



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ  
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Технология вяжущих веществ, бетонов и  
строительной керамики»

## **Методические указания** к расчетной работе на тему

# **«Планирование и обработка результатов эксперимента»**

Автор  
Серебряная И.А.

Ростов-на-Дону, 2017

## Аннотация

Методические указания к расчетной работе на тему: «Планирование и обработка результатов эксперимента» для обучающихся по направлению подготовки 27.03.01 «Стандартизация и метрология», 27.04.02 «Управление качеством», 08.04.01 «Строительство».

В методических указаниях регламентируются содержание, порядок изложения и правила оформления расчетной работы. Содержатся образцы решения технологических задач с использованием математических методов и проведения анализа результатов расчета.

## Автор

К.Т.Н., доцент  
кафедры «ТВВБИСК»  
Серебряная И.А.





## Оглавление

<b>1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>4</b>
<b>2. СОДЕРЖАНИЕ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ.....</b>	<b>4</b>
<b>3. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАЗДЕЛОВ ПРОЕКТА .....</b>	<b>6</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....</b>	<b>16</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2 .....</b>	<b>17</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 3 .....</b>	<b>18</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 4 .....</b>	<b>22</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 5 .....</b>	<b>23</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 6 .....</b>	<b>24</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 7 .....</b>	<b>25</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 8 .....</b>	<b>26</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 9 .....</b>	<b>27</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 10 .....</b>	<b>28</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 11 .....</b>	<b>29</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>30</b>

## 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Цель расчетной работы (РР) – закрепление теоретических знаний и приобретение навыков в математическом планировании и статистической обработке результатов эксперимента.

РР предусматривает выполнение двух заданий:

- построение и анализ однофакторной зависимости прочности бетона от Ц/В – отношения по опытным данным;
- решение двухфакторной задачи методами математической теории планирования эксперимента.

## 2. СОДЕРЖАНИЕ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ

РР состоит из расчетно-пояснительной записки объемом 18 – 20 страниц, содержание которой указывается в индивидуальном порядке.

Оформление текстовой части РР должно соответствовать требованиям ГОСТ Р 21.1101-92 «Основные требования к рабочей документации и правилам ЕСКД».

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ**  
**ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
 (ДГТУ)

**Кафедра технологии вяжущих веществ, бетонов и строительной керамики**

**Задание к расчетной работе на тему:**  
**“Планирование и обработка результатов эксперимента”**  
 для студентов специальности .....

**Выдано: студенту гр.** \_\_\_\_\_

**Задача №1**

Условие задачи №1 дано в прил. 1,2. *Номер варианта указывает преподаватель.*

Построить математическую модель зависимости прочности бетона от цементно-водного отношения по опытным данным:

- вариант 1-12

Активность цемента $R_{ц}$ , МПа	Расход воды В, л/м <sup>3</sup>	Расход цемента Ц, кг/м <sup>3</sup> в опытах						Прочность бетона $R_b$ , МПа, в опытах						Дисперсия воспроизводимости ( $D_3$ )			
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6				
																	число опытов (m)

- вариант 13-26

Актив-ность цемента $R_{ц}$ , МПа	Ц/В – отношение в опытах							Прочность бетона $R_b$ , МПа, в опытах							Дисперсия воспроизводимости ( $D_3$ )		
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7			
																	число опытов (m)

**Задача №2**

Условие задачи №2 дано в прил. 3 – 9. *Номер варианта указывает преподаватель.*

### 3. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАЗДЕЛОВ ПРОЕКТА

#### Задача №1

#### *ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЧНОСТИ БЕТОНА*

1.1. Зависимость прочности бетона от Ц/В-отношения можно описать линейным уравнением (уравнение прямой линии) в виде обобщенной формулы (1.1) Баломея-Скрамтаева [1]:

$$R_b = A \times R_u \times (Ц / В + Б), \quad (1.1)$$

где  $R_b$  – прочность бетона в 28- суточном возрасте, МПа (зависимая переменная);

$R_u$  – активность цемента, МПа (величина определенная);

$A$  – эмпирический коэффициент, характеризующий качество заполнителей;

$Б$  – величина, отсекаемая прямой по оси Ц/В.

*Значение коэффициента Б для бетонов с Ц/В ≤ 2,5 можно принять равным -0,5, а для Ц/В > 2,5 – +0,5.*

*Значения коэффициента А для высококачественного, рядового и низкокачественного заполнителей при Ц/В ≤ 2,5 и Ц/В > 2,5 студенты находят самостоятельно.*

*Однако, используя опытные данные, значения коэффициентов А и Б на принятых материалах можно рассчитать более точно, пользуясь методами математической статистики.*

1.2. Уточнение значений коэффициентов А и Б производим по заданным опытным данным. Для решения этой задачи используем метод наименьших квадратов (МНК) [2]. С этой целью приводим уравнение (1.1) к виду:

$$y = b_0 + b_1 x \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) называется линейным уравнением регрессии, в котором  $b_0$  и  $b_1$  – коэффициенты регрессии,  $x$  – независимая переменная (фактор),  $y$  – зависимая переменная (отклик).

Для преобразования уравнения (1.1) выполняем следующие операции: раскрываем скобки, делим обе части уравнения на  $R_u$ :

$$\frac{R_b}{R_{\zeta}} = A * \zeta / B + AB$$

и вводим новые обозначения  $\frac{R_b}{R_{\zeta}} = y$ ;  $A = b_1$ ;  $AB = b_0$ ;  
 $\zeta / B = x$ .

Таким образом уравнение (1.1) приведено к виду (1.2).

1.3. Для вычисления коэффициентов  $b^0$  и  $b^1$  используется МНК [1,2], который основан на минимизации суммы квадратов отклонений опытных значений  $y_u$  от расчётных  $y_{расч}$  по всем заданным опытным точкам N:

$$\sum_{u=1}^N \Delta^2 = \sum_{u=1}^N (y_u - b_0 - b_1 x_u)^2 \rightarrow \min. \quad (1.3)$$

В результате дифференцирования выражения (3) по неизвестным  $b^0$  и  $b^1$  получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} Nb_0 + b_1 \sum x_u = \sum y_u ; \\ b_0 \sum x_u + b_1 \sum x_u^2 = \sum x_u y_u . \end{cases} \quad (1.4)$$

1.4. Вычисление значений  $\sum x_u$ ,  $\sum x_u^2$ ,  $\sum y_u$ ,  $\sum x_u y_u$  выполняется в табличной форме (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Вспомогательные вычисления.

Опыт	$x_u = \zeta / B$	$y_u = R_b / R_{\zeta}$	$x_u^2$	$x_u y_u$
1	1,6	1,57	2,66	0,912
...	...	...	...	...
N	2,4	0,98	5,76	2,352
$\sum$	11,05	3,28	21,04	6,34

Подставляем в систему уравнений (1.4) значения сумм из табл.1.1. Решаем эту систему относительно  $b^0$  и  $b^1$ . Значения  $b^0$  и  $b^1$  можно вычислить с помощью определителей (или другим способом).

Далее приводится расчет коэффициентов  $b^0$  и  $b^1$ .  
 Записываем уравнение (1.2) с полученными значениями коэффициентов регрессии:  $y = -0,29 + 0,59x_1$ .

Определяем уточнённые значения коэффициентов А и Б:

$A=b^1=0,59$ ;  $B=b^0/A=-0,49$  и получаем уравнение прочности (1.5):

$$R_b = 0,59 R_c (C/B - 0,49). \quad (1.5)$$

1.5. Проверку адекватности, то есть соответствия полученного уравнения опытным данным, производим по критерию Фишера [2, 3]:

$$F_{\text{экс.}} = D_{\text{на}} / D_{\text{э}}, \quad (1.6)$$

где  $D_{\text{на}}$  – дисперсия неадекватности,  
 $D_{\text{э}}$  – дисперсия эксперимента.

Дисперсия неадекватности  $D_{\text{на}}$  :

$$D_{\text{на}} = \frac{1}{(N - B)} * \sum (y_u - \hat{y}_u)^2, \quad (1.7)$$

где  $N$  – число опытов;  
 $B$  – число значимых коэффициентов в уравнении;  
 $y_u$  и  $\hat{y}_u$  – соответственно опытное и расчётное значения отклика в  $u$ -й точке.

Дисперсия эксперимента  $D_{\text{э}}$  [3] характеризует точность проведения опытов, иначе воспроизводимость результатов вычисляется по нескольким опытам, поставленным в одной и той же точке:

$$D_{\text{э}} = \frac{1}{(m - 1)} * \sum (y_i - \bar{y})^2, \quad (1.8)$$

## Планирование и обработка результатов эксперимента

где  $m$  – число повторяющихся (параллельных) опытов;

$\bar{y}$  – среднее значение по “ $m$ ” опытам;

$y_i$  – значение в  $i$ - м опыте.

*Значение  $D_s$  и число повторных опытов  $m$  определены в задании.*

Расчёт дисперсии неадекватности  $D_{на}$  производится в табличной форме (табл.1. 2), в качестве  $y$  принимается прочность бетона  $R_b, \text{МПа}$ .

Таблица 1.2

Вычисление дисперсии неадекватности.

Опыт	$R_b(y_u)$	$\hat{R}_b(\hat{y}_u)$	$(R_b - \hat{R}_b)^2$	$D_{на}$
1	35,8	36,2	0,16	по ф-ле (1.7)
...				
N	44,2	42,1	4,41	
			$\sum (R_b - \hat{R}_b)^2$	

Далее определяется табличное значение критерия Фишера ( $F_{табл.}$ ) при уровне значимости  $\alpha=0,05$  и числе степеней свободы числителя ( $f_1=N-B$ ) и знаменателя ( $f_2 = m-1$ ) (прил. 10).

После этого рассчитывается экспериментальное значение коэффициента Фишера  $F_{экс.}$  (формула (1.6)).

Если  $F_{экс.} < F_{табл.}$ , то уравнение считается адекватным и его можно использовать для получения расчётных значений прочности при любом заданном  $C/B$ .

Если  $F_{экс.} > F_{табл.}$ , то уравнение считается неадекватным и требует уточнения.

На рис. 1.1 показаны опытные значения  $R_b$  (из задания) и график линейной зависимости  $R_b = f(C/B)$  по уравнению (1.1).

Анализ полученного уравнения прочности с точки зрения технологии бетона показывает, что значение коэффициента  $B = -0,49$ , близкое к среднему значению ( $B = -0,5$ ), а коэффициент  $A=0,59$  указывает на то, что при испытании использованы рядовые материалы.

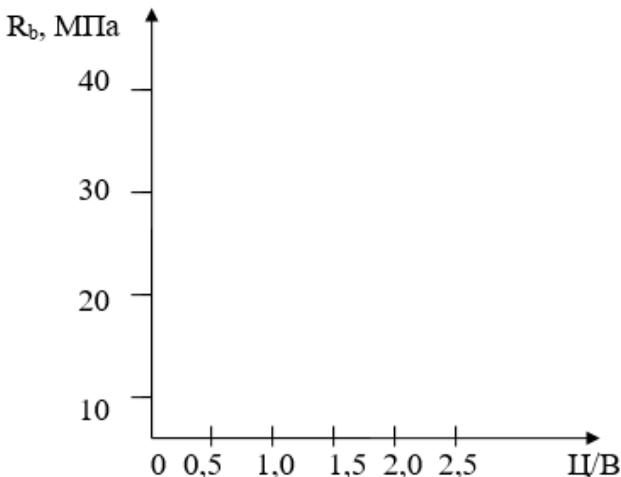


Рис. 1.1. Зависимость прочности бетона от Ц/В- отношения:

- – опытное значение  $R_b$ , МПа; — – график функции  $R_b = f(C/V)$ .

### Задача №2

#### *ПОСТРОЕНИЕ НЕПОЛНОЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОФАКТОРНОЙ ЗАДАЧИ*

2.1. Решение технологической задачи или обработка результатов измерений методами математической теории эксперимента состоит в построении математической модели, определяющей влияние факторов на отклик, с обязательным анализом полученной модели.

Неполная квадратическая модель имеет следующий вид:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^N b_i x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^N b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^N b_{ii} x_i^2 + \dots + \varepsilon.$$

Технологическая задача и матрица плана для ее решения определяются заданием. Условия задачи приведены в прил. 3-9.

2.2. Для построения модели полиномиального уравнения в соответствии с условиями задачи № ... используем план типа ПФЭ...

*Условия задачи представлены на титульном листе ПЗ.*

В табл. 2.1 представлены условия кодирования и варьирования факторов.

Таблица 2.1

Условия варьирования факторов

Наименование показателей	Условные обозначения	Факторы			
		$x^1$ , В/Ц	$x^2$	$x^3$	$x^4$
Минимальное значение	$X_{\min}$	0,35			
Максимальное значение	$X_{\max}$	0,55			
Интервал варьирования	$\Delta X$	0,1			
Основной уровень	$X_0$	0,45			

$$\Delta X = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2}$$

Интервал варьирования:

$$X_0 = \frac{X_{\max} + X_{\min}}{2}$$

Основной уровень:

Для выполнения эксперимента необходимо записать условия проведения опытов в натуральных значениях факторов, пользуясь зависимостью:

$$X_i = x_i \Delta X_i + X_{0i}, \quad (2.1)$$

где  $x_i$  – кодированное значение фактора;

$X_i$  – натуральное значение факторов;

$\Delta X_i$  – интервал варьирования;

$X_{0i}$  – основной уровень фактора.

В табл. 2.2 приведена матрица плана ДФЭ ... в натуральных и кодированных переменных.

Таблица 2.2

Условия проведения эксперимента и матрица плана

Опыт	План кодированных значений факторов				План в натуральных значениях факторов			Буквенное обозначение
	$x^1$	$x^2$	$x^3$	$x^4$				
1								
...								
N								

*Примечание. В некоторых задачах необходимо указать какое сочетание факторов принято за  $x_3, x_4, \dots$  (задачи №2; 7; 8).*

Матрица плана в кодированных переменных и результаты эксперимента (отклики) по прочности при сжатии, МПа, полученные в ходе проведения опытов по принятому плану представлены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Матрица плана и результаты экспериментов

Опыт	План кодирования				Значения отклика $y$
	$x^1$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	
1	+	+	+	+	5,39
...					
N					
Дисперсия воспроизводимости, $D^{\circ}$					0,09
Число степеней свободы, $f^{\circ} = m-1$					5
Уровень значимости, $\alpha$					0,05

2.3. Общий вид полиномиального уравнения типа ДФЭ ... для данной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}
 y = & b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{12}x_1x_2 + \\
 & + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + b_{34}x_3x_4 \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Для расчета коэффициентов уравнения регрессии используются следующие формулы:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^N Y_u}{N} ; \quad (2.3)$$

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N X_{iu} Y_u}{N} ; \quad (2.4)$$

$$b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^N X_{iu} X_{ju} Y_u}{N} , \quad (2.5)$$

где  $y_u$  – значение отклика в  $u$ -м опыте;

$x_{iu}$  – значение  $x_i$  в  $u$ -м опыте.

Вспомогательные расчёты для нахождения коэффициентов регрессии (2.2) представлены ниже (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Вспомогательные расчёты для нахождения коэффициентов регрессии

Опыт	Коэффициенты уравнения регрессии										
	$b^0$	$b^1$	$b^2$	$b^3$	$b^4$	$b^{12}$	$b^{13}$	$b^{14}$	$b^{23}$	$b^{24}$	$b^{34}$
1	5,39	5,39	5,39	5,39	5,39	5,39	5,39	5,39	5,39	5,39	5,39
...											
$\bar{N}$											
$\Sigma$											
$\Sigma / N$											

Уравнение прочности при сжатии с рассчитанными коэффициентами регрессии (табл. 2.4) имеет следующий вид:

$$R_{сж} = 5,95 - 0,75x_1 - 0,26x_2 - 0,17x_3 + 0,27x_4 - 0,45x_1x_2 + \dots (2.6)$$

## Планирование и обработка результатов эксперимента

Далее необходимо провести проверку значимости коэффициентов регрессии. Для этого применяем статистическую гипотезу, которая выглядит следующим образом [3]:  $H_0: b^i = 0; \quad H_1: b^i \neq 0$ .

Условие принятия нулевой гипотезы  $b^{расч} < b^{кр}$  – в этом случае коэффициент незначим и его можно исключить из уравнения без перерасчёта оставшихся коэффициентов.

Если  $b^{расч} > b^{кр}$ , то коэффициент уравнения остаётся без изменения.

$$b^{кр} = t \times \sqrt{\frac{D_3}{N}},$$

где  $D_3$  – дисперсия воспроизводимости,  
 $t$  – коэффициент Стьюдента, определяемый по прил. 11 в зависимости от заданных уровня значимости  $\alpha$  и числа степеней свободы  $f = m-1$ ;

$N$  – количество точек плана.

Незначимые коэффициенты исключаем из уравнения (2.6) и получаем математическую модель, описывающую изучаемую технологическую зависимость:

$$R_{сж} = 5,95 - 0,75x_1 - 0,26x_2 - 0,17x_3 + 0,27x_4 - 0,45x_1x_2 + \dots \quad (2.7)$$

2.4. Проверка адекватности модели проводится по критерию Фишера (см. п. 1.5 (задача №1)). Вычисления представляются в виде табл. 2.5.

Таблица 2.5

Вычисление дисперсии неадекватности

Опыт	$y_u$	$\hat{y}_u$	$(y_u - \hat{y}_u)^2$	$D_{на}$
1	5,39	4,76	0,397	по ф-ле (1.7)
...				
N	6,32	6,24	0,006	
			$\sum (y_u - \hat{y}_u)^2$	

## Планирование и обработка результатов эксперимента

Примечание.  $y$  – опытное значение отклика (по заданию);  
 $\hat{y}$  – расчётное значение отклика по формуле (2.6).

Полная проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии и адекватности полученной модели представлена в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Проверка значимости коэффициентов и адекватности модели

Показатели	Проверяемая модель, $R_{сж}$ , МПа
1. $D_э$	
2. $f_э = m - 1; \alpha$	
3. $b^{кр}$	
4. $f_{на} = N - B; \alpha$	
5. $D_{на}$	
6. $F_{экс.} = D_{на} / D_э$	
7. $K^{кр} (\alpha; f_{на}; f_э)$	
8. Адекватность модели	Адекватна

2.5. Если модель неадекватна, то ею пользоваться нельзя, анализ модели можно не проводить и следует принять решение об уточнении модели.

Если модель адекватна, то необходимо провести подробную интерпретацию полученной зависимости.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Исходные данные для построения зависимости  $R_b = A * R_u * (C / B + B)$

Вариант	R <sub>ц</sub> , МПа	B, л/м <sup>3</sup>	Расход цемента Ц, кг/м <sup>3</sup> , в опытах						Прочность бетона R <sub>b</sub> , МПа, в опытах						Дисперсия воспроизводимости (D <sub>э</sub> ) число опытов (m)
			1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
1	49	150	225	262	300	338	375	-	30,0	37,1	44,3	51,7	58,9	-	5,76 / 7
2	55	165	214	248	280	314	346	380	27,6	34,6	40,5	48,3	54,4	60,3	6,85 / 6
3	39	180	288	324	360	400	435	-	22,5	26,2	31,2	35,0	38,5	-	2,43 / 4
4	43	195	254	292	332	370	410	450	19,0	23,8	28,7	33,9	37,9	42,6	2,25 / 4
5	47	170	248	282	316	350	384	-	27,2	32,0	38,6	43,5	49,5	-	4,32 / 5
6	52	185	31	268	305	342	380	415	22,5	27,5	33,7	39,5	45,0	50,0	3,80 / 5
7	45	170	221	255	289	323	357	391	20,8	26,5	32,2	37,5	42,0	48,0	3,15 / 4
8	48	190	238	275	315	350	390	427	19,5	25,5	31,0	37,5	43,5	49,0	2,92 / 4
9	36	182	245	280	316	353	390	425	12,5	15,2	18,0	20,5	24,5	27,5	0,95 / 3
10	44	175	225	290	325	360	395	-	22,5	27,0	32,3	36,5	40,6	-	2,61 / 4
11	38	155	217	248	280	310	340	372	19,6	23,8	29,9	33,8	37,2	42,2	2,40 / 4
12	53	200	295	335	375	415	455	494	28,7	35,0	40,5	47,0	52,2	57,5	4,53 / 5

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Исходные данные для построения зависимости  $R_b = A * R_u * (C/B + B)$

Вариант	R <sub>u</sub> , МПа	Ц/В – отношение в опытах							Прочность бетона R <sub>b</sub> , МПа, в опытах							Дисперсия воспроизводимости (D <sub>э</sub> )
		1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	
		число опытов (m)														
13	38	1,5	1,65	1,8	1,95	2,10	2,25	2,40	17,5	21,0	23,8	25,6	28,5	31,0	33,8	2,40 / 5
14	42	1,5	1,65	1,8	1,95	2,10	2,25	2,40	22,3	25,9	29,5	31,6	35,0	38,2	41,5	2,62 / 3
15	44	1,5	1,65	1,8	1,95	2,10	2,25	2,40	24,1	28,0	32,3	35,5	39,0	42,8	46,1	2,75 / 4
16	48	1,5	1,65	1,8	1,95	2,10	2,25	2,40	27,6	31,8	36,2	40,0	44,0	49,1	52,6	5,76 / 5
17	52	1,5	1,65	1,8	1,95	2,10	2,25	2,40	31,2	35,0	40,0	43,2	50,0	54,0	58,5	5,93 / 3
18	36	1,5	1,65	1,8	1,95	2,10	2,25	2,40	16,5	19,5	21,0	24,0	26,5	28,2	31,5	2,32 / 4
19	55	1,5	1,65	1,8	1,95	2,10	2,25	2,40	30,5	35,0	40,5	45,8	50,0	54,6	60,0	6,05 / 5
20	43	1,5	1,65	1,8	1,95	2,10	2,25	2,40	22,8	26,0	29,8	33,0	35,8	40,0	43,0	3,86 / 4
21	39	1,5	1,65	1,8	1,95	2,10	2,25	2,40	17,5	20,0	22,8	26,5	28,6	31,5	34,0	2,43 / 3
22	56	1,5	1,65	1,8	1,95	2,10	2,25	2,40	36,0	40,0	45,5	51,0	55,4	61,0	65,6	6,56 / 4
23	54	1,5	1,65	1,8	1,95	2,10	2,25	2,40	30,0	34,5	39,5	45,2	50,0	55,0	58,3	5,89 / 2
24	35	1,5	1,65	1,8	1,95	2,10	2,25	2,40	18,0	21,0	23,8	26,1	29,0	31,5	34,5	2,04 / 3
25	55	1,5	1,65	1,8	1,95	2,10	2,25	2,40	31,0	35,0	40,3	45,8	50,0	55,3	59,5	6,05 / 4
26	46	1,5	1,65	1,8	1,95	2,10	2,25	2,40	26,0	30,0	35,0	37,5	41,8	45,0	49,5	5,32 / 5

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

### ЗАДАЧА №1

Изучить влияние цементно-водного отношения ( $C/V$ ) бетона марок М200-400 с осадкой конуса ОК = 3-5 см, активности цемента ( $R_c$ ), модуля крупности песка ( $M_{кр}$ ) и содержания отмучиваемых частиц ( $Q_{отм}$ ) в заполнителе на прочность при сжатии бетона в возрасте 28 суток нормального твердения.

Принять интервалы варьирования в диапазоне:

- цементно-водного отношения ( $C/V$ ) 1,4 – 2,6;
- активности цемента ( $R_c$ ) 38,8 – 51,8 МПа;
- модуля крупности песка ( $M_{кр}$ ) 1,4 - 3;
- содержание отмучиваемых частиц ( $Q_{отм}$ ) в заполнителе

1 – 5, %.

Выполнение эксперимента осуществлялось в соответствии с планом ПФЭ 2<sup>4</sup>.

Значения откликов представлены в прил. 4.

### ЗАДАЧА №2

Изучить влияние цементно-водного отношения ( $C/V$ ) бетона марок М200-400 с осадкой конуса ОК = 3-5 см, активности цемента ( $R_c$ ), модуля крупности песка ( $M_{кр}$ ) и содержания отмучиваемых частиц ( $Q_{отм}$ ) в заполнителе на прочность при сжатии бетона в возрасте 28 суток нормального твердения.

Принять интервалы варьирования в диапазоне:

- цементно-водного отношения ( $C/V$ ) 1,4 – 2,6;
- активности цемента ( $R_c$ ) 38,8 – 51,8 МПа;
- модуля крупности песка ( $M_{кр}$ ) 1,4 - 3;
- содержание отмучиваемых частиц ( $Q_{отм}$ ) в заполнителе,

1 – 5%.

Выполнение эксперимента осуществлялось в соответствии с планомДФЭ 2<sup>4-1</sup>.

Значения откликов представлены в прил. 5.

### ЗАДАЧА №3

Построить и проанализировать математическую модель зависимости отпускной прочности  $R_{отп}$  от цементно-водного отношения ( $C/V$ ), активности цемента ( $R_c$ ), и продолжительности тепловой обработки.

Принять интервалы варьирования в диапазоне:

- цементно-водного отношения ( $C/V$ ) 2,4 – 3,2;
- активности цемента ( $R_c$ ), МПа 57 – 68 МПа;

**ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИЛ.3**

- продолжительность тепловой обработки ( $\tau$ ), 9 – 16 ч.
- Выполнение эксперимента осуществляется в соответствии с планом ПФЭ 2<sup>3</sup>.
- Значения откликов представлены в прил. 6.

**ЗАДАЧА №4**

Построить и проанализировать математическую модель зависимости проектной прочности бетона в возрасте 28 суток  $R_6$  от цементно-водного отношения ( $\text{Ц/В}$ ), активности цемента ( $R_{\text{ц}}$ ), и продолжительности тепловой обработки.

Принять интервалы варьирования в диапазоне:

- цементно-водного отношения ( $\text{Ц/В}$ ) 2,4 – 3,2;
- активности цемента ( $R_{\text{ц}}$ ), МПа 57 – 68 МПа;
- продолжительность тепловой обработки ( $\tau$ ), 9 – 16 ч.;

Выполнение эксперимента осуществляется в соответствии с планом ПФЭ 2<sup>3</sup>.

Значения откликов представлены в прил. 6.

**ЗАДАЧА №5**

Построить и проанализировать математическую модель зависимости изменяющихся статей себестоимости  $S_{\text{т}}$  от цементно-водного отношения ( $\text{Ц/В}$ ), активности цемента ( $R_{\text{ц}}$ ), и продолжительности тепловой обработки.

Принять интервалы варьирования в диапазоне:

- цементно-водного отношения ( $\text{Ц/В}$ ) 2,4 – 3,2;
- активности цемента ( $R_{\text{ц}}$ ), МПа 57 – 68 МПа;
- продолжительность тепловой обработки ( $\tau$ ), 9 – 16 ч.;

Выполнение эксперимента осуществляется в соответствии с планом ПФЭ 2<sup>3</sup>.

Значения откликов представлены в прил. 6.

**ЗАДАЧА №6**

Для изучения показателей качества бетона на основе безусадочного портландцемента, а также с введением сульфоалюминатной расширяющей добавки (РД) был реализован математический план ПФЭ 2<sup>4</sup>.

В качестве факторов с соответствующими им интервалами варьирования приняты:

$X_1$  – В/Ц-отношение принятое из условия получения структуры с минимальной пористостью бетона класса В45,  $\text{В/Ц}=0,35 \div 0,55$ ;

**ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИЛ.3**

$X_2$  – содержание сульфоалюминатной расширяющей добавки, РД, % (по массе цемента) =  $0 \div 20$ ;

$X_3$  – содержание керамзитового гравия, К, % (от объема плотного заполнителя фр. 5-10 мм) =  $2 \div 34$ ;

$X_4$  – вид керамзитового гравия (т. е. его плотность и прочность):

тяжелый  $\div$  легкий.

В качестве откликов для решения поставленной задачи приняты:

$Y_1$  – прочность при сжатии образцов-кубов размером  $10 \times 10 \times 10$  см,  $R_{сж}$ , МПа;

$Y_2$  – призмная прочность при сжатии образцов-призм размером  $10 \times 10 \times 30$  см,  $R_{пр}$ , МПа;

$Y_3$  – прочность при изгибе образцов призм размером  $10 \times 10 \times 30$  см,  $R_f$ , МПа. Значения откликов представлены в прил. 7.

**ЗАДАЧА №7**

Построить математическую модель вспучиваемости массы ( $V$ , см<sup>3</sup>) при производстве ячеистого бетона от следующих технологических факторов с соответствующими им интервалами варьирования:

$X_1$  – содержание алюминиевой пудры, А1 =  $0,1 \div 0,22$  долей на 100 частей цемента;

$X_2$  – содержание молотого песка, П =  $135 \div 185$  долей на 100 частей цемента;

$X_3$  – содержание извести, И =  $1,3 \div 3,9$  долей на 100 частей цемента;

$X_4$  – температура воды,  $t = 30 \div 60^\circ\text{C}$ .

По априорной информации интерес представляют линейные эффекты и два парных взаимодействия, а именно  $X_1X_3$  и  $X_1X_4$ , отсальными взаимодействиями можно пренебречь. Для решения поставленной задачи используется план ДФЭ  $2^{5-2}$ . Значения откликов представлены в прил. 8.

**ЗАДАЧА №8**

Построить математическую модель прочности при сжатии, МПа, мочевиноформальдегидной смолы через 24 часа твердения при температуре от  $15$  до  $20^\circ\text{C}$ . В качестве факторов с соответствующими им интервалами варьирования приняты:

$X_1$  – содержание хлористого аммония, ХА =  $1 \div 2\%$  к весу смолы;

**ОКОНЧАНИЕ ПРИЛ.3**

$X_2$  – содержание уротропина,  $Y = 0,3 \div 0,7\%$  к весу смолы;

$X_3$  – содержание мочевины,  $M = 2 \div 4\%$  к весу смолы;

$X_4$  – содержание ортофосфорной кислоты,  $K_1 = 0,5 \div 1,5\%$  к весу смолы;

$X_5$  – содержание соляной кислоты,  $HCl = 1 \div 2\%$  к весу смолы;

$X_6$  – содержание серной кислоты,  $H_2SO_4 = 0,5 \div 1,5\%$  к весу смолы;

$X_7$  – содержание уксусной кислоты,  $K_2 = 0,5 \div 1,5\%$  к весу смолы.

По априорной информации интерес представляют линейные эффекты и два парных взаимодействия, а именно  $X_1X_3$  и  $X_1X_4$ , остальными взаимодействиями можно пренебречь. Для решения поставленной задачи используется план ДФЭ  $2^{5-2}$ .

В качестве отклика для решения поставленной задачи принята прочность при сжатии пенобетонных образцов-кубов ( $10 \times 10 \times 10$  см), МПа.

Значения откликов представлены в прил. 9

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

План ПФЭ 2<sup>4</sup>

Результаты опытов (значения откликов)

Опыт	Матрица плана (буквенное обозначение)	Задача 1		
		Вариант 1 R <sub>сж</sub> , МПа	Вариант 2 R <sub>сж</sub> , МПа	Вариант 3 R <sub>сж</sub> , МПа
1	a b c d	43,6	40,8	52,2
2	a b c	48,7	46,4	57,1
3	a b d	40,9	38,7	49,3
4	a b	44,4	42,1	52,8
5	a c d	32,2	28,8	40,2
6	a c	34,8	23,5	42,9
7	a d	30,5	28,09	38,8
8	a	32,3	30,5	39,9
9	b c d	21,1	18,8	29,5
10	b c	21,8	19,5	30,1
11	b d	19,6	17,0	27,9
12	b	20,3	18,2	28,7
13	c d	11,9	9,55	20,2
14	c	12,6	10,3	21,2
15	d	10,4	8,05	18,8
16	1	11,1	8,2	19,7
Дисперсия воспроизводимости D <sub>э</sub>		0,943	1,86	3,12
Число степеней свободы f <sub>э</sub>		3	3	2
Уровень значимости α		0,05	0,05	0,05

## ПРИЛОЖЕНИЕ 5

План ДФЭ 2<sup>4-1</sup>  
 Результаты опытов (значения откликов)

Опыт	Матрица плана (буквенное обозначение)	Задача 2		
		Вариант 1 R <sub>сж</sub> , МПа	Вариант 2 R <sub>сж</sub> , МПа	Вариант 3 R <sub>сж</sub> , МПа
1	a b c d	43,6	40,8	52,2
2	a b	44,4	42,1	52,8
3	a c	34,8	23,5	42,9
4	a d	30,4	28,1	38,8
5	b c	21,8	19,5	30,1
6	b d	19,6	17,0	27,9
7	c d	11,9	9,55	20,2
8	1	11,1	8,2	19,7
Дисперсия воспроизводимости D <sub>э</sub>		0,943	1,86	3,12
Число степеней свободы f <sub>э</sub>		3	3	2
Уровень значимости α		0,05	0,05	0,05

## ПРИЛОЖЕНИЕ 6

План ПФЭ 2<sup>3</sup>  
 Результаты опытов (значения откликов)

Опыт	Матрица плана (буквенное обозначение)	Задача 3								
		Вариант 1 R <sub>отп</sub> , МПа	Вариант 2 R <sub>отп</sub> , МПа	Вариант 3 R <sub>отп</sub> , МПа	Вариант 4 R <sub>сж</sub> <sup>28</sup> , МПа	Вариант 5 R <sub>сж</sub> <sup>28</sup> , МПа	Вариант 6 R <sub>сж</sub> <sup>28</sup> , МПа	Вариант 7 C <sub>t</sub> , руб/м <sup>3</sup>	Вариант 8 C <sub>t</sub> , руб/м <sup>3</sup>	Вариант 9 C <sub>t</sub> , руб/м <sup>3</sup>
1	a b c	59,1	46,07	60,9	76,5	61,8	79,8	40,69	54,8	37,44
2	a b	48,5	35,2	51,1	70,0	55,3	72,8	36,99	41,3	34,1
3	a c	50,0	36,9	54,8	67,5	52,8	70,8	38,29	4,6	35,01
4	a	41,5	28,6	44,3	61,1	46,3	64,25	34,59	38,9	31,3
5	b c	41,2	28,3	43,7	55,2	41,0	58,3	36,11	40,3	33,1
6	b	35,8	23,2	38,3	49,5	33,9	52,8	32,41	35,9	29,5
7	c	36,1	24,8	39,1	50,5	35,8	52,9	34,5	39,2	31,3
8	1	31,2	18,3	33,7	44,5	29,8	48,1	30,8	35,1	28,5
Дисперсия воспроизводимости D <sub>э</sub>		0,35	2,87	1,58	0,2	2,6	1,52	0,0004	0,08	0,03
Число степеней свободы f <sub>э</sub>		14	4	3	2	2	3	2	2	4
Уровень значимости α		0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,1	0,05	0,1	0,05

## ПРИЛОЖЕНИЕ 7

План ПФЭ 2<sup>4</sup>  
 Результаты опытов (значения откликов)

Опыт	Матрица плана (буквенное обозначение)	Задача 4								
		Вариант 1 R <sub>сж<sub>f</sub></sub> , МПа	Вариант 2 R <sub>сж<sub>f</sub></sub> , МПа	Вариант 3 R <sub>сж<sub>f</sub></sub> , МПа	Вариант 4 R <sub>пр<sub>f</sub></sub> , МПа	Вариант 5 R <sub>пр<sub>f</sub></sub> , МПа	Вариант 6 R <sub>пр<sub>f</sub></sub> , МПа	Вариант 7 R <sub>f<sub>f</sub></sub> , МПа	Вариант 8 R <sub>f<sub>f</sub></sub> , МПа	Вариант 9 R <sub>f<sub>f</sub></sub> , МПа
1	a b c d	49,88	52	48,1	42	35	45,8	5,39	3,69	8,3
2	c d	65,79	67,8	63,6	42	34,8	46,2	6,21	4,51	9,6
3	b	67,69	69,81	65,6	46,4	39,6	50,4	7,21	5,5	10,8
4	a	39,66	41,78	37,5	32,4	25,4	36,5	5,79	4,1	8,7
5	b d	72,9	75,02	70,7	48,4	41,4	52,8	7,07	5,4	9,96
6	a d	53,44	55,6	51,3	38,3	31,2	42,5	6,35	4,65	9,3
7	a b c	40,85	43,02	38,7	36,5	29,4	40,3	3,82	2,12	7,1
8	c	70,8	72,9	68,6	55,8	48,8	60,2	6,05	4,6	8,9
9	b c	67,7	69,82	55,5	48,73	41,7	52,9	6,05	4,2	7,8
10	a c d	44,41	46,5	42,21	36,22	29	40,2	5,61	3,9	8,5
11	a b d	55,34	57,5	53,14	46,1	38,8	50,8	4,51	2,8	7,6
12	d	70,97	73,1	70,8	53,3	46,4	57,8	7,42	5,68	10,28
13	b c d	68,3	70,4	66,1	45,9	39,2	49,6	7,24	5,42	10,3
14	a c	49,16	51,3	44,8	46,7	39,6	50,9	5,92	4,2	7,98
15	a b	39,9	42,1	37,7	30,4	22,8	35,4	4,26	2,6	7,2
16	1	62,85	65,1	60,7	47,2	39,9	51,2	6,32	4,6	9,43
Дисперсия воспроизводимости D <sub>э</sub>		2,45	0,01	1,87	0,25	3,12	2,5	0,09	0,02	0,01
Число степеней свободы f <sub>э</sub>		2	2	3	7	2	3	5	2	9
Уровень значимости α		0,05	0,1	0,05	0,1	0,05	0,02	0,05	0,1	0,1

## ПРИЛОЖЕНИЕ 8

План ДФЭ 2<sup>5-2</sup>  
 Результаты опытов (значения откликов)

Опыт	Матрица плана (буквенное обозначение)	Задача 2		
		Вариант 1 $V, \text{см}^3$	Вариант 2 $V, \text{см}^3$	Вариант 3 $V, \text{см}^3$
1	1	26	29,2	22,8
2	a b	52,5	55,7	49,7
3	c d	8,1	1,2	5,1
4	a c e	84,6	87,7	80,8
5	b c e	40,0	42,9	37,2
6	a d e	115,0	118,1	112,0
7	b d e	46,3	49,3	42,9
8	a b c d	29,1	32,2	26,1
Дисперсия воспроизводимости $D_3$		2,28	0,943	1,86
Число степеней свободы $f_3$		2	3	3
Уровень значимости $\alpha$		0,05	0,05	0,05

## ПРИЛОЖЕНИЕ 9

План ДФЭ 2<sup>7-4</sup>  
 Результаты опытов (значения откликов)

Опыт	Матрица плана (буквенное обозначение)	Задача 2		
		Вариант 1 R <sub>сж</sub> , МПа	Вариант 2 R <sub>сж</sub> , МПа	Вариант 3 R <sub>сж</sub> , МПа
1	1	66,1	70,9	59,9
2	a b c d	65,0	69,2	59,0
3	a b e f	45,2	49,3	39,1
4	a c f g	67,3	71,3	61,3
5	a d e g	56,1	59,7	50,7
6	b c e g	74,3	79,0	68,2
7	b d f g	53,0	57,1	47,7
8	c d e f	60,2	64,8	54,2
Дисперсия воспроизводимости D <sub>э</sub>		5,25	1,58	0,2
Число степеней свободы f <sub>э</sub>		2	3	2
Уровень значимости α		0,05	0,1	0,05

## ПРИЛОЖЕНИЕ 10

Значения F-критерия (Фишера)

( $f_1$  – число степеней свободы числителя;  $f_2$  – число степеней свободы знаменателя)

Уровень значимости $\alpha = 0,01$												
$f_2$	$f_1$											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,32	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,904	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
Уровень значимости $\alpha = 0,01$												
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,6	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,74	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48

## ПРИЛОЖЕНИЕ 11

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы $f$	$\alpha$ (двухсторонняя критическая область)					
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
$\infty$	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	<b>0,05</b>	<b>0,025</b>	<b>0,01</b>	<b>0,005</b>	<b>0,001</b>	<b>0,0005</b>
	<b><math>\alpha</math> (односторонняя критическая область)</b>					

## ЛИТЕРАТУРА

1. Питерская Э.Г. Математическое обеспечение технологических процессов: Учебное пособие. – Ростов-на-Дону: РГСУ, 1997. – 93 с.
2. Баженов Ю.М., Вознесенский В.А. Перспективы применения математических методов в технологии сборного железобетона. – М.: Стройиздат, 1974. – 191 с.
3. Гмурман В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2004. – 479 с.