ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Физика»

Лабораторная работа М-33
«Определение момента инерции колеса с помощью затухающих колебаний»
по дисциплине

«Физика»

Авторы
Шкиль Т. В.,
Мардасова И. В.,
Беликова Т. С.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

Указания содержат краткую теорию по разделам физики «Механические колебания» и «Динамика вращательного движения», описание рабочей установки и методику экспериментального определения ряда физических величин.

Предназначены для студентов инженерных направлений подготовки всех форм обучения, в программу учебного курса которых входит выполнение лабораторных работ по физике.

Авторы

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Физика»
Шкиль Т.В.,
к.ф.-м.н., доцент кафедры «Физика»
Мардасова И.В.,
к.ф.-м.н., доцент кафедры «Физика»
Беликова Т.С.

Оглавление

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА М-33. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ КОЛЕСА С ПОМОЩЬЮ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы: определение характеристик затухающих колебаний и момента инерции колеса.

Оборудование: экспериментальная установка, секундомер.

Краткая теория

Колебаниями называются процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени, т.е. колебания - периодические изменения какой-либо величины.

Период - это время, за которое совершается одно полное колебание:

$$T=\frac{t}{N},\quad [T]=1c,$$

где N - число колебаний за время t.

Частота колебаний - число колебаний, совершенных за единицу времени.

$$\nu=\frac{N}{t},\quad [\nu]=\frac{1}{c}=Гц.$$

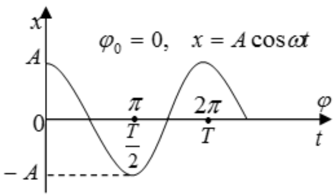

Рис. 1

Период и частота связаны между собой:

$$T=\frac{1}{\nu},\quad \nu=\frac{1}{T}.$$

Циклическая или круговая частота - число колебаний, совершенных за время 2π (единиц времени):

$$\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T},\quad [\omega]=\frac{рад}{c}.$$

Простейшим типом колебаний являются гармонические колебания, при которых изменение величины происходит по закону синуса или косинуса (рис.1):

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0),$$

где x - значение изменяющейся величины;

$A=x_{max}$ - амплитуда колебаний, максимальное значение изменяющейся величины;

$\varphi = \omega t + \varphi_0$ - фаза колебаний в момент времени t (угловая мера времени);

φ_0 - начальная фаза, определяет значение x в начальный момент времени при $t = 0$, $[\varphi] = 1рад$.

Колебательная система, совершающая гармонические колебания, называется *гармоническим осциллятором*.

Свободными или собственными называются колебания, которые совершает система около положения равновесия после того, как она каким-либо образом была выведена из состояния устойчивого равновесия и представлена самой себе.

Как только тело (или система) выводится из положения равновесия, сразу же появляется сила, стремящаяся возвратить тело обратно. Эта сила называется *возвращающей*, она всегда направлена к положению равновесия, происхождение ее различно:

а) для пружинного маятника - сила упругости;

б) для физического и математического маятников - составляющая силы тяжести.

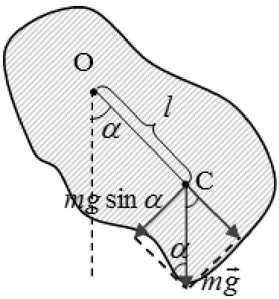

Рис. 2

Если в системе отсутствуют силы трения, колебания продолжаются бесконечно долго с постоянной амплитудой и называются собственными незатухающими колебаниями.

Физическим маятником называют твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку О, не совпадающую с центром масс С. На рисунке 2 ось перпендикулярна плоскости чертежа, а маятник отклонен от положения равновесия на некоторый угол α. В соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела суммарный момент $\vec{M}$ действующих на тело сил равен произведению углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ на момент инерции тела относительно той же оси вращения:

$$\vec{M} = \vec{\varepsilon} J \qquad (1)$$

В этом случае $$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \qquad (2)$$

а возвращающая сила – составляющая силы тяжести $mg\sin\alpha$, поэтому

$$M = -mg\sin\alpha \cdot l \approx -mgl\alpha, \qquad (3)$$

где l - плечо силы, расстояние между точкой О и центром масс С; $\sin\alpha \approx \alpha$ при малых углах α. Знак «минус» обусловлен тем, что вектор момента силы тяжести и угловое перемещение α направлены противоположно.

Используя соотношения (2) и (3), уравнение (1) можно записать в виде

$$-mgl\alpha = \frac{d^2\alpha}{dt^2}J, \text{ или } \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0. \qquad (4)$$

Обозначим $\frac{mgl}{J} = \omega_0^2$, где ω_0 - циклическая частота собственных колебаний. Уравнение (4) принимает вид

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0{}^2\alpha = 0$$

и называется *дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний физического маятника*.

Его решением является выражение

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где α_0 - амплитуда колебаний, т.е. наибольший угол, на который отклоняется маятник от положения равновесия, а период колебаний физического маятника определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}. \qquad (5)$$

В реальной колебательной системе свободные колебания, происходящие за счет однажды сообщенной механической энергии, всегда являются затухающими, поскольку в процессе колебаний энергия непрерывно расходуется на преодоление сил трения и сопротивления окружающей среды.

Суммарный момент сил трения в точке подвеса и сопротивления воздуха зависит от угловой скорости $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}$,

$$\vec{M}_{mp} = -k\frac{d\vec{\alpha}}{dt},$$

где k - коэффициент пропорциональности (коэффициент трения).

Основное уравнение динамики вращательного движения принимает вид

$$\vec{M} + \vec{M}_{mp} = \vec{\varepsilon} J,$$

$$-mgl\alpha - k\frac{d\alpha}{dt} = J\frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{k}{J}\cdot\frac{d\alpha}{dt} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

Обозначив $\frac{mgl}{J} = \omega_0{}^2$, $\frac{k}{J} = 2\beta$, запишем *дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний*:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta\frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2\alpha = 0.$$

Решением этого уравнения является выражение

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_o),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота свободных затухающих колебаний,

ω_0 - циклическая частота свободных незатухающих колебаний,

β - коэффициент затухания,

α_0 - амплитуда в начальный момент времени (t=0).

$\alpha_m(t) = \alpha_0 e^{-\beta t}$ - закон убывания амплитуды.

Амплитуда убывает по экспоненциальному закону (рис. 3).

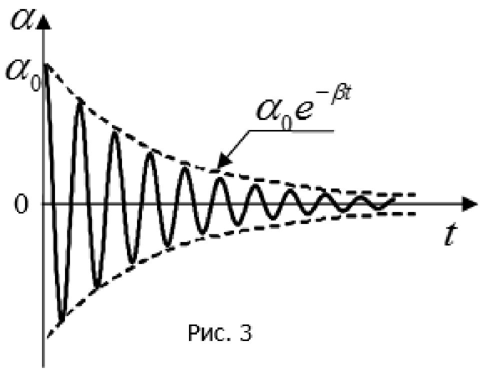

Рис. 3

Затухающие колебания - это колебания, амплитуда которых убывает со временем.

Время релаксации τ - это время, за которое амплитуда уменьшается в e раз.

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_0 e^{-\beta\tau}} = e, \quad e^{\beta\tau} = e^1,$$

$$\beta\tau = 1, \quad \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Таким образом, β есть величина, обратная времени релаксации.

Важнейшей характеристикой затухающих колебаний является логарифмический декремент затухания θ.

Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения двух амплитуд, отличающихся друг от друга по времени на период:

$$\theta = \ln\frac{\alpha_0}{\alpha_0 e^{-\beta T}} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Выясним его физический смысл.

За время релаксации система успеет совершить N колебаний: $N = \frac{t}{T} = \frac{\tau}{T}$,

$$\theta = \beta T = \frac{1}{\tau}T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N},$$

т.е. θ - это величина, обратная числу колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в е раз.

Для характеристики колебательной системы используют понятие добротности Q. При малых затуханиях

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N .$$

Добротность - физическая величина, пропорциональная числу колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в е раз.

Механические колебания часто используют для экспериментального определения моментов инерции различных тел.

Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

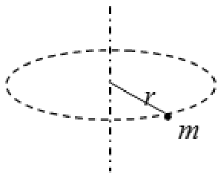

Рис. 4

Момент инерции материальной точки относительно неподвижной оси вращения равен произведению её массы на квадрат расстояния до рассматриваемой оси вращения (рис. 4):

$$J = mr^2, \quad [J] = 1кг \cdot м^2 .$$

J зависит только от массы материальной точки и её положения относительно оси вращения и не зависит от наличия самого вращения.

Момент инерции - скалярная и аддитивная величина, поэтому момент инерции тела равен сумме моментов инерции всех его точек:

$$J = \sum_i J_i = \sum_i m_i r_i^2 .$$

Момент инерции имеет смысл только при заданном положении оси вращения. Он зависит6

1) от положения оси вращения;

2) от распределения массы тела относительно оси вращения, т.е. от формы тела и его размеров.

Если для тела известен момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, то момент инерции относительно любой оси, параллельной первой, находится по теореме *Штейнера*: момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции J_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

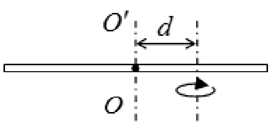

Рис. 5

$$J = J_0 + md^2,$$

где d расстояние от оси OO', проходящей через центр масс тела, до оси вращения (рис. 5).

Центр масс - воображаемая точка, положение которой характеризует распределение массы данного тела. Центр масс тела движется так же, как двигалась бы материальная точка той же массы под действием всех внешних сил, действующих на данное тело.

Описание экспериментальной установки и методики выполнения работы

Экспериментальная установка (рис. 6) представляет собой колесо 1, к ободу которого прикреплен груз 2 массой m. Колесо укреплено на вертикальной стойке 3, соединенной с основанием 4, и может вращаться вокруг оси О. К вертикальной стойке прикреплена угловая шкала 5, которая позволяет определить угол α, на который колесо отклоняется от положения равновесия.

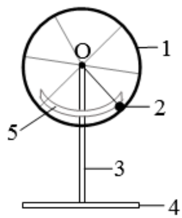

Рис. 6

Такую систему можно рассматривать как физический маятник. При выведении груза из положения равновесия (повороте колеса на небольшой угол α) возникает момент силы тяжести

$$M = -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha,$$

под действием которого происходят колебания колеса вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку О.

Знак «минус» обусловлен тем, что вектор момента силы и угловое перемещение $\vec{\alpha}$ направлены противоположно.

Под действием сил трения в подшипниках и сопротивления воздуха система совершает затухающие колебания.

При малых углах зависимость угла поворота α от времени описывается выражением

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_o), \qquad (1)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad (2)$$

– циклическая частота свободных затухающих колебаний,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \qquad (3)$$

– циклическая частота свободных незатухающих колебаний,
β - коэффициент затухания,

α_0 - амплитуда в начальный момент времени (t=0),

$\alpha_m(t) = \alpha_0 e^{-\beta t}$ - закон убывания амплитуды.

Используя выражения (2) и (3), можно выразить момент инерции системы:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgl}{J} - \beta^2 \quad \Rightarrow \quad J = \frac{mgl}{\frac{4\pi^2}{T^2} + \beta^2}. \qquad (4)$$

Для нахождения β используем закон убывания амплитуды:

$$\alpha_m = \alpha_0 e^{-\beta t}, \qquad \frac{\alpha_m}{\alpha_0} = e^{-\beta t},$$

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_m} = e^{\beta t}, \qquad \ln\frac{\alpha_0}{\alpha_m} = \beta t \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{t}\cdot\ln\frac{\alpha_0}{\alpha_m}. \qquad (5)$$

Зная β, можно рассчитать логарифмический декремент затухания и добротность:

$$\theta = \beta T, \qquad Q = \frac{\pi}{\theta}. \qquad (6)$$

Порядок выполнения работы

Задание 1. *Определение момента инерции и характеристик колебательного движения колеса*

Записать в таблицу 1 число колебаний N, массу груза m, расстояние l между центром груза и осью колеса, α_0 - угол отклонения в начальный момент времени $t = 0$.

Отклонить груз на угол α_0 и отпустить, одновременно включив секундомер.

Отсчитав N полных колебаний, выключить секундомер и одновременно определить угол α_m. Измерения повторить 5 раз, данные занести в таблицу 1.

Таблица 1

$N =$ \quad $, \alpha_0 =$ \quad $, m =$ \quad $кг, l =$ \quad $м$							
№	α_m, град	t, c	T, c	β, c^{-1}	$J, кг \cdot м^2$	$\Delta J, кг \cdot м^2$	δJ
1							
2							
3							
4							
5							
Среднее значение							

Для каждого опыта рассчитать период колебаний $T = \frac{t}{N}$, коэффициент затухания по формуле (5) и момент инерции системы по формуле (4).

Рассчитать и занести в таблицу 1:

а) среднее значение момента инерции $\langle J \rangle = \frac{J_1 + J_2 + \ldots + J_n}{n}$;

б) абсолютные погрешности каждого измерения $\Delta J_i = \left| \langle J \rangle - J_i \right|$;

в) среднюю абсолютную погрешность результата $\langle \Delta J \rangle = \frac{\Delta J_1 + \Delta J_2 + \ldots + \Delta J_n}{n}$;

г) относительную погрешность $\delta J = \frac{\langle \Delta J \rangle}{\langle J \rangle}$.

Записать окончательный результат в виде: $J = \langle J \rangle \pm \langle \Delta J \rangle$.

Рассчитать средние значения периода колебаний и коэффициента затухания:

$$\langle T \rangle = \frac{T_1 + T_2 + \ldots + T_n}{n};$$

$$\langle \beta \rangle = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n}{n}.$$

Используя средние значения $\langle T \rangle$ и $\langle \beta \rangle$, по формулам (6) определить логарифмический декремент затухания и добротность:

$$\theta = \langle \beta \rangle \langle T \rangle, \quad Q = \frac{\pi}{\theta}.$$

Задание 2. *Теоретический расчет момента инерции.*

Записать в таблицу 2 массу груза m и число спиц N_c. Масса обода m_0, масса спицы m_c, радиус обода R, расстояние l между осью колеса и центром груза и длина спицы l_1 приведены в таблице.

Рассчитать момент инерции системы:

$$J_T = J_o + N_c J_c + J_{гр}.$$

Момент инерции обода J_o рассчитывается как момент инерции обруча. Момент инерции спицы J_c рассчитывается как момент инерции стержня, ось вращения которого перпендикулярна стержню и проходит через его конец. Момент инерции груза $J_{гр}$ рассчитывается как для материальной точки.

$$J_T = m_o R^2 + \frac{1}{3} N_c m_c l_1^2 + ml^2.$$

Сравнить результаты эксперимента и теоретического расчёта:

$$\delta J = \frac{\left| J_T - \langle J \rangle \right|}{J_T} \cdot 100\%.$$

Сделать выводы.

Таблица 2

m, $кг$	m_O, $кг$	m_C, $кг$	N_C	R, $м$	l_1, $м$	l, $м$	$\langle J \rangle$, $кг \cdot м^2$	J_T, $кг \cdot м^2$	δJ, %
	0,400	0,008		0,30	0,28	0,29			

Контрольные вопросы

1. Дайте определение момента инерции материальной точки.
2. Дайте определение момента инерции твердого тела.
3. Сформулируйте теорему Штейнера. Поясните ее рисунком.
4. Что такое колебания?
5. Какие колебания называются свободными или собственными?
6. Какие колебания называются гармонически-

ми?

7. Дайте определение и запишите формулу для периода, частоты и циклической частоты колебаний. В каких единицах измеряются эти величины?

8. Какие колебания называются свободными? Затухающими? Вынужденными? Гармоническими?

9. Запишите уравнение затухающих колебаний и изобразите графически зависимость $x = f(t)$.

10. Запишите закон убывания амплитуды при затухающих колебаниях.

11. Что такое логарифмический декремент затухания и добротность? Запишите соответствующие формулы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трофимова Т.И. Курс физики – М.: Академия, 2013.