



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ  
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Технология вяжущих веществ, бетонов и  
строительной керамики»

**Методические указания**  
для выполнения лабораторной работы  
на тему

# «Планирование и обработка результатов эксперимента для получения моделей второго порядка»

Автор  
Серебряная И.А.

Ростов-на-Дону, 2017



## Аннотация

Методические указания к лабораторной работе на тему: «Планирование и обработка результатов эксперимента для получения моделей второго порядка» предназначены для обучающихся по направлению подготовки 27.03.01 «Стандартизация и метрология», 27.04.02 «Управление качеством», 08.04.01 «Строительство»

Излагается содержание лабораторной работы, математическое планирование эксперимента и правила обработки опытных данных, приведены справочные данные, необходимые для выполнения работы.

## Автор

К.Т.Н., доцент  
кафедры «ТВВБИСК»  
Серебряная И.А.





## Оглавление

|  |           |
|--|-----------|
| <b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>   | <b>4</b>  |
| <b>1 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ.....</b>                              | <b>5</b>  |
| <b>2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ .....</b>                       | <b>6</b>  |
| 2.1. Математическое планирование эксперимента.....                           | 6         |
| 2.2 Методика проведения лабораторной работы .....                            | 9         |
| 2.3. Испытание свежееотформованных образцов и условия<br>их твердения.....   | 10        |
| 2.4 Подготовка и испытание образцов в возрасте 28 суток<br>.....             | 11        |
| 2.5 Обработка опытных данных .....   | 11        |
| <b>3 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО<br/>ПЛАНИРОВАНИЯ .....</b>        | <b>14</b> |
| 3.1 Расчет коэффициентов полиномиального уравнения                           | 14        |
| 3.2 Оценка значимости коэффициентов уравнения<br>регрессии .....             | 15        |
| 3.3 Проверка адекватности полиномиального<br>уравнения второго порядка ..... | 17        |
| 3.4 Интерпретация моделей второго порядка .....                              | 18        |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Критические точки распределения<br/>Стюдента .....</b>       | <b>20</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2 Значения F-критерия (Фишера).....</b>                        | <b>21</b> |



## ВВЕДЕНИЕ

Прессование с успехом используется при изготовлении таких искусственных композиционных материалов, как силикатный кирпич, керамические изделия, небольшие по высоте бетонные строительные элементы. Одна из разновидностей способа – вибропрессование – является достаточно распространенным технологическим приемом для производства широкой номенклатуры строительных материалов, в частности мелкоштучных изделий для дорожного и коммунального строительства. В последнее время этот метод стал с успехом использоваться в технологии жесткого гиперпрессования рабочих смесей, состоящих из вяжущего и минеральных компонентов.

Прессование как метод уплотнения имеет ряд принципиальных преимуществ, которые связаны с возможностью немедленной распалубки отформованных изделий и их транспортированием к месту вызревания, которое может быть организовано в естественных условиях. Низкое водосодержание формовочных смесей позволяет в данном случае значительно сократить расход вяжущего, увеличить плотность, водостойкость и долговечность готовых изделий. Кроме того, существенно расширяется сырьевая база, т.к. в качестве минеральных компонентов могут использоваться мелкие пески, супеси, суглинки, отходы от дробления и распиловки горных пород, отсева и многое техногенные отходы (шлаки и золы ТЭЦ, отработанные «формовочные земли» и др.).

Вместе с тем при изготовлении прессованных изделий следует строго относиться к назначению состава сырьевой смеси, выбору ее оптимальной влажности, правильному перемешиванию до однородной массы и уплотнению при достаточном прессующем давлении. Эти производственные факторы являются важнейшими, учитываемыми при разработке данной безобжиговой технологии изготовления строительных материалов и изделий.



## 1 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Цель настоящей лабораторной работы – научить студентов принципам разработки рецептуры формовочных смесей и выбора требуемого давления прессования при изготовлении из цементно-минеральных смесей методом жесткого прессования с помощью математического планирования эксперимента.

Для достижения поставленной цели студенты должны, ознакомившись с основами теории и методикой проведения работы, научиться решать следующие частные задачи:

- составить план эксперимента и определить условия его реализации;
- выбрать оптимальное водосодержание формовочных смесей;
- приготовить рабочие формовочные смеси и произвести формование образцов-цилиндров при выбранном давлении прессования;
- определить среднюю плотность уплотненной смеси;
- испытать образцы, определить основные физико-механические свойства цементно-минеральных композиций;
- получить математическую модель;
- сделать необходимые выводы.

## 2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

### 2.1. Математическое планирование эксперимента

Выполнение основной части лабораторной работы начинается с математического планирования эксперимента. Для этого формулируют задачу оптимизации, ее критерии и выбирают исследуемые (варьируемые) факторы.

Целью планирования эксперимента в данной лабораторной работе является получение математической модели, позволяющей наилучшим образом оптимизировать состав цементно-минеральной композиции и управлять производственным процессом при помощи этой модели. Для успешного решения поставленной задачи из множества факторов, оказывающих влияние на основные физико-механические характеристики затвердевшего композита, выделены и приняты в качестве исследуемых два наиболее значимых. Неучтенные факторы должны быть стабилизированы и поддерживаться на заданном уровне в течение всего эксперимента.

В этом случае квадратичная модель будет иметь вид:

$$Y_i = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2$$

где  $Y_i$  – исследуемое свойство (прочность затвердевшей композиции в сухом и водонасыщенном состоянии, ее плотность, водопоглощение по массе, общая пористость);  
 $x_1, x_2$  – исследуемые (варьируемые) факторы;  
 $b_0, b_1, b_2, b_{11}, b_{22}, b_{12}$  – рассчитанные коэффициенты регрессии.

Для получения квадратичной модели в данной лабораторной работе рекомендуется воспользоваться двухфакторным симплекс-суммированным планом на вписанной окружности, который является одним из наиболее удобных при решении ряда рецептурных и технологических задач. При планировании и реализации эксперимента координаты опытов размещаются в вершинах и в центре шестиугольника (рис. 1).

В качестве исследуемых факторов принимаем:

- содержание цемента в формовочной смеси (%) –  $X_1$ ;
- удельное давление прессования (МПа) –  $X_2$ .

После этого задаемся основными уровнями исследования и интервалами их варьирования, которые представлены в табл. 1, а

план эксперимента и натуральные значения переменных в каждой точке плана – в табл. 2.

В левой части табл. 2 показаны координаты точек плана. Для определения условий проведения опытов от кодированных переменных нужно перейти к натуральным, т.е. воспользоваться формулой:

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta X_i}, \quad (1)$$

где  $x_i$  – кодированное значение фактора;  
 $X_i$  – натуральное (физическое) значение фактора;  
 $X_{i0}$  – основной уровень фактора;  
 $\Delta X_i$  – интервал варьирования первого фактора.  
 Для второго фактора расчетный интервал варьирования

$$\Delta X_i = \frac{X_{2\max} - X_{2\min}}{2} : 0,87, \quad (2)$$

Рассчитанные натуральные значения переменных заносят в правую часть табл. 2.

Таблица 1 – Исследуемые факторы и интервалы их варьирования

| Код                                | Значение кода | Исследуемые факторы                              |   |
|------------------------------------|---------------|--|---|
|                                    |               | $X_1$ -содержание цемента в формовочной смеси, % | $X_2$ -удельное давление прессования, МПа |
| Основной уровень $X_{i0}$          | 0             |  |   |
| Интервал варьирования $\Delta x_i$ | x             |  |   |
| Верхний уровень $X_{i\max}$        | +1            |  |   |
| Нижний уровень $X_{i\min}$         | -1            |  |   |

Таблица 2 – План эксперимента и натуральные значения переменных

| Номер опыта | План в кодированных переменных |       | План в натуральных переменных                     |  |
|-------------|--------------------------------|-------|---|--|
|             | $x_1$                          | $x_2$ | $X_1$ – содержание цемента в формовочной смеси, % | $X_2$ – удельное давление прессования, МПа |
| 1           | -1                             | 0     |   |  |
| 2           | +1                             | 0     |   |  |
| 3           | +0,5                           | +0,87 |   |  |
| 4           | +0,5                           | -0,87 |   |  |
| 5           | -0,5                           | +0,87 |   |  |
| 6           | -0,5                           | -0,87 |   |  |
| 7           | 0                              | 0     |   |  |

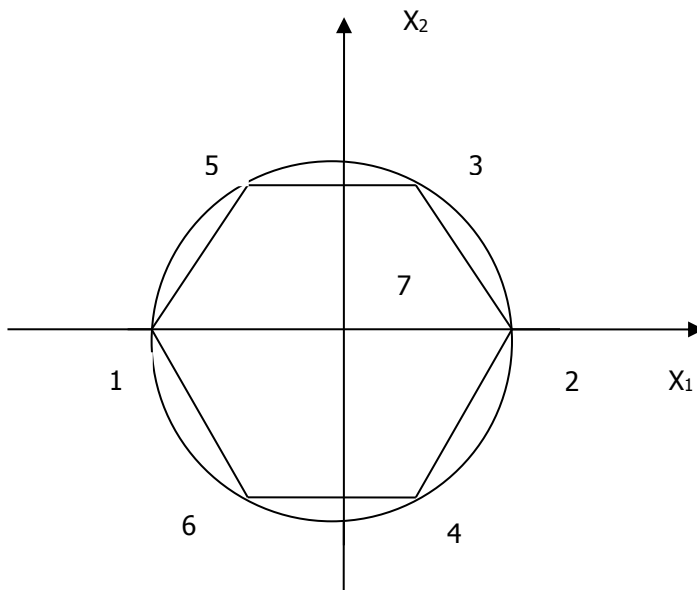


Рис. 1. Симплекс-суммированный план эксперимента



Реализация принятого плана позволяет получить следующие функции откликов:

- $Y_1$  – плотность свежееотформованной смеси  $\rho_c$ , кг/м<sup>3</sup>;
- $Y_2$  – прочность затвердевшей композиции в сухом состоянии  $R$ , МПа;
- $Y_3$  – прочность затвердевшей композиции в водонасыщенном состоянии  $R_{нас}$ , МПа;
- $Y_4$  – водопоглощение по массе  $W$ , %
- $Y_5$  – плотность затвердевшей смеси  $\rho_{ср}$ , кг/м<sup>3</sup>;
- $Y_6$  – коэффициент размягчения  $K = R_{нас} / R$ .

## 2.2 Методика проведения лабораторной работы

Анализ плана показывает, что подгруппа студентов должна быть разбита на три бригады:

- 1-я реализует 1 и 3-й опыты;
- 2-я – 2 и 4-й опыты;
- 3-я – 5, 6 и 7-й опыты.

Поэтому для изготовления нужного количества образцов 1 и 2-я бригады должны приготовить по 3 кг формовочной смеси, а 3-я – 4,5 кг.

Для изготовления образцов заранее готовят минеральные компоненты и цемент.

Соотношение между минеральными компонентами выбирается по результатам анализа их зернового состава. Оценку зернового состава минеральных компонентов производят по ГОСТ 8735. Дополнительно определяют их плотность по ГОСТ 310.1. Затем подбирают зерновой состав формовочной смеси по рекомендациям, полученным в результате многочисленных исследований:

- |                         |              |
|-------------------------|--------------|
| фракция 1,25 – 5,0 мм   | – 5...10 %;  |
| фракция 0,315 – 1,25 мм | – 40...50 %; |
| фракция менее 0,315 мм  | – 30...35 %. |

После определения соотношения между минеральными компонентами сырьевой смеси составляют сухую формовочную смесь цемента и смешанных минеральных компонентов (по массе) по плану эксперимента из расчета изменения содержания цемента в формовочной смеси от 8 до 11 %.

Количество воды затворения выбирается при изготовлении пробного замеса. Готовят его, постоянно увеличивая количество воды затворения. За оптимальные принимается такое водосодержание смеси, при котором она начинает слегка комковаться, но не налипает на лопатку, а при удельном давлении прессования 40 МПа вода не отжимается к донной части матрицы.

Отвешенное количество цемента и минеральных компонентов высыпают в сферическую чашу и в течение 3 минут перемешивают в сухом состоянии вручную. В сухую тщательно перемешенную смесь начинают впрыскивать заранее дозированную воду. После получения однородной массы (рекомендуемое время перемешивания 5 минут), смесь закрывают влажной тканью или стеклом.

Для изготовления опытных образцов предварительно готовят пресс-формы и поддоны к ним, выпрессовочное кольцо и проверяют исправность гидравлического пресса.

Поскольку в каждом опыте принято свое давление прессования, то следует предварительно рассчитать необходимое усилие прессования, зная сечения образца и количество одновременно изготавливаемых образцов.

Полученные данные по расчету дозировки и требуемому усилию прессования заносят в табл. 3.

Таблица 3 – Дозировка компонентов и усилия прессования

| № опыта | Дозировка компонентов на замес, кг |               |               | Усилие прессования на |             |
|---------|------------------------------------|---------------|---------------|-----------------------|-------------|
|         | цемент                             | 1-й компонент | 2-й компонент | один образец          | два образца |
| 1       |                                    |               |               |                       |             |
| 2       |                                    |               |               |                       |             |
| ...     |                                    |               |               |                       |             |
| 7       |                                    |               |               |                       |             |

Отвесив нужное количество формовочной смеси (200 г для каждого образца), ее укладывают в матрицу, предварительно подуплотняя рукой или штыковкой. После укладки смеси в матрицу устанавливают пуансон и вместе с поддоном располагают в центре пресса. Требуемое усилие прессования следует приложить в течение 5...8 с. Затем давление масла сбрасывают, достают пресс-форму и с помощью выпрессовщика производят распалубку. В таком порядке изготавливают требуемое количество образцов.

### 2.3. Испытание свежетоформованных образцов и условия их твердения

Образцы цилиндры от каждой формовки измеряют и взвешивают. Полученные результаты и результаты расчета плотности свежетоформованной смеси заносят в табл. 4

Условия твердения образцов естественные.

## 2.4 Подготовка и испытание образцов в возрасте 28 суток

Опытные образцы в возрасте 28 суток обмеряют, взвешивают и делят на две группы: первая сразу же испытывается на сжатие, а вторая подвергается водонасыщению в течение трех суток.

Водонасыщенные образцы вновь взвешиваются и испытываются на сжатие.

Все результаты замеров, взвешивания, испытания на сжатие и определения свойств заносятся в табл. 5.

## 2.5 Обработка опытных данных

2.5.1 Определение средней плотности свежееотформованной и затвердевшей смесей производят по формуле:

$$\rho = \frac{m_i}{V_i}, \quad (3)$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -го образца, кг;

$V_i$  – объем  $i$ -го образца,  $m^3$ .

Для определения объема образца измеряют диаметр цилиндра и его высоту.

2.5.2. Определение предела прочности при сжатии сухих и водонасыщенных образцов производят по формуле:

$$R = \frac{P_i}{S_i}, \quad (4)$$

где  $P_i$  – усилие разрушения образца, кН;

$S_i$  – площадь поперечного сечения образца,  $m^2$ .

Средняя прочность бетона в сухом и водонасыщенном состоянии определяется как среднеарифметическая величина результатов испытаний двух образцов.

2.5.3. Коэффициент размягчения композиции, характеризующий ее водостойкость, определяют для каждой серии образцов по формуле:

$$K_{аззм} = \frac{R_{вод}}{R_{сух}}, \quad (5)$$

где  $R_{вод}$  – средняя прочность на сжатие водонасыщенных образцов, МПа;  
 $R_{сух}$  – средняя прочность на сжатие сухих образцов, МПа.

2.5.4. Водопоглощение образца по массе определяют по формуле:

$$W_{mi} = \frac{m_{ei} - m_{ci}}{m_{ci}} \times 100 \times (\%) \quad (6)$$

где  $m_{ei}$  – масса водонасыщенного  $i$ -го образца, г;  
 $m_{ci}$  – масса сухого  $i$ -го образца, г.

Таблица 4 – Состав и свойства формовочных смесей

| № опыта | № образца | Физические параметры |            |                        |           | Средняя плотность свежееотформованной смеси, кг/м <sup>3</sup> |                  |
|---------|-----------|----------------------|------------|------------------------|-----------|--|------------------|
|         |           | Диаметр, см          | Высота, см | Объем, см <sup>3</sup> | Масса, кг | отдельного образца   | средняя по серии |
| 1       | 1.1       |                      |            |                        |           |  |                  |
|         | 1.2       |                      |            |                        |           |  |                  |
|         | ...       |                      |            |                        |           |  |                  |
|         | 1.6       |                      |            |                        |           |  |                  |
| ...     |           |                      |            |                        |           |  |                  |
| 7       |           |                      |            |                        |           |  |                  |

Таблица 5 – Физико-механические свойства затвердевших композиций

| № опыта | Физические параметры |            |                        |           | Средняя плотность смеси, кг/м <sup>3</sup> |                    | Результаты механических испытаний |                       |                      |                       | Средняя прочность композиции, МПа |                   | Коэффициент размягчения | Водопоглощение по массе, % |                            |
|---------|----------------------|------------|------------------------|-----------|--|--------------------|-----------------------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------------------|-------------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|
|         | Диаметр, см          | Высота, см | Объем, см <sup>3</sup> | Масса, кг |  | отдельного образца | средняя по серии                  | сухих                 |                      | водонасыщенных        |                                   | в сухом состоянии |                         |                            | в водонасыщенном состоянии |
|         |                      |            |                        | сухих     | водонасыщенных                             |                    |                                   | разрушающее усилие, Н | прочность при сжатии | разрушающее усилие, Н | прочность при сжатии              |                   |                         |                            |                            |
| 1       |                      |            |                        |           |  |                    |                                   |                       |                      |                       |                                   |                   |                         |                            |                            |
| 2       |                      |            |                        |           |  |                    |                                   |                       |                      |                       |                                   |                   |                         |                            |                            |
| ...     |                      |            |                        |           |  |                    |                                   |                       |                      |                       |                                   |                   |                         |                            |                            |
| 7       |                      |            |                        |           |  |                    |                                   |                       |                      |                       |                                   |                   |                         |                            |                            |

### 3 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Все полученные опытные и расчетные данные по свойствам свежетоформованных и затвердевших композиций заносят в таблицу 6.

Таблица 6 – Опытные и расчетные данные по свойствам композиций

| Номер опыта | Варьируемые факторы                        |  | ...<br>Y <sub>1</sub> | ...<br>Y <sub>2</sub> | ...<br>Y <sub>3</sub> | ...<br>Y <sub>5</sub> | ...<br>Y <sub>6</sub> |
|-------------|--|--|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|             | X <sub>1</sub><br>цемент,<br>% по<br>массе | X <sub>2</sub><br>удельное<br>давление,<br>МПа |                       |                       |                       |                       |                       |
| 1           |  |  |                       |                       |                       |                       |                       |
| ...         |  |  |                       |                       |                       |                       |                       |
| 7           |  |  |                       |                       |                       |                       |                       |

#### 3.1 Расчет коэффициентов полиномиального уравнения

Коэффициенты уравнений регрессии для планов второго порядка определяются по методу наименьших квадратов (МНК).

Коэффициенты регрессии для симплекс-суммированных планов:

$$b_0 = T_1 (OY) - T_2 \sum (iiY), \quad (7)$$

$$b_i = T_3 (iY), \quad (8)$$

$$b_{ii} = T_4(iiY) + T_5 \sum (iiY) - T_2 (OY), \quad (9)$$

$$b_{ij} = T_6 (ijY), \quad (10)$$

где  $OY = \sum_{u=1}^N Y_u$  ;  $iiY = \sum_{u=1}^N (X_{iu})^2 Y_u$  ;  $iY = \sum_{u=1}^N X_{iu} Y_u$  ;  $ijY = \sum_{u=1}^N X_{iu} X_{ju} Y_u$  ,

T<sub>1</sub>-T<sub>6</sub> – параметры для расчета коэффициентов уравнений регрессии (табл. 7).

Таблица 7 – Расчетные значения параметров  $T_1 - T_{10}$  для симплекс-суммированных планов

| $T_i$     | Число опытов в центре плана (в нулевой точке) |       | $T_i$    | Число опытов в центре плана (в нулевой точке) |       |
|-----------|---|-------|----------|---|-------|
|           | 1   | 4     |          | 1   | 4     |
| $T_1=T_2$ | 1,0   | 0,25  | $T_7$    | 1,0   | 0,5   |
| $T_3$     | 0,333   | 0,333 | $T_8$    | 0,577   | 0,577 |
| $T_4$     | 0,667   | 0,667 | $T_9$    | 1,225   | 0,866 |
| $T_5$     | 0,833   | 0,833 | $T_{10}$ | 1,155   | 1,155 |
| $T_6$     | 1,333   | 1,333 |          |   |       |

Для облегчения расчета коэффициентов полиномиального уравнения необходимо заполнить таблицу 8. Для облегчения работы предлагается разделить студенческую группу на несколько подгрупп (по несколько человек). Каждая подгруппа рассчитывает уравнение для одного из откликов ( $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ). Выбор отклика для подгруппы осуществляет преподаватель.

Таблица 8 – Определение коэффициентов в уравнении регрессии

| Номер опыта | Кодированные значения факторов |       | $Y, \dots,$ | $XY$   |        | $X_1X_2Y$ | $X^2Y$   |          |
|-------------|--------------------------------|-------|-------------|--------|--------|-----------|----------|----------|
|             | $X_1$                          | $X_2$ |             | $X_1Y$ | $X_2Y$ |           | $X_1^2Y$ | $X_2^2Y$ |
| 1           |                                |       |             |        |        |           |          |          |
| 2           |                                |       |             |        |        |           |          |          |
| ...         |                                |       |             |        |        |           |          |          |
| 7           |                                |       |             |        |        |           |          |          |
| $\Sigma$    |                                |       | $OY$        | $I_1Y$ | $I_2Y$ | $ijY$     | $ii_1Y$  | $ii_2Y$  |

### 3.2 Оценка значимости коэффициентов уравнения регрессии

Оценка значимости коэффициентов регрессии проводится аналогично линейным и неполным квадратичным моделям. Изменения вносятся лишь в расчет критического значения коэффициентов регрессии для проверки их значимости:

$$b_{кр} = t [S_b] \quad (11)$$

Среднеквадратическую ошибку  $[S_b]$  при определении коэффициентов регрессии для полных квадратичных уравнений при дублировании опытов по строкам матрицы находят по формулам:

$$S[b_0] = T_7 S_{\varepsilon}, \quad (12)$$

$$S[b_i] = T_8 S_{\varepsilon}, \quad (13)$$

$$S[b_{ii}] = T_9 S_{\varepsilon}, \quad (14)$$

$$S[b_{ij}] = T_{10} S_{\varepsilon}, \quad (15)$$

где  $S_{\varepsilon} = \sqrt{D_{\varepsilon}}$ .

Дисперсия эксперимента (воспроизводимости) при дублировании опытов по строкам матрицы:

$$D_{\varepsilon} = \frac{1}{N(m-1)} \sum (y_i - \bar{y})^2, \quad (16)$$

где  $\bar{y}$  – среднее значение по  $m$  опытам;

$y_i$  – значение в  $i$ -м опыте;

$m$  – число дублируемых опытов по строкам матрицы;

$N$  – число опытов.

Значения  $T_7$ - $T_{10}$  принимают по табл. 9.

Таблица 9 – Расчетные параметры для определения среднеквадратических ошибок и коэффициентов уравнений регрессии второго порядка

| Тип плана                   | Число факторов $k$ | Общее число точек $N$ | Число нулевых точек $N_0$ | $T_7$ | $T_8$ | $T_9$ | $T_{10}$ |
|-----------------------------|--------------------|-----------------------|---------------------------|-------|-------|-------|----------|
| На вписанном шестиугольнике | 2                  | 7                     | 1                         | 1     | 0,577 | 1,225 | 1,155    |

Расчетное значение  $t_p$  – критерия Стьюдента для каждого коэффициента уравнения регрессии находят по формулам:

$$t_p[b_0] = |b_0| / S[b_0], \quad (17)$$

$$t_p[b_i] = |b_i| / S[b_i], \quad (18)$$

$$t_p[b_{ij}] = |b_{ij}| / S[b_{ij}], \quad (19)$$

$$t_p[b_{ii}] = |b_{ii}| / S[b_{ii}]. \quad (20)$$



Если  $t_p[b] > t_{\text{табл}}$ , то коэффициент считается значимым.

$t_{\text{табл}}$  – табличное значение критерия Стьюдента (Приложение 1), выбранное в зависимости от уровня значимости  $\alpha$  и числа степеней свободы  $f[y]$ , причем:  $f[y]=N(m-1)$  – при повторении опытов по строкам матрицы.

Оценки  $b_i$  и  $b_{ij}$  независимы, и поэтому любая из них может быть исключена из модели без пересчета оставшихся значимых оценок с риском  $\alpha$ . Если из уравнения исключается незначимый коэффициент  $b_{ij}$ , то необходимо выполнить пересчет значений оставшихся в уравнении коэффициентов  $b_0$  и  $b_{ij}$ , проводя последовательный регрессионный анализ. Поэтому в планах второго порядка коэффициенты квадратичных членов остаются в уравнении даже если они незначимы.

### 3.3 Проверка адекватности полиномиального уравнения второго порядка

Оценив значимость коэффициентов, производят проверку адекватности уравнения. Изменения вносятся в формулы по расчету дисперсии неадекватности ( $D_{\text{на}}$ ).

При дублировании опытов по строкам матрицы:

$$D_{\text{на}} = \frac{m}{N - B - (N_0 - 1)} * \sum (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2, \quad (21)$$

где  $N$  – число опытов;  
 $B$  – число значимых коэффициентов в уравнении, в том числе и  $b_0$ ;

$y_u$  и  $\hat{y}_u$  – соответственно опытное и расчётное значение отклика в  $u$ -ой точке;

$\bar{y}_u$  – среднее значение выходного параметра в точке  $u$  для случая, если

$$\bar{y}_u = \frac{\sum_1^n y_{ui}}{m},$$

т.е. при повторении опытов;

$m$  – число дублируемых опытов по строкам матрицы.

Дисперсия воспроизводимости ( $D_3$ ) рассчитывается по формуле (16).

Проверку адекватности, то есть соответствия полученного уравнения опытным данным, производим по критерию Фишера:

$$F_{\text{экс.}} = D_{\text{на}} / D_{\text{э}}, \quad (22)$$

где  $D_{\text{на}}$  – дисперсия неадекватности;

$D_{\text{э}}$  – дисперсия эксперимента.

Далее определяется табличное значение критерия Фишера ( $F_{\text{табл.}}$ ) (Приложение 2) при уровне значимости  $\alpha$  и числе степеней свободы числителя ( $f_1=N-B$ ) и знаменателя ( $f_2 = m-1$ ).

Если  $F_{\text{экс.}} < F_{\text{табл.}}$ , то уравнение считается адекватным и его можно использовать для получения расчётных значений  $Y$ .

Если  $F_{\text{экс.}} > F_{\text{табл.}}$ , то уравнение считается неадекватным и требует уточнения.

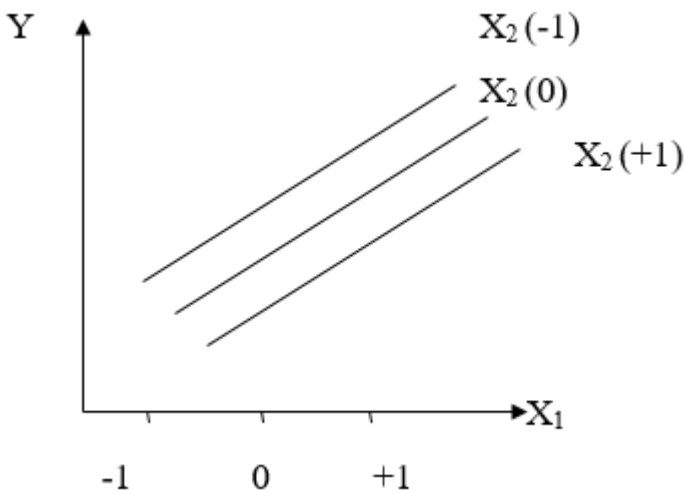
Если квадратичная зависимость неадекватно описывает процесс необходимо указать причины этого.

### 3.4 Интерпретация моделей второго порядка

Интерпретация моделей второго порядка проводится аналогично неполноквадратическим и линейным моделям. *Каждая подгруппа студентов интерпретирует только одну полученную математическую модель (смотри указания п.1.1).*

Для геометрической интерпретации полученной модели необходимо построить график зависимости  $Y...$  от  $X_1, X_2$ . Оси  $Y$  и  $X_1$  приводятся в натуральных значениях.

*По полученным математическим моделям и их геометрической интерпретации студенты должны сделать выводы о возможности практического применения и решения технологических задач с помощью аппарата математического планирования эксперимента.*



## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА

| Число степеней свободы $f$ | $\alpha$ (двухсторонняя критическая область) |       |       |       |       |        |
|----------------------------|--|-------|-------|-------|-------|--------|
|                            | 0,1  | 0,05  | 0,02  | 0,01  | 0,002 | 0,001  |
| 1                          | 6,31   | 12,7  | 31,82 | 63,7  | 318,3 | 637,0  |
| 2                          | 2,92   | 4,30  | 6,97  | 9,92  | 22,33 | 31,6   |
| 3                          | 2,35   | 3,18  | 4,54  | 5,84  | 10,22 | 12,9   |
| 4                          | 2,13   | 2,78  | 3,75  | 4,60  | 7,17  | 8,61   |
| 5                          | 2,01   | 2,57  | 3,37  | 4,03  | 5,89  | 6,86   |
| 6                          | 1,94   | 2,45  | 3,14  | 3,71  | 5,21  | 5,96   |
| 7                          | 1,89   | 2,36  | 3,00  | 3,50  | 4,79  | 5,40   |
| 8                          | 1,86   | 2,31  | 2,90  | 3,36  | 4,50  | 5,04   |
| 9                          | 1,83   | 2,26  | 2,82  | 3,25  | 4,30  | 4,78   |
| 10                         | 1,81   | 2,23  | 2,76  | 3,17  | 4,14  | 4,59   |
| 11                         | 1,80   | 2,20  | 2,72  | 3,11  | 4,03  | 4,44   |
| 12                         | 1,78   | 2,18  | 2,68  | 3,05  | 3,93  | 4,32   |
| 13                         | 1,77   | 2,16  | 2,65  | 3,01  | 3,85  | 4,22   |
| 14                         | 1,76   | 2,14  | 2,62  | 2,98  | 3,79  | 4,14   |
| 15                         | 1,75   | 2,13  | 2,60  | 2,95  | 3,73  | 4,07   |
| 16                         | 1,75   | 2,12  | 2,58  | 2,92  | 3,69  | 4,01   |
| 17                         | 1,74   | 2,11  | 2,57  | 2,90  | 3,65  | 3,96   |
| 18                         | 1,73   | 2,10  | 2,55  | 2,88  | 3,61  | 3,92   |
| 19                         | 1,73   | 2,09  | 2,54  | 2,86  | 3,58  | 3,88   |
| 20                         | 1,73   | 2,09  | 2,53  | 2,85  | 3,55  | 3,85   |
| 30                         | 1,70   | 2,04  | 2,46  | 2,75  | 3,39  | 3,65   |
| 40                         | 1,68   | 2,02  | 2,42  | 2,70  | 3,31  | 3,55   |
| 60                         | 1,67   | 2,00  | 2,39  | 2,66  | 3,23  | 3,46   |
| 120                        | 1,66   | 1,98  | 2,36  | 2,62  | 3,17  | 3,37   |
| $\infty$                   | 1,64   | 1,96  | 2,33  | 2,58  | 3,09  | 3,29   |
|                            | 0,05   | 0,025 | 0,01  | 0,005 | 0,001 | 0,0005 |
|                            | $\alpha$ (односторонняя критическая область) |       |       |       |       |        |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### ЗНАЧЕНИЯ F-КРИТЕРИЯ (ФИШЕРА)

( $f_1$  – число степеней свободы числителя;  $f_2$  – число степеней свободы знаменателя)

| Уровень значимости $\alpha = 0,01$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $f_2$                              | $f_1$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|                                    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    |
| 1                                  | 4052  | 4999  | 5403  | 5625  | 5764  | 5889  | 5928  | 5981  | 6022  | 6056  | 6082  | 6106  |
| 2                                  | 98,49 | 99,01 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,34 | 99,36 | 99,38 | 99,40 | 99,41 | 99,42 |
| 3                                  | 34,12 | 30,81 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,67 | 27,49 | 27,34 | 27,23 | 27,13 | 27,05 |
| 4                                  | 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,98 | 14,80 | 14,66 | 14,54 | 14,45 | 14,37 |
| 5                                  | 16,26 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,45 | 10,27 | 10,15 | 10,05 | 9,96  | 9,89  |
| 6                                  | 13,74 | 10,32 | 9,78  | 9,15  | 8,75  | 8,47  | 8,26  | 8,10  | 7,98  | 7,87  | 7,79  | 7,72  |
| 7                                  | 12,25 | 9,55  | 8,45  | 7,85  | 7,46  | 7,19  | 7,00  | 6,84  | 6,71  | 6,62  | 6,54  | 6,47  |
| 8                                  | 11,26 | 8,65  | 7,59  | 7,01  | 6,63  | 6,37  | 6,19  | 6,03  | 5,91  | 5,82  | 5,74  | 5,67  |
| 9                                  | 10,56 | 8,02  | 6,99  | 6,42  | 6,06  | 5,80  | 5,62  | 5,47  | 5,35  | 5,26  | 5,18  | 5,11  |
| 10                                 | 10,04 | 7,56  | 6,55  | 5,99  | 5,64  | 5,39  | 5,21  | 5,06  | 4,95  | 4,85  | 4,78  | 4,71  |
| 11                                 | 9,86  | 7,20  | 6,22  | 5,67  | 5,32  | 5,07  | 4,88  | 4,74  | 4,63  | 4,54  | 4,46  | 4,40  |
| 12                                 | 9,33  | 6,93  | 5,95  | 5,41  | 5,06  | 4,82  | 4,65  | 4,50  | 4,39  | 4,30  | 4,22  | 4,16  |
| 13                                 | 9,07  | 6,70  | 5,74  | 5,20  | 4,86  | 4,62  | 4,44  | 4,30  | 4,19  | 4,10  | 4,02  | 3,96  |
| 14                                 | 8,86  | 6,51  | 5,56  | 5,03  | 4,69  | 4,46  | 4,28  | 4,14  | 4,03  | 3,904 | 3,86  | 3,80  |
| 15                                 | 8,68  | 6,36  | 5,42  | 4,89  | 4,56  | 4,32  | 4,14  | 4,00  | 3,89  | 3,80  | 3,73  | 3,67  |
| Уровень значимости $\alpha = 0,01$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 1                                  | 161   | 200   | 216   | 225   | 230   | 234   | 237   | 239   | 241   | 242   | 243   | 244   |
| 2                                  | 18,51 | 19,00 | 19,6  | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,36 | 19,37 | 19,38 | 19,39 | 19,40 | 19,41 |
| 3                                  | 10,13 | 9,55  | 9,28  | 9,12  | 9,01  | 8,94  | 8,88  | 8,84  | 8,81  | 8,78  | 8,76  | 8,74  |
| 4                                  | 7,71  | 6,94  | 6,59  | 6,39  | 6,26  | 6,16  | 6,09  | 6,04  | 6,00  | 5,96  | 5,93  | 5,91  |
| 5                                  | 6,61  | 5,79  | 5,41  | 5,19  | 5,05  | 4,95  | 4,88  | 4,82  | 4,78  | 4,74  | 4,70  | 4,68  |
| 6                                  | 5,99  | 5,14  | 4,76  | 4,53  | 4,39  | 4,28  | 4,21  | 4,15  | 4,10  | 4,06  | 4,03  | 4,00  |
| 7                                  | 5,59  | 4,74  | 4,35  | 4,12  | 3,97  | 3,87  | 3,79  | 3,73  | 3,68  | 3,63  | 3,60  | 3,57  |
| 8                                  | 5,32  | 4,46  | 4,07  | 3,84  | 3,69  | 3,58  | 3,50  | 3,44  | 3,39  | 3,34  | 3,31  | 3,28  |
| 9                                  | 5,12  | 4,26  | 3,86  | 3,63  | 3,48  | 3,37  | 3,29  | 3,23  | 3,18  | 3,13  | 3,10  | 3,07  |
| 10                                 | 4,96  | 4,10  | 3,71  | 3,48  | 3,33  | 3,22  | 3,14  | 3,07  | 3,02  | 2,97  | 2,94  | 2,91  |
| 11                                 | 4,84  | 3,98  | 3,59  | 3,36  | 3,20  | 3,09  | 3,01  | 2,95  | 2,90  | 2,86  | 2,82  | 2,79  |
| 12                                 | 4,75  | 3,88  | 3,49  | 3,26  | 3,11  | 3,00  | 2,92  | 2,85  | 2,80  | 2,74  | 2,72  | 2,69  |
| 13                                 | 4,67  | 3,80  | 3,41  | 3,18  | 3,02  | 2,92  | 2,84  | 2,77  | 2,72  | 2,67  | 2,63  | 2,60  |
| 14                                 | 4,60  | 3,74  | 3,34  | 3,11  | 2,96  | 2,85  | 2,77  | 2,70  | 2,65  | 2,60  | 2,56  | 2,53  |
| 15                                 | 4,54  | 3,68  | 3,29  | 3,06  | 2,90  | 2,79  | 2,70  | 2,64  | 2,59  | 2,55  | 2,51  | 2,48  |