



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ  
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Физика»

**Учебно-методическое пособие**  
«Определение момента инерции различ-  
ных тел. Теорема Штейнера»  
по дисциплине

**«Физика»**

Авторы  
Русакова Е.Б.,  
Колпачева Н.А.

Ростов-на-Дону, 2018

## Аннотация

Учебно-методическое пособие предназначен для студентов очной формы обучения по всем формам направления.

Указания содержат описание лабораторной установки, а также указания для определения момента инерции различных тел и проверка теоремы Штейнера.

Предназначено для обучающихся, изучающих дисциплину «Физика» для выполнения лабораторной работы по программе курса общей физики.

## Авторы

к.ф.-м.н., профессор кафедры «Физика»  
Русакова Е.Б.,  
ассистент кафедры «Физика»  
Колпачева Н.А.



## Оглавление

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕЛ.**

#### **ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА. ....4**

Краткая теория..... 4

Экспериментальная установка. .... 7

Порядок выполнения работы. .... 8

Обработка результатов эксперимента. .... 8

Контрольные вопросы .....11

#### **Список литературы .....13**

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕЛ. ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА.

**Цель работы:** применение теоремы Штейнера и определение моментов инерции различных тел, используя период крутильных колебаний.

**Приборы и принадлежности:** лабораторная установка фирмы "PHYWE".

### Краткая теория.

Момент инерции тела  $I$  используется при описании динамики вращательного движения твердого тела, основным уравнением которой является:

$$\vec{M} = I \vec{\varepsilon}, \quad (1)$$

Где  $\vec{M}$  – проекция на ось вращения суммарного момента сил, действующих на тело;  $I$  – момент инерции тела относительно

этой оси вращения;  $\vec{\varepsilon} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2}$  – угловое ускорение тела;  $\vec{\varphi}$  –

угол поворота.

Величина момента инерции, как мера инертности тела при вращательном движении, зависит от формы и размеров тела, массы тела и ее пространственного распределения, а также от выбора оси вращения.

В общем случае момент инерции тела относительно произвольной оси вращения определяется интегрированием по объему тела:

$$I = \int_V r^2 \rho dV, \quad (2)$$

где  $r$  – расстояние выделенного элемента объема тела  $dV$  от оси вращения;  $\rho$  – плотность тела.

Определение величины момента инерции для тел сложной формы и неоднородного распределения массы проводится экспериментальными методами с использованием закона динамики вращательного движения твердого тела.

В данной лабораторной работе экспериментальный метод определения момента инерции основан на использовании механической системы, создающей крутильные колебания исследуемо-

го твердого тела. В механическую систему входят ось с винтом для закрепления диска, соединенная жестко со спиральной пружиной, и диск с отверстиями для возможного смещения точки вращения. Для выведения системы из равновесия достаточно повернуть исследуемое тело на некоторый первоначальный угол  $\varphi_0$ . При этом спиральная пружина закручивается на этот же угол.

Возникающий момент  $\vec{M}$ , который создается пружиной, стремится вернуть систему в состояние равновесия. Так появляются крутильные слабо затухающие колебания. Если пренебречь трением в системе, то с некоторым приближением можно воспользоваться законом сохранения механической энергии и законом динамики вращательного движения.

Потенциальная энергия закрученной спиральной пружины определяется по формуле:

$$E_n = \frac{N\varphi_0^2}{2}, \quad (3)$$

где  $N$  – модуль кручения спиральной пружины;  $\varphi_0$  – начальный угол закручивания.

При крутильных колебаниях потенциальная энергия спиральной пружины

периодически переходит в кинетическую энергию вращательного движения тела и обратно.

Кинетическая энергия вращающегося тела –

$$E_k = \frac{I\omega_0^2}{2}, \quad (4)$$

где  $\omega_0$  – амплитуда угловой скорости вращения тела.

При отсутствии трения из закона сохранения энергии следует, что  $E_k = E_n$ , откуда находим:

$$\omega_0 = \varphi_0 \sqrt{\frac{N}{I}}. \quad (5)$$

При упругом закручивании спиральной пружины действующий момент сил  $M$  пропорционален углу закручивания  $\varphi_0$ :

$$\vec{M} = N\vec{\varphi}, \quad \vec{a}_\varepsilon = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \quad (6)$$

Тогда уравнение динамики вращательного движения (1) будет иметь вид:

$$I \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = N\vec{\varphi} \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + f \cdot \varphi = 0. \quad (7)$$

Это дифференциальное уравнение является уравнением незатухающих крутильных колебаний с собственной частотой

$\varphi = \sqrt{\frac{N}{I}}$ . Его решением является функция, определяющая зависимость  $\varphi$  от  $t$  и имеющая вид:

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{N}{I}}t + \alpha_0\right), \quad (8)$$

где  $\varphi_0$  - амплитуда и  $\alpha_0$  - произвольная начальная фаза колебаний, которые

определяются из начальных условий.

Период колебаний определяется как:

$$T = \frac{2\pi}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{N}}, \quad (9)$$

откуда величина момента инерции системы:

$$I = \frac{T^2}{4\pi^2} N. \quad (10)$$

Численное значение модуля кручения спиральной пружины определяется

экспериментально путем измерения внешнего момента сил  $\vec{M}$  и угла поворота диска  $\varphi$ . Для проведения эксперимента необходимо приложить окружную (касательную) силу  $\vec{F}$  с помощью динамометра и определить угол поворота диска.

Модуль кручения определяется по среднеарифметическим значениям:

$$N = \left| \frac{\vec{M}}{\vec{\varphi}} \right|, \quad (11)$$

где  $M = h \times F$ ,  $h$  – расстояние от центра вращения до точки приложения силы.

### Экспериментальная установка.

Общий вид экспериментальной установки показан на рис.1.



Рисунок. 1. Экспериментальная установка.

Установка состоит из: 1 - вращающийся вал, 2- шар, 3 – диск, 4 - полый цилиндр, 5 - сплошной цилиндр, 6 - стержень с подвижными грузами, 7 – динамометр (2,5 Н), 8 - световой барьер со счетчиком, 9 - треножник «PASS», 10 – рулетка.

Для определения модуля кручения используется динамометр для создания силы в наиболее удаленном отверстии диска. Шкала динамометра градуирована в единицах силы, а по краю плоскости диска нанесена шкала для определения угла поворота системы. На опоре закреплена вертикальная стойка, на которой установлен световой барьер. При пересечении прерывателем, установленным на диске светового луча в световом барьере, производится фиксация числа колебаний и времени движения системы.

### Порядок выполнения работы.

1. Закрепить на оси вращения диск в центральном отверстии.

2. Прикрепить динамометр с ценой деления  $0,02 \text{ Н}$  к наиболее удаленной точке диска и приложить окружную силу  $F$ . Рулеткой измерить расстояние  $h$  от точки приложения силы до оси вращения. Величину силы измерять при значениях угла поворота диска  $\varphi = 60; 120; 180^\circ$ . Опыт повторить три раза в прямом и обратном направлениях, результаты занести в таблицу 1. Необходимо следить, чтобы ось динамометра была касательной к соответствующей окружности диска.

3. Включить световой барьер.

4. Повернуть диск вокруг оси на первоначальный угол  $\varphi_0 = 120^\circ$  (не более  $180^\circ$ ), освободить его и определить время полного периода колебаний  $T_i$  по показаниям секундомера. Результаты замеров занести в таблицу 2.

При использовании стержня с подвижными грузами необходимо рулеткой измерить расстояния от груза до оси вращения ( $a_1, a_2$ ) и занести в таблицу 3.

### Обработка результатов эксперимента.

1. Записать результаты всех замеров в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Определение модуля кручения

$N^\circ$	$F_i, \text{ Н}$	$\varphi_i, \text{ рад}$	$M_i, \text{ Н}$	$N_i, \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$	$N_{cp}, \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$	$\Delta N, \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$	$\delta N, \%$	$N \pm \Delta N, \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$

Таблица 2. Основной опыт

$N^\circ$	$T_i, \text{ с}$	$T_{cp}, \text{ с}$	$\Delta T, \text{ с}$	$\delta T, \text{ ср}$	$T \pm \Delta T$

Таблица 3. Основной опыт (стержень с грузами)

$N_0$	$a_1, м$	$a_2, м$	$T_i, с$	$T_{ср}, с$	$\Delta T, с$	$\delta T, ср$	$T \pm \Delta T$

**Примечание.** Масса диска  $m = 425$  г, радиус диска  $r = 150$  мм; масса цилиндра:  $m = 198$  г, радиус 1  $r = 19,9$  мм; масса полоого дополнительного:  $m_2 = 160$  г, радиус 2  $r = 15,05$  мм.

При заполнение таблицы 1 градусы переводятся в радианы ( $1 \text{ рад} = 57,29^\circ$ )

2. Вычислить модуль кручения спиральной пружины по экспериментальным данным таблицы 1

$$N = \frac{M_i}{\varphi_i}, \quad M_i = F_i \times h$$

определить относительную и абсолютную погрешности модуля кручения пружины

$$\Delta N = \sum_{i=1}^n \Delta F_i \cdot h_i$$

$$\delta N = \frac{\Delta N}{N}$$

3. Вычислить момент инерции тел.

Используя результаты опытов по определению времени периода колебаний  $T$

(таблица 2), вычислить экспериментальное значение момента инерции  $I_{\varepsilon 1}$  и  $I_{\varepsilon 2}$  по формуле

$$I_{\varepsilon} = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot N_{ср}$$

4. Вычислить теоретические значения моментов инерции.

а) Диск

Момент инерции однородного диска массы  $m$  и радиуса  $r$

относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости:

$$I_0 = \frac{1}{2} m r^2.$$

*б) Цилиндр*

Момент инерции однородного цельного цилиндра массы  $m$  и радиуса  $r$  относительно оси, совпадающей с осью симметрии цилиндра:

$$I_0 = \frac{1}{2} m r^2.$$

*в) Полый цилиндр*

Момент инерции полого цилиндра массы  $m$  больше, чем сплошного цилиндра той же массы, и зависит от внутреннего  $r_1$  и внешнего  $r_2$  радиусов цилиндра.

$$I_0 = \frac{1}{2} m (r_2^2 + r_1^2).$$

*г) Сфера*

Момент инерции однородного сферического тела массы  $m$  и радиуса  $r$

относительно оси, проходящей через его центральную точку, равен:

$$I_0 = \frac{2}{5} m r^2.$$

Для точного расчета момента инерции сложной системы используется теорема Штейнера.

**Теорема Штейнера:**

*Согласно теореме Штейнера, момент инерции  $I$  тела, вращающегося вокруг*

*произвольной оси, равен:*

$$I = I_0 + m d^2,$$

*где  $I_0$  - момент инерции относительно центральной оси, параллельной оси вращения и проходящей через центр масс тела;  $a$  - расстояние между осью вращения и центральной осью тела.*

- 5.** Вычислить теоретическое значение моментов инерции для основного диска  $I$  и двух грузиков  $I_1$  и  $I_2$  относительно оси вращения с использованием теоремы Штейнера, значение суммарного момента инерции  $I$ . Срав-

нить с экспериментально найденным значением  $I_{\text{э}}$  с теоретическими значениями. Результаты занести в таблицу 4.

Таблица 4. Сравнение экспериментальных и теоретических данных.

Тело	$I_{\text{э}}, \text{кг}\cdot\text{м}^2$	$I_{\text{теор}}, \text{кг}\cdot\text{м}^2$
Диск		
Шар		
Цилиндр		
Полый цилиндр		
Стержень с грузами		

### Контрольные вопросы

1. Как определяются моменты инерции материальной точки, системы материальных точек, материального тела?
2. Какой физический смысл момента инерции и каково его применение в динамике вращательного движения?
3. Как сформулировать выражение механической энергии системы твердых тел, совершающей крутильные колебания?
4. Как определяются моменты инерции массивного диска, сплошного и полого цилиндров относительно главных центральных осей?
5. Как сформулировать уравнение незатухающих крутильных колебаний для системы твердых тел?

Выберите правильный вариант в следующих заданиях:

#### ЗАДАНИЕ № 1

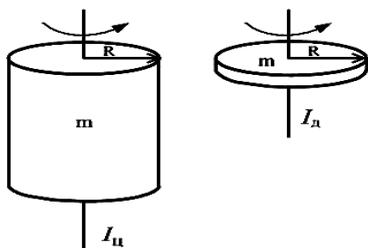
- Момент инерции однородного тела зависит от:
- А. Массы тела; В. Формы и размеров тела;
  - С. Выбора оси вращения.

#### ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1) А и С; 2) Только А; 3) В и С; 4) А, В и С; 5) А и В.

#### ЗАДАНИЕ № 2

Диск и цилиндр имеют одинаковые массы и радиусы (рисунок). Для их моментов инерции справедливо соотношение...


**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

- 1)
- $I_{ц} < I_{д}$
- ; 2)
- $I_{ц} > I_{д}$
- ; 3)
- $I_{ц} =$

**ЗАДАНИЕ № 3**

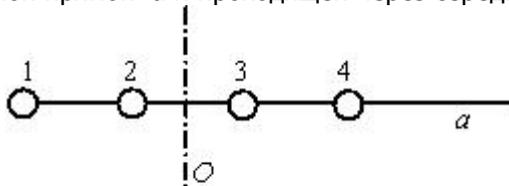
Момент инерции однородного диска массой  $m$  и радиусом  $R$  относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости диска, равен  $I = \frac{1}{2}mR^2$ . Чему равен момент инерции диска относительно оси, проходящей через его край и перпендикулярной плоскости диска?

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

- 1)
- $\frac{3}{2}mR^2$
- ; 2)
- $0,4mR^2$
- ; 3)
- $\frac{1}{2}mR^2$
- ; 4)
- $mR^2$
- ; 5)
- $2mR^2$
- .

**ЗАДАНИЕ № 4**

Четыре шарика расположены вдоль прямой  $a$ . Расстояния между соседними шариками одинаковы. Массы шариков слева направо: 4 г, 3 г, 2 г, 1 г. Если поменять местами шарик 1 и 2, то момент инерции этой системы относительно оси  $O$ , перпендикулярной прямой  $a$  и проходящей через середину системы ...


**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

- 1) увеличится;
- 
- 2) уменьшится;
- 
- 3) не изменится.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И.В. Курс общей физики: в 5-ти кн., кн. 1: учебное пособие для вузов.- М.: АСТ Астрель, 2005.
2. Пронин В.И. Практикум по физике. - СПб.: Лань, 2005.
3. Трофимова Т. И. Курс физики.- М.: Академия. 2006.
4. Инструкция по эксплуатации оборудования фирмы "PHUWE".