнитный резонанс наблюдался: 1) для протонов ($I = 1/2$) в постоянном магнитном поле ($B_0 = 94 \text{ мТл}$) при частоте ν_0 переменного магнитного поля, равной 4 МГц; 2) для дейтонов ($I = 1$) соответственно при $B_0 = 0,37 \text{ Тл}$ и $\nu_0 = 2,42 \text{ МГц}$. определить по этим данным g -факторы и магнитные моменты M_p и M_d протона и дейтона (в единицах μ_N). [Для протона $g = 5,58$; $M_p = 2,79 \mu_N$; для дейтона $g = 0,86$; $M_d = 0,86 \mu_N$]

4.33. При какой частоте ν_0 переменного магнитного поля будет наблюдаться ЯМР ядер ^{19}P ($I = 1/2$; $M = 2,63\mu_N$ если магнитная индукция B_0 постоянного поля равна 2,35 Тл)

$$\left[\nu_0 = \frac{M_I}{2\pi\hbar I} B_0 = 94 \text{ МГц} \right]$$

4.34. Ядра Li ($I = 3/2$ и $g = 2,18$) находятся в однородном магнитном поле ($B_0 = 2$ Тл). Температура T окружающей среды равна 80 К. Найти отношение заселенностей каждого из возможных энергетических уровней к заселенности уровня с наименьшей энергией.

$$\left[\frac{N(m_I)}{N(I)} = \exp \left\{ -\frac{g\mu_N B_0}{kT} - (I - m_I) \right\}; 1 - 4 \cdot 10^{-5} (m_I = 1/2); 1 - 4 \cdot 10^5 (m_I = -1/2); 1 - 6 \cdot 10^{-5} (m_I = -3/2) \right]$$

4.35*. Свойства щелочных металлов хорошо описываются моделью свободных электронов (вырожденный ферми-газ). Определить для цезия: 1) энергию Ферми ε_F ; 2) импульс Ферми p_F ; 3) скорость Ферми v_F ; 4) температуру Ферми T_F .

$$\left[1) \varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{\rho}{A} N_A \right)^{2/3} = 2,40 \cdot 10^{-19} \text{ Дж (1,50 эВ); } 2) p_F = \hbar \left(3\pi^2 \frac{\rho}{A} N_A \right)^{1/3} = 7,61 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}; 3) v_F = \frac{\hbar}{m} \left(3\pi^2 \frac{\rho}{A} N_A \right)^{1/3} = 7,26 \cdot 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}; 4) T_F = \frac{\hbar^2}{2mk} \left(3\pi^2 \frac{\rho}{A} N_A \right)^{2/3} = 17,4 \text{ кК} \right]$$

4.36*. Определить для лития давление p электронного газа при температуре $T = 0$ К. При расчетах принять, что на один атом лития приходится один свободный электрон. Для лития: плотность $\rho = 534 \text{ кг/м}^3$, относительная атомная масса $A_r = 6,94$. Для электронного газа считать справедливым основное уравнение классической теории для идеального газа $p = (2/3)n\langle\varepsilon\rangle$.

$$\left[1) \varepsilon_F = \frac{1}{5} \frac{\hbar^2}{m} (3\pi^2)^{2/3} \left(\frac{\rho}{A} N_A \right)^{5/3} = 1,38 \cdot 10^{10} \text{ Па} \right]$$

4.37*. Используя модель свободных электронов (вырожденный ферми-газ), определить для меди отношение средней потенциальной энергии взаимодействия двух соседних свободных электронов к энергии Ферми $\langle \Pi \rangle / \varepsilon_F$. При расчетах принять, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

$$\text{трон.} \left[\frac{\langle \Pi \rangle}{\varepsilon_F} = \frac{me^2}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2(3\pi^2)^{2/3}} \left(\frac{A}{\rho N_A} \right)^{1/3} = 0,905 \right]$$

4.38*. Используя модель свободных электронов (вырожденный ферми-газ), определить для золота максимальный диаметр d_{max} винтовой линии, по которой движется электрон в однородном магнитном поле ($B = 0,01$ Тл). При расчетах принять, что на один атом золота приходится один свободный электрон.

$$\left[d_{max} = \frac{2\hbar}{eB} \left(3\pi^2 \frac{\rho}{A} N_A \right)^{1/3} = 2,78 \text{ нм} \right]$$

5. ЗОННАЯ ТЕОРИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Модель свободных электронов не дает ответа, почему одни химические элементы в кристаллическом состоянии оказываются хорошими проводниками, другие – изоляторами или полупроводниками, электрические свойства которых резко зависят от температуры. По удельной электропроводности все твердые тела делятся на три группы: металлы, диэлектрики и полупроводники. Металлы являются прекрасными проводниками электрического тока. Их удельная электропроводность при комнатной температуре колеблется от 10^4 до $10^6 \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$. Диэлектрики, наоборот, практически не проводят ток – их используют как изоляторы. Удельная электропроводность их меньше, чем $10^{-10} \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$.

Твердые тела, имеющие промежуточные значения σ относятся к классу полупроводников. Различие между металлами, с одной стороны, и диэлектриками, и полупроводниками – с другой, проявляется достаточно четко в ходе температурных зависимостей удельной электропроводности. Для металлов удельная электр-

тропроводность уменьшается с ростом температуры и перестает изменяться, принимая некоторое конечное значение, при температурах, близких к 0 К.

Для полупроводников и диэлектриков σ возрастает с температурой по экспоненциальному закону и при $T \rightarrow 0$ К обращается в нуль. Квантовая теория свободных электронов довольно успешно объясняет многие свойства металлов. Однако не дает ответа на ряд вопросов, например, почему проводимость различных твердых тел изменяется в столь широких пределах; почему одни вещества являются хорошими проводниками электрического тока, а другие диэлектриками; почему в некоторых твердых телах при низких температурах возникает сверхпроводимость? Отсутствие ответа на эти вопросы связано с чрезмерными упрощениями, которые положены в основу модели свободных электронов.

Учет взаимодействия электронов с кристаллической решеткой и между собой сделан в зонной теории твердых тел. Дальний порядок в кристаллах приводит к тому, что в твердых телах существует электрическое поле, которое является периодической функцией координат. В металле, например, где положительные ионы расположены в узлах решетки в строгом порядке, потенциальная энергия электрона изменяется вдоль некоторого направления Ox так, как показано на рис. 24. Минимумы энергии соответствуют местам, где расположены положительные ионы. Периодическое электрическое поле в кристалле любого типа существенно изменяет энергетические состояния электронов в твердом теле по сравнению с их состоянием в изолированных атомах. В изолированных атомах электроны находятся в дискретных энергетических состояниях. В твердом теле энергетические состояния электронов определяются как взаимодействием их с ядром своего атома, так и с электрическим полем кристаллической решетки, т.е. взаимодействием с другими атомами. В результате этого взаимодействия энергетические уровни электронов расщепляются. Вместо дискретного энергетического уровня, характерного для изолированного атома, в твердом теле, содержащем N взаимодействующих атомов, возникает N близко расположенных друг от друга энергетических уровней, которые образуют энергетическую полосу (энергетическую зону). В кристаллах образуется зонный энергетический спектр электронов.

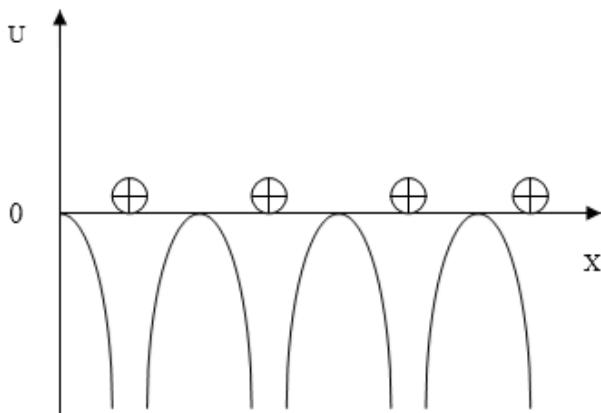


Рисунок 24

В изолированном атоме ввиду конечности времени τ жизни электрона в возбужденном состоянии ($\tau \sim 10^{-8}$ с) ширина ΔW энергетического уровня составляет:

$$\Delta W \sim \frac{\hbar}{\tau} \approx 10^{-7} \text{ эВ}$$

(естественная ширина энергетического уровня).

В кристалле валентные электроны атомов слабее, чем внутренние электроны, связаны с ядрами. Они могут с помощью туннельного эффекта переходить от одного атома к другому. Происходит просачивание электронов сквозь потенциальный барьер, разделяющий атомы в кристалле. Вместо естественной ширины $\Delta W \approx 10^{-7}$ эВ электронного энергетического уровня в изолированном атоме в кристалле возникает зона дозволённых значений энергии $\Delta W \approx 1$ эВ. Для внутренних электронов частота просачивания электрона сквозь потенциальный барьер и перехода его к другому атому ничтожно мала. Это связано с ростом высоты барьера: $U_0 - W \approx 10^3$ эВ и возрастанием ширины барьера: $L \sim 3 \cdot 10^{-10}$ м. Расчёты дают $\tau \sim 10^{20}$ лет. Уширение энергетических уровней внутренних электронов несущественно, и внутренние электроны атомов в кристаллах ведут себя практически так же, как в изолированных атомах. Если N есть общее число атомов твёрдого тела, то энергетическая зона, образовавшаяся из электронного энергетического уровня валентного электрона атома, состоит из N близко расположенных друг к другу уровней. Соседние энергетиче-

ские уровни в зоне отстоят друг от друга приблизительно на 10^{-22} эВ. Разрешенные энергетические зоны разделены областями – зонами запрещенных значений энергии электронов. Ширина запрещенных зон соизмерима с шириной разрешенных зон.

С увеличением энергии ширина разрешенных энергетических зон возрастает, а ширина запрещенных зон убывает. Разрешенные энергетические зоны в твердом теле могут быть различным образом заполнены электронами. В предельных случаях они могут быть целиком заполнены или совершенно свободны. Электроны в твердых телах могут переходить из одной разрешенной зоны в другую. Для перехода электрона из нижней зоны в соседнюю верхнюю зону необходимо затратить энергию, равную ширине запрещенной зоны, расположенной между ними (энергию порядка нескольких эВ). Для внутризонных переходов электронов необходима весьма малая энергия (10^{-4} - 10^{-8} эВ). Под действием теплового возбуждения электронам может быть сообщена различная энергия, достаточная как для внутризонных, так и для межзонных переходов.

Различия в электрических свойствах твердых тел объясняются в зонной теории различным заполнением электронами разрешенных энергетических зон и шириной запрещенных зон. Эти два фактора определяют отнесение данного твердого тела к проводникам электрического тока или к диэлектрикам. Чтобы тело было проводником необходимо наличие свободных энергетических уровней, на которые электрическое поле сторонних сил могло бы перенести электроны. Это поле может вызвать лишь внутризонные переходы электронов. Если зона не полностью занята валентными электронами, то твердое тело всегда является проводником электрического тока (рис.25).

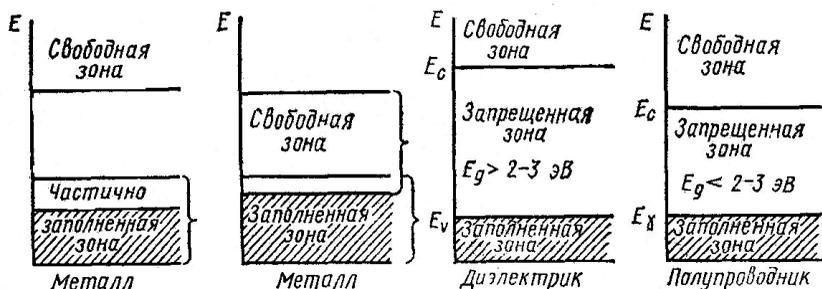


Рисунок 25 – Заполнение зон электронами: E_v – граница валентной зоны, E_c – граница зоны проводимости, E_g – ширина за-

прещенной зоны

В кристаллах возможна гибридизация разрешенных энергетических зон. Зона, возникшая при расщеплении верхнего возбужденного уровня, может перекрываться с зоной, возникшей за счет расщепления нижнего состояния валентных электронов. При этом образуется более широкая гибридная зона, в которой размещаются валентные электроны, заполняя ее лишь частично. Поэтому гибридная зона является зоной проводимости. Кристаллы с частично и полностью заполненной валентной зоной хорошо проводят электрический ток, т.е. являются металлами. Когда валентная зона заполнена электронами полностью и отделена от следующей за ней свободной зоны широкой (больше 2-3 эВ) запрещенной зоной (энергетической щелью), то внешнее поле не может создать электрический ток и вещество представляет собой диэлектрик. Если ширина запрещенной зоны меньше 2-3 эВ, то кристалл называют полупроводником. В полупроводниках за счет тепловой энергии $k_B T$ заметное число электронов оказывается переброшенным в свободную зону, называемую зоной проводимости. При очень низких температурах любой полупроводник становится хорошим диэлектриком.

Таким образом, между металлами и диэлектриками существует качественное различие, а между диэлектриками и полупроводниками – только количественное.

Электропроводность химически чистых полупроводников называется собственной проводимостью. Электронная проводимость (проводимость n -типа) возникает при перебросе электронов из валентной зоны в зону проводимости. Для этого нужно затратить энергию, не меньшую, чем ширина запрещенной зоны ΔW_0 . Величина ΔW_0 называется энергией активации собственной проводимости. С повышением температуры полупроводника растет число электронов, которые вследствие теплового возбуждения переходят из валентной зоны в зону проводимости и участвуют в электропроводности. Перевод электрона из валентной зоны в зону проводимости свидетельствует о том, что какой-либо из валентных электронов одного из атомов в решетке покидает свое место и на оставленном месте возникает избыток положительного заряда – положительная дырка. Она ведет себя как положительный заряд, равный по величине заряду электрона. Электропроводность полупроводника, обусловленная перемещением дырок, называется дырочной проводимостью или p -типа.

5.1 Примеры решения задач

Пример 1. В медном проводнике с площадью поперечного сечения $0,2 \text{ см}^2$ идет ток 1 А . Какова средняя скорость дрейфа электронов?

Решение.

Плотность тока $j = \frac{I}{S}$. С другой стороны $j = nev_d$. Отсю-

$$\text{да: } v_d = \frac{j}{ne} = \frac{I}{Sne}.$$

Концентрацию определяем по формуле:

$$n = \frac{\rho}{\mu} N_A = \frac{8890 \cdot 10^3 \text{ г/м}^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль}}{63,5 \text{ г/моль}} \approx 8,4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Подставим численные значения:

$$v_d = \frac{1 \text{ А}}{2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 8,4 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}} \approx 0,37 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}.$$

Ответ: $0,37 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$.

Пример 2. Чему равна подвижность электронов натрия при $0 \text{ }^\circ\text{С}$, если электропроводность его $0,23 \cdot 10^8 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$, а концентрация носителей заряда $2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$?

Решение:

Подвижность электронов определяется как средняя дрейфовая скорость, отнесенная к единице напряженности электрического поля:

$$\mu = \frac{\Delta v_d}{E} = \frac{e\tau}{m},$$

где τ – время релаксации.

Так как: $\mu = \frac{e}{m} \cdot \frac{\sigma m}{ne^2} = \frac{\sigma}{ne}$. Подставим численные значения:

ния:

$$\mu = \frac{0,23 \cdot 10^8 \text{ ом}^{-1}\text{м}^{-1}}{2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}} = 0,56 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \times \text{с}}.$$

Ответ: $0,56 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/(\text{В} \times \text{с})$.

Пример 3. Электропроводность меди при $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ равна $6 \cdot 10^7\text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$. Определить теплопроводность меди при указанной температуре, если число Лоренца равно $2,23 \cdot 10^{-8}\text{ Вт}\cdot\text{Ом}\cdot\text{К}^{-2}$.

Решение:

Теплопроводность меди определим из закона Видемана-Франца:

$$L = \chi_e / \sigma T,$$

где L – число Лоренца, χ_e – теплопроводность, σ – электропроводность. Отсюда: $\chi_e = L\sigma T$. Подставим численные значения:

$$\chi_e = 2,23 \cdot 10^{-8}\text{Вт}\cdot\text{Ом}\cdot\text{К}^{-2} \cdot 6 \cdot 10^7\text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1} \cdot 273\text{ К} = 365\text{ Дж}/(\text{К}\times\text{м}\times\text{с}).$$

Ответ: $365\text{ Дж}/(\text{К}\times\text{м}\times\text{с})$.

5.2 Задачи для самостоятельного решения

5.1. Отношение электропроводностей серебра и меди при одинаковой температуре равно $\frac{6,12}{5,76}$. Вычислить отношение по-

движностей электронов в этих металлах считая, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону. ($\rho_{\text{Cu}}=8890\text{ кг}/\text{м}^3$; $\mu_{\text{Cu}}=63,54\text{ г}/\text{моль}$; $\rho_{\text{Ag}}=10500\text{ кг}/\text{м}^3$; $\mu_{\text{Ag}}=107,88\text{ г}/\text{моль}$). [1,5]

5.2. Электропроводность (удельная проводимость) меди $6 \cdot 10^7\text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$. Определить время релаксации электрона, считая, что каждый атом меди в твердом состоянии отдает в зону проводимости один валентный электрон. [$0,25 \cdot 10^{-13}\text{ с}$]

5.3. Вычислить среднюю длину свободного пробега электронов проводимости натрия при комнатной температуре. Электропроводность натрия равна $0,23 \cdot 10^8\text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$. [$4,1 \cdot 10^{-9}\text{ м}$]

5.4. Удельное сопротивление серебряного провода при комнатной температуре $\rho=1,54 \cdot 10^{-8}\text{ Ом}\cdot\text{м}$. Вычислить среднюю скорость дрейфа электронов при напряженности электрического поля вдоль провода $1\text{ В}/\text{см}$, полагая, что в 1 м^3 серебра находится $5,8 \cdot 10^{28}$ электронов проводимости. Определить подвижность и время релаксации электронов. [$6,9 \cdot 10^{-3}\text{ м}^2/(\text{В}\times\text{с})$; $0,39 \cdot 10^{-13}$; $0,69\text{ м}/\text{с}$]

5.5. Вычислить скорость дрейфа электрона меди при приложении электрического поля напряженностью $100\text{ В}/\text{м}$. Подсчитать отношение скорости дрейфа к скорости Ферми, если уровень

Ферми для меди равен 7 эВ, а подвижность электронов – $3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/(\text{В} \times \text{с})$. [0,3 м/с; $0,19 \cdot 10^{-6}$]

5.6. Вычислить постоянную Холла R для меди. Молекулярный вес меди 63,5 г/моль, плотность меди 8890 кг/м³. [$-0,74 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{Кл}$]

5.7. Образец германия n -типа толщиной 1 мм с концентрацией электронов 10^{20} м^{-3} помещен в магнитное поле с индукцией 0,1 Вб/м². Определить величину ЭДС Холла при токе 1 мА, протекающем через образец. [$6 \cdot 10^{-3} \text{ В}$]

5.8. Вывести общее выражение для постоянной Холла полупроводника. Как упростится это выражение для собственного полупроводника? [-]

5.9. Электропроводность и коэффициент Холла арсенида индия соответственно равны: $4 \cdot 10^2 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ и $10^{-2} \text{ м}^3/\text{Кл}$. Считая, что проводимость осуществляется зарядами одного знака определить их концентрацию и подвижность. [$6 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$; $4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/(\text{В} \times \text{с})$]

5.10. Коэффициент Холла и удельное сопротивление полупроводника соответственно равны: $R = -3,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$; $\rho = 8,93 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. для определения эффекта Холла к образцу приложено магнитное поле с индукцией 0,5 Вб/м². Найти угол Холла. [10^{12} ']

5.11. Вычислить коэффициент Холла для кристаллов германия с концентрацией индия и сурьмы соответственно: 10^{23} и 10^{24} м^{-3} . Подвижности электронов и дырок в германии при комнатной температуре равны: $\mu_e = 0,38 \text{ м}^2/(\text{В} \times \text{с})$; $\mu_p = 0,18 \text{ м}^2/(\text{В} \times \text{с})$. [$-0,55 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{Кл}$]

5.12. В образце германия подвижность электронов $\mu_e = 0,38 \text{ м}^2/(\text{В} \times \text{с})$ а дырок $\mu_p = 0,18 \text{ м}^2/(\text{В} \times \text{с})$. В этом образце эффект Холла не наблюдается. Какая часть тока переносится дырками? [70 %]

5.13. Удельная проводимость кремния с примесями равна $\sigma = 112 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$. Определить подвижность дырок и их концентрацию, если постоянная Холла равна $3,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$. Принять, что полупроводник обладает только дырочной проводимостью. [$1,5 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$; $4,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/(\text{В} \times \text{с})$]

5.14. В кристалле кремния массой 120 г равномерно по объему распределены 25,7 мкг фосфора и 38,2 мкг галлия. Считая, что атомы примеси полностью ионизированы, вычислить удельное сопротивление кристалла. Подвижность электронов и дырок в кремнии принять равной 0,12 и 0,05 $\text{м}^2/(\text{В} \times \text{с})$. Плотность кремния 1300 кг/м³, молярная масса фосфора – 30,98 г/моль, галлия – 69,7 г/моль. [$7,7 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$]

5.15. Сопротивление кристалла PbS при температуре $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ равно 10^4 Ом . Определить его сопротивление при температуре $80\text{ }^{\circ}\text{C}$. Ширина запрещенной зоны PbS равна $0,6\text{ эВ}$. [1350 Ом]

5.16. Металлический проводник движется с ускорением $a=100\text{ м/с}^2$. Используя модель свободных электронов, определить напряженность электрического поля в проводнике при $\mathcal{E}=0$. [$568,7 \cdot 10^{-12}\text{ В/м}$]

5.17. Полупроводник в виде тонкой пластины шириной 1 см и длиной 10 см помещен в однородное магнитное поле с индукцией $0,2\text{ Тл}$. Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости пластины. К концам пластины приложено электрическое поле с напряженностью 300 В . Определить холловскую разность потенциалов на гранях пластины, если постоянная Холла равна $0,1\text{ м}^3/\text{Кл}$, удельное сопротивление $0,5\text{ Ом}\cdot\text{м}$. [$1,2\text{ В}$].

5.18. Тонкая пластина из кремния шириной 2 см помещена перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля ($\mathcal{E}=0,5\text{ Тл}$). При плотности тока, направленного вдоль пластины, $j = 2\text{ мк А/мм}^2$, холловская разность потенциалов оказалась $U=2,8\text{ В}$. Определить концентрацию n -носителей тока. [$4,46 \cdot 10^{16}\text{ м}^{-3}$]

5.19. Удельная проводимость металла $10\text{ МОм}^{-1}\text{м}^{-1}$. Вычислить среднюю длину свободного пробега электронов в металле, если концентрация свободных электронов 10^{28} м^{-3} , а средняя скорость хаотического движения электронов 1 Мм/с . [$2,66\text{ нм}$]

5.20. Образец полупроводника прямоугольной формы размерами $0,2 \times 0,2 \times 0,05\text{ см}$ имеет 10^{21} свободных электронов в 1 м^3 при 20° C . К двум противоположным узким граням приложено напряжение 20 В . Вычислить величину тока, полагая подвижность носителей зарядов равной $0,03\text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$. [$4,8 \cdot 10^{-2}\text{ А}$].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. Задачник по физике: Учеб. пособие - М.: Издательство физико-математической литературы., 2003.- 640с.
2. Задачи по физике твердого тела. Под ред. Г.Дж. Голмиды. - М.: Физматлит, 2011. - 672 с.
3. Ю.А. Стрекалов, Н.А. Тенякова. Физика твердого тела: Учеб. пособие - М.: РИОР: ИНФОРА-М, 2013.- 307 с.