ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Теплогазонабжение и вентиляция»

Практикум

по дисциплине

«Основы метрологии, стандартизации, сертификации и контроля качества»

для обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» профиля подготовки «Теплогазоснабжение и вентиляция»

Авторы
Скорик Т.А.,
Галкина Н.И.

Ростов-на-Дону, 2017

Аннотация

Практикум предназначен для бакалавров направления подготовки 08.03.01 «Строительство», профиль «Теплогазоснабжение и вентиляция».

По основным темам изучаемой дисциплины приводится краткая теоретическая часть, дающая определения основных понятий, основные формулы, пояснение к ним, методика решения и варианты условий задач. Имеются приложения с данными из нормативной и справочной литературы, необходимыми для решения задач.

Автор

к.т.н., доцент кафедры «ТиВ» Скорик Т.А.,
к.т.н., доцент кафедры «ТиВ» Галкина Н.И.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Измерение размера физической величины, то есть ее количественной характеристики, производится путем измерительного эксперимента и получения результата измерения в виде некоторого численного значения. Размер физической величины, относящийся к конкретному объекту, существует независимо от того, измеряем мы его или нет, т.е. объективен, а полученное нами численное значение – субъективно, поэтому между ними всегда существует некоторая разница, называемая погрешностью измерения. Математически при определении численного значения физической величины X погрешность измерения Δ_x записывается как разность между истинным (достоверным) значением Q_x и результатом измерения $X_{изм}$:

$$Q_x - X_{изм} = \Delta_x,\ [X] \qquad (1)$$

Причинами возникновения погрешности являются несовершенство метода и средства измерения, а также ошибка, возникающая при считывании результата оператором. Таким образом, при любом измерении имеется погрешность, представляющая собой отклонение результата измерения от действительного значения измеряемой величины.

Достоверное значение измеряемой величины, определенное в результате измерения, можно выявить наиболее точно только при значительном числе наблюдений. Можно сократить их количество, а, следовательно, и затраты на проведение измерений, применяя специальные методики, включающие статистический и вероятностный анализ. С их помощью оценивается случайная составляющая результата измерения. Однако есть и систематическая составляющая, значение и характер которой неизменны при пользовании одними и теми же средствами и методами измерений, т.е. при равноточных измерениях. Погрешности показывают, как результат измерения отличается от достоверной величины (рис.1) .

ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ И ЕЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

ИНСТРУМЕНТАЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ И ЕЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Рис.1. Структурная схема погрешностей измерения

Погрешности измерения подразделяются по следующим признакам:

1) по способу выражения: абсолютная, относительная и приведенная;

2) по характеру проявления: систематическая, случайная и грубая;

3) по способу получения численного значения при обработке результатов измерения: средние арифметические и среднеквадратичные.

Абсолютная (полная) погрешность определяется как разность между измеренным и действительным значениями физической величины:

$$\Delta_x = Q_x - X_{изм}\ ,\ [X] \qquad (2)$$

Относительная погрешность измерения представляет собой отношение абсолютной погрешности к измеренному значению физической величины:

$$\delta_x = \Delta_x / X_{изм} \cdot 100,\ \% \qquad (3)$$

Понятие относительной погрешности используется наряду с абсолютной и по ее значению судят о качестве измерения .

Приведенная погрешность определяется отношением абсолютной погрешности к некоторому нормативному значению измеряемой физической величины и может служить характеристикой качества средства измерения (раздел 3):

$$\gamma_x = \Delta_x / X_{Nизм} \cdot 100,\ \% \qquad (4)$$

Систематической постоянной погрешностью называют отклонение математического ожидания результата наблюдения M[x] от действительного значения физической величины . Эта погрешность детерминирована, т.е. строго обусловлена используемым методом измерения и применяемыми средствами измерений:

$$\Theta_x = M[X] - Q\ ,\ [X] \qquad (5)$$

Случайная погрешность представляет собой разность между результатом одиночного наблюдения xi и математическим ожиданием результата измерения M[x] :

$$\delta_x = xi - M[x],\ [X] \qquad (6)$$

Эта погрешность возникает при случайном одновременном воздействии многих факторов, причем в каждом из замеров эти факторы могут воздействовать или нет.

Таким образом, достоверное значение измеряемой физической величины определяется:

$$Q = M[X] - \Theta_x = xi - \delta_x - \Theta_x = xi - (\delta_x + \Theta_x) == xi - \Delta_x,\ [X] \qquad (7)$$

При этом следует учитывать, что значения погрешностей равновероятны как положительные, так и отрицательные и в формуле 7 используется алгебраическое суммирование.

Грубые погрешности представляют собой разновидность случайных погрешностей, существенно превышающих значения, оправданные объективными условиями измерения.

Общие положения теории погрешности измерений приводятся в рекомендациях МИ 2246-93(Государственная система обеспечения единства измерений. Погрешности измерений.) и заключаются в следующем:

1.1 Погрешность измерения – отклонение результата измерения от действительного значения измеряемой величины – может состоять из инструментальной погрешности, погрешности метода, погрешности оператора и др. погрешностей. Погрешность измерения и ее составляющие представлены на рисунке 1.

1.2 Погрешность измерения при воспроизведении единицы физической величины называют погрешностью воспроизведения единицы, а при передаче размера единицы физической величины называют погрешностью передачи размера единицы величины или погрешностью поверки (погрешностью аттестации).

1.3 Погрешности измерений подразделяют:

в зависимости от характера проявления на систематические, случайные;

в зависимости от характера их изменения в диапазоне измеряемой величины на аддитивные и мультипликативные;

по форме представления на абсолютные и относительные.

1.4 Погрешность измерения может быть выражена в виде:

доверительного интервала;

пределов погрешности;

комплекса характеристик распределения погрешностей (среднее квадратическое отклонение, разброс, среднее арифметическое и др. характеристики).

Задаваемые или допускаемые характеристики погрешностей измерений могут быть выражены в соответствии с требованиями, установленными в МИ 1317, в форме предела допускаемых значений характеристики; нижнего и верхнего пределов допускаемых значений характеристики.

1.5 Наибольший вклад в погрешность измерений, как правило, вносит инструментальная погрешность, обусловленная погрешностью применяемого средства измерений (далее – СИ). Инструментальная погрешность и ее составляющие приведены на рис.1.

1 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

С помощью прямых измерений можно определить значение искомой физической величины непосредственно по шкале измерительного прибора, градуированного в единицах измерения данной физической величины. Достоверное значение измеряемой физической величины или окончательный результат измерений определяется при обработке результатов многократно повторенных единичных измерений, называемых наблюдениями

$$x = x' \pm \Delta x,\ [x], \tag{8}$$

где x' – результат измерения;

Δx – погрешность измерения, полная (абсолютная);

[x] – единица измерения физической величины.

За результат измерения принимается среднее арифметическое результатов наблюдений

$$x' = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{9}$$

где n – число наблюдений;

x_i – результат наблюдения.

Полная (абсолютная) погрешность измерения определяется в виде суммы

$$\Delta x = \theta + \delta, \tag{10}$$

где θ – систематическая и δ – случайная погрешности соответственно.

К систематическим погрешностям могут быть отнесены погрешности, обусловленные средствами измерения: погрешность отсчета $\Delta_{ОТ}$ и погрешность градуировки $\Delta_{ГР}$. При отсутствии указаний в паспорте или на шкале прибора эти составляющие суммарной погрешности определяются в зависимости от цены деления шкалы прибора, вычисляемой по формуле

$$d = \frac{D}{n}, \qquad (11)$$

где D – диапазон измерения прибора, равный разности конечного и начального значений, указанных на шкале;
n – число делений шкалы.

Погрешность отсчета Δ_{OT} зависит от линейного размера делений шкалы, влияющего на точность считывания результата.

Если при снятии показания прибора результат считывается, округляясь до целых делений – $\Delta_{OT} = 0{,}5d$; если считываются половины делений – $\Delta_{OT} = 0{,}3d$; если считываются десятые доли делений – $\Delta_{OT} = 0{,}1d$.

Погрешность градуировки при отсутствии прочих данных принимается равной цене деления шкалы $\Delta_{ГР} = d$.

Погрешность разброса вычисляется в зависимости от числа наблюдений и является случайной составляющей суммарной погрешности. При увеличении числа наблюдений погрешность разброса снижается (таблица 1). Разброс (отклонение от среднего) находится по формуле

$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}). \qquad (12)$$

Таблица 1 – Погрешность разброса

n	2	3	4
Δr	3r	1,5r	r

Суммарная погрешность измерения с учетом систематической и случайной составляющей находится по формуле

$$\Delta x = \sqrt{\Delta_{OT}^2 + \Delta_{ГР}^2 + \Delta_r^2}\,. \qquad (13)$$

Численное значение погрешности следует округлять до одной значащей цифры (в сторону завышения, начиная с 3 в последующем разряде). Например, при вычислении получено 0,0132; после округления – 0,02. Допускается указывать две цифры: 0,5 между 1 и 2, т.е. 1,5.

Вычисленный по результатам наблюдений окончательный результат измерения приводится обязательно вместе с указанием погрешности. Данная методика обработки характеризует точность результата указанием абсолютной погрешности (в основном ее значностью), которую выражают в тех же единицах, что и саму измеряемую величину, например, длина равна L = (1,57 $\pm$ 0,04) м.

Численное значение результата измерения (среднее арифметическое) и его погрешность записываются так, чтобы их десятичные разряды совпадали.

Последние цифры среднего арифметического и погрешности должны принадлежать к одному и тому же десятичному разряду; причем, если значность среднего арифметического больше или меньше, чем у погрешности, необходимо либо округлить лишние цифры, либо поставить 0 вместо недостающих цифр в значащих разрядах соответственно.

Пример

Представить результат измерения напряжения вольтметром класса 0,5 с ценой деления 1 В, точность отсчета 0,1 деления.

U_1 =(54,6±0,5) В r_1= -0,2 $\Delta_{ОТ}$ =0,1 $\Delta_{ГР}$ =0,5

U_2=54,7 r_2 = -0,1

U_3 =54,8 r_3 = +0,0

U_4 =54,7 r_4 = -0,1

U_5=55,1 r_5 = +0,3

$\bar{U} = 54{,}8$ r = $\frac{1}{5}\sum_{1}^{5}|r_i| = 0{,}14$ $\Delta U = \sqrt{0{,}14^2 + 0{,}1^2 + 0{,}5^2}$ = 0,5287 = 0,5

U = (54,8±0,5) В

Задачи

1 Определить длину образца с помощью штангенциркуля с ценой деления 1 мм. Результаты наблюдений приведены в таблице 2.

Таблица 2

Последняя цифра шифра		
1	2	3
l_i	l_i	l_i
25,8 d=1мм 26,0 25,6 25,6 25,9	4,6 4,7 4,8 4,7 5,1	D=100мм 12,7 n=100 12,9 13,4 13,4 12,6

2 Измерить массу образца. Метрологические характеристики весов и результаты наблюдений приведены в таблице 3.

Таблица 3

Последняя цифра шифра		
4	6	8
m_i,г	m_i,мг	m_i,г
Класс 1 45,1 d=1г 45,7 45,8 45,6	d=1мг 63,5 Δom =0,5 63,5 63,5	D=100г 10,1 n=100 10,1 Точность 10,4 отсчета 0,1 10,3 деления 9,9

3 Измерить температуру в газоходе. Метрологические характеристики термометров и результаты наблюдений даны в таблице 4.

Таблица 4

Последняя цифра шифра			
5	7	9	0
Класс 0,5 8,6 d=0,1^{0}C 8,4 8,9 8,7 8,6	D=100^{0}C 38,2 n=100 38,9 40,3 40,1 40,0	Класс 1 20,4 d=0,1^{0}C 20,2 20,1 20,2 20,3	Точность 60,2 отсчета 0,2 60,8 деления 60,4 d=1^{0}C 60,6

2 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Косвенными называются измерения, при которых значение искомой физической величины определяется на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, которые находятся в результате прямых измерений. При косвенных измерениях замеряется не собственно определяемая величина, а другие величины, функционально с ней связанные.

Значение суммарной погрешности, указываемое в окончательном результате определяемой косвенными измерениями физической величины, также функционально связано со значениями погрешностей входящих в нее величин, измеряемых прямым способом. Вид функциональной зависимости погрешностей обусловливается функцией, связывающей основную и вспомогательные величины.

По способу выражения результатов различают абсолютную, относительную и приведенную погрешности (формулы 2,3,4).

Абсолютной называется погрешность, определяемая разностью действительного и измеренного значения физической величины . Она выражается в тех же единицах измерения, что и физическая величина.

Относительной называется погрешность, определяемая отношением абсолютной погрешности к значению измеряемой физической величины.

Приведенной называется погрешность, определяемая отношением абсолютной погрешности к нормативному значению измеряемой физической величины.

За нормативное значение могут приниматься, например, диапазон или цена деления шкалы или результат наблюдения.

Относительная и приведенная погрешности выражаются как в процентах, так и в долях единицы.

Обработка результатов косвенных измерений производится в следующем порядке:

1 – определяются абсолютные и относительные погрешности значений величин, измеренных прямым способом;

2 – определяется вид функциональной зависимости искомой и измеряемых величин;

3 – находится выражение для абсолютной и относительной погрешностей искомой величины в соответствии с конкретным видом функциональной зависимости (таблице 5);

4 – записывается окончательный результат косвенного измерения с учетом правил, изложенных в разделе 1.

В таблице 5 приведены формулы для определения абсолютной и относительной погрешностей результатов косвенных измерений в соответствии с основными функциональными зависимостями.

Таблица 5. – Определение погрешностей результата косвенных измерений

Вид функции	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
1. X=n·A	$n \cdot \Delta_A$	δ_A
2. $X = \frac{n}{A}$	$\frac{n}{A^2}\Delta A$	δ_A
3. X=A+B	$\Delta A + \Delta B$	$\frac{A\delta_A + B\delta_B}{A+B}$
4. X=AB	$A\Delta_B + B\Delta_A$	$\delta A + \Delta B$
5. $X = \frac{A}{B}$	$\frac{A\Delta_B + B\Delta_A}{B^2}$	$\delta A + \Delta B$
6. X=A^n	$nA^{(n-1)}\Delta A$	$n\delta_A$
7. X=A^B	-	$B(\delta_A + \delta_B)$
8. $X = \lg_A$	$\frac{\Delta A}{\lg A}$	-

Примечание. X – искомый результат косвенных измерений;

А, В – результаты прямых измерений входящих в функцию величин; Δ_A, Δ_B – абсолютные погрешности результатов прямых измерений; δ_A, δ_B – относительные погрешности результатов прямых измерений; n – числовой коэффициент.

При отсутствии в таблице 5 функции, связывающей результаты прямых и косвенных измерений, необходимо вычисления производить последовательно, используя функции, указанные в таблице 5.

Пример

Определить объем воздуха, удаляемый из помещения с 3-кратным воздухообменом и погрешности его измерения, если размеры помещения, определенные при помощи различных средств измерения, таковы:

длина *l* = (10,58±0,02) м, ширина *в* = (6,8±0,2) м, высота *h* = (3,0±0,1) м.

Решение

Так как объем удаляемого воздуха, м^3/ч

$$L = n \cdot V,$$

для определения абсолютной и относительной погрешностей его измерения необходимо последовательно использовать функции № 4 (таблица 5) (два раза) и № 1. Результаты вычислений удобно свести в таблицу 6.

Таблица 6 – Результаты расчета

Измеряемая величина	Погрешности	
	Абсолютная	Относительная
$A = l \cdot в, м^2$	$\Delta_A = l \cdot \Delta_B + в\Delta_l$	$\delta_A = \delta_l + \delta_B$
$V = A \cdot h, м^3$	$\Delta_V = A\Delta_h + h\Delta_A$	$\delta_V = \delta_A + \delta_n$
$L = n \cdot V, м^3 / ч$	$\Delta_L = 3 \cdot \Delta_V$	$\delta_l = \delta_V$

Окончательный результат измерения удаляемого объема воздуха

$L = (650 \pm 70)$, м^3/ч.

Задачи

Найти абсолютную и относительную погрешности и результат косвенного измерения физической величины, вид функции которой, а также погрешности и результаты прямых измерений входящих в нее величин приведены по вариантам в зависимости от последней цифры шифра (таблица 7).

Таблица 7. – Условия задач (по вариантам)

Наименование и вид функции	Последняя цифра шифра	Результаты наблюдений прямых измерений
Расход жидкости в трубопроводе Q=F·U, м^3/с	1	$F=(0.08\pm 0.01)\,\text{м}^2; U=(3.0\pm 0.1)\,\text{м/с}$
	3	$F=0.01\text{м}^2; \Delta F=0.001; \text{U}=(10.5\pm 0.2)\,\text{м/с}$
Площадь сечения воздуховода $F=\frac{\pi D^2}{4}$, м^2 или F=а·в, м^2	9	$D=(0.20\pm 0.01)\,\text{м}$
	2	а=0.5 м , в=0.3 м, Δа,в=0.01 м
Плотность воздуха ρ= $\frac{353}{T}$, кг/м^3	4	t=10 ^{o}C, Δt=1 ^{o}C
	6	T=(293±1) К
Динамическое давление в напорной сети $P_Д=P_П-P_С$, Па	5	$P_П$=306 Па; $P_С$=102 Па, Δр=1Па
	7	$P_П$=5.5 кг/м^2; $P_С$=10 кг/м^2 Цена деления микроманометра d=0.1 кг/м^2* *Единица измерения шкалы микроманометра кг/м^2 заменена в системе СИ на Па
Концентрация взвеси С= $\frac{G}{V}$, г/м^3	8	G=(100±1) мг, V=(200±10)м^3
	0	G=0.5 г; d=10 мг; V=1000 л; Δ_V=1.0 л

Примечание. Формулы для расчета погрешностей приведены в таблице 5.

3 ИСКЛЮЧЕНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Составляющие суммарной погрешности (3), определяемые действием факторов, постоянно или закономерно изменяющиеся в процессе измерения называются систематическими погрешностями измерения. Они остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же величины. Систематические погрешности делятся на группы:

– погрешности, причина и величина которых известна;
– погрешности известного происхождения, но известной величины;
– невыявленные систематические погрешности.

По характеру проявления систематические погрешности подразделяются на постоянные и переменные, включающие в себя прогрессивные, периодические и функциональные погрешности.

Способы исключения и учета систематических погрешностей делятся на четыре группы:

– устранение источников погрешностей до начала измерений;
– исключение погрешностей в процессе измерений;
– внесение известных поправок в результат измерений;
– определение границ неисключенной систематической погрешности.

Исключение погрешностей в процессе измерений осуществляется способами замещения, компенсации по знаку, противопоставления, симметричных наблюдений и их комбинированием.

Способ замещения используется при измерениях массы, электрических параметров, освещенности при помощи фотометра и пр. Он заключается в том, что измеряемый объект заменяется известной мерой, находящейся в тех же условиях, чем достигается устранение погрешности неравноплечести. Порядок проведения измерений следующий.

Например, при взвешивании на равноплечих весах по способу Борда искомая масса X уравновешивается навеской G, а при втором взвешивании навеска G – массой M_1 . В этом случае при неравенстве плеч весов l_1 и l_2 можно записать:

а) $X \cdot l_1 = G \cdot l_2 \qquad X \cdot l_1 = M \cdot l_1;$

б) $M \cdot l_1 = G \cdot l_2 \qquad X = M$

Таким образом, постоянная дополнительная погрешность неравноплечести полностью устраняется.

Способ противопоставления

Он заключается в том, что измерения проводят 2 раза, причем так, чтобы причина, вызывающая погрешность при первом измерении, оказала противоположное действие на результат второго. Этот способ позволяет определить действительное отношение плеч, например при взвешивании по методу Гаусса.

Искомая масса X уравновешивается массой M_1, тогда при неравенстве плеч $l_1 \neq l_2$,

$$X = \frac{l_2}{l_1} \cdot M_1 . \qquad (14)$$

Затем масса X помещается вместо массы M_1 и уравновешивается массой M_2, тогда

$$M_2 = \frac{l_2}{l_1} \cdot X . \qquad (15)$$

Таким образом, искомая масса и величина неравноплечести определяются делением выражения (9) на (10)

$$X = \sqrt{M_1 \cdot M_2}; \quad \frac{l_2}{l_1} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} . \qquad (16)$$

Если величина неравноплечести незначительна и M_1=M_2, то

$$X = 0{,}5(M_1 + M_2) \text{ X=0,5;} \qquad (17)$$

$$\frac{l_2}{1} = 1 + (M_2 + M_1) / 2M_1 , \qquad (18)$$

если $M_1 \approx M_2$, то $$x = \frac{M_1 + M_2}{2}; \qquad (19)$$

$$\frac{l_2}{l_1} = 1 + \frac{m_2 - m_1}{2m_1}. \qquad (20)$$

Способ симметричных наблюдений применяется для прогрессивной мультипликативной систематической погрешности, описываемой линейной функцией. Он заключается в том, что измерения проводятся последовательно через одинаковые интервалы времени. При обработке используется свойство результатов любых двух наблюдений быть симметричными относительно средней точки интервала наблюдений, заключающемся в том, что среднее значение прогрессивной погрешности результатов любой пары симметричных наблюдений равно погрешности, соответствующей средней точке интервала. При минимальном числе измерений, равном трем, и начальной погрешности, равной нулю, вычисления упрощаются. Число измерений может быть как четным, так и нечетным. Для нечетного числа опытов

$$\frac{\theta_1 + \theta_5}{2} = \frac{\theta_2 + \theta_4}{2} = \theta_3, \qquad (21)$$

для четного числа измерений

$$\frac{\theta_1 + \theta_6}{2} = \frac{\theta_2 + \theta_5}{2} = \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}. \qquad (22)$$

Пример. Известно, что при взвешивании по способу замещения имелась прогрессивно возрастающая неравноплечесть. Для определения искомой массы X производится четыре взвешивания:

– взвешиваемая масса X уравновешивается массой P, при этом на графике точке t_1 соответствует величина начальной погрешности θ_1

$$X = \left(\frac{l_2}{l_1} + \theta_1\right)P; \qquad (23)$$

– снимается масса X и на ее место для уравновешивания массы P помещается масса M_1 и это соответствует моменту времени t_2

$$M_1 = (\frac{l_2}{l_1} + \theta_2)P; \qquad (24)$$

– производится повторное уравновешивание в момент времени t_3 массой M_2

$$M_2 = (\frac{l_2}{l_1} + \theta_3)P; \qquad (25)$$

– на место массы M_2 помещается искомая масса X, но так как к моменту времени t_4 погрешность составила Θ_4 , необходимо либо к массе X, либо к массе P добавить дополнительную массу M

$$X \pm M = \left(\frac{l_2}{l_1} + \theta_4\right)P \qquad (26)$$

– среднее из результатов первого и четвертого взвешиваний

$$X \pm \frac{M}{2} = \left(\frac{l_2}{l_1} + \frac{\theta_1 + \theta_4}{2}\right)P. \qquad (27)$$

и аналогично для второго и третьего взвешиваний, а результат можно записать, исключая не только прогрессивную, но и начальную постоянную величины неравноплечести

$$\frac{m_1 + m_2}{2} = \left(\frac{l_2}{l_1} + \frac{\theta_2 + \theta_3}{2}\right)P; \qquad (28)$$

$$X + \frac{M}{2} = \frac{m_1 + m_2}{2}; \qquad (29)$$

$$X = \frac{M_1 + M_2 \pm M}{2}. \qquad (30)$$

Задачи

1 Найти массу образца и величину неравноплечести при взвешивании по способу противопоставления, если массы гирь

при первом и втором взвешивании составили: данные взять из таблицы 8.

Таблица 8

Последняя цифра шифра	Масса гирь, г		
	M	M_1	M_2
1	1,0	20,8	18,4
2	0,1	1,14	0,96

2 Определить сопротивление X, измеряемое при помощи равноплечего моста, если каждое из плеч r_2 и r_3 равно значению в табл. 9, а равновесие моста достигалось при сопротивлении r^1_1. После перемены местами X и I_1, равновесие достигалось при значении r''_1.

Таблица 9

Последняя цифра шифра	Сопротивление, Ом		
	r'_1	r''_1	$r_2=r_3$
3	1000,4	1000,2	1000
0	50,6	50,4	50

3 Определить массу образца и выразить графически систематическую погрешность серии из четырех взвешиваний. Данные для расчета приведены в таблице 10.

Таблица 10

Последняя цифра шифра	Масса гирь, г		
	M_1	M_2	M
4	100,0	110,5	-10,5
9	56,4	58,2	2,4

4 Определить, как изменится значение величины запыленности воздуха в помещении при выполнении трех измерений, если результат первого наблюдения составил C_1, время отбора пробы во всех опытах – 1 мин, а ротаметром поддерживался расход воздуха $V_н$ = 15 дм^3/мин с прогрессивной погрешностью, равной 2 дм^3/мин, которая в начальный момент отсутствовала. Результат C_1 дан в таблице 11.

Таблица 11

Последняя цифра шифра	5	6	7	8
Запыленность воздуха, мг/м^3	2,0	6,8	12,4	10,0

4 СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Случайная погрешность – это составляющая погрешности результата измерений, изменяющаяся случайным образом по знаку и значению в серии повторных равноточных измерений. Случайная погрешность является случайным событием, которое описывается теорией вероятностей.

Вероятность события определяется как отношение числа случаев проявления события к общему числу всех случаев:

$$P_A = \frac{m_A}{n}, \tag{31}$$

где P_A – вероятность наступления события А;
m_A – число случаев проявления события А;
n – число всех возможных случаев.

При многократных измерениях случайное событие (случайная погрешность, результат наблюдения) характеризуется частостью или относительной частотой, выражаемой в долях единицы или процентах.

Пример. Произведено 20 измерений одной и той же величины, при этом положительных погрешностей оказалось 6. Определить, как часто появляется положительная погрешность.

При m=6, n=20, p=0,33 или 33%.

Вероятность появления случайной погрешности в каком-либо интервале значений определяется по плотности распределения случайных величин. Плотность вероятности случайной величины определяется как площадь, заключенная под кривой распределения между ординатами, проведенными на границах заданного интервала. Вероятность погрешности в данном интервале равна отношению площади под кривой в этом интервале ко всей площади под кривой распределения.

Размерность плотности распределения вероятностей обратна размерности измеряемой величины, а сама вероятность – величина безразмерная. Площадь, заключенная между кривой функции распределения и осью абсцисс, равна единице.

Если функция плотности вероятности описывается по закону Гаусса, то такое распределение случайных величин называется нормальным

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e - \frac{(x_i - X)^2}{2\sigma^2};$$

$$P_\delta(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\delta^2 2\sigma_\delta^2}, \qquad (32)$$

где σ – среднее квадратическое отклонение;
x – математическое ожидание величины;
δ – случайная погрешность.

К основным параметрам распределения случайной величины относятся математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсия. Результаты наблюдений концентрируются вблизи истинного значения измеряемой величины, за оценку которого принимают координату центра тяжести фигуры, образованной осью абсцисс и кривой распределения и называемую математическим ожиданием результатов наблюдений, являющимся первым начальным моментом функции распределения.

Для непрерывной случайной величины

$$M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x_i P_x(x) dx. \qquad (33)$$

Для дискретной случайной величины

$$M[x] = \frac{\sum_1^n x_i P_i}{\sum_1^n P_i}. \qquad (34)$$

Второй центральный момент распределения называется дисперсией, которая является характеристикой рассеивания результатов наблюдений относительно математического ожидания.

$$D[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 P_\delta(\delta) d\delta. \qquad (35)$$

В механической интерпретации дисперсия является аналогом момента инерции фигуры (см. выше) относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести.

Математическое отклонение случайной величины вследствие компенсации положительных и отрицательных значений отклонений равно нулю. Поэтому принято рассматривать не сами отклонения, а их вторые степени, что не совсем удобно при характеристике рассеивания. Чаще используется положительное значение корня квадратного из значения дисперсии, называемое средним квадратическим отклонением результатов наблюдений либо случайных погрешностей

$$\sigma(x) = \pm\sqrt{D(x)}; \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}(x_i - X)^2}{n-1}}. \qquad (36)$$

Задача. В результате измерения осадочной запыленности получены данные привесов фильтров, приведенные в табл. 12. Определить параметры распределения и сравнить результаты для серий из 10 и 20 замеров.

Таблица 12

Фильтр	Масса пробы X_i, мг	Фильтр	Масса пробы X_i, мг
1	2	1	2
1.1	76,3	2.1	75,3
1.2	74,4	2.2	75,1
1.3	75,7	2.3	75,5
1.4	75,5	2.4	75,4
1.5	75,7	2.5	75,8
1.6	78,2	2.6	77,3
1.7	75,3	2.7	73,8
1.8	73,6	2.8	75,7
1.9	75,5	2.9	75,3
1.10	75,4	2.10	78,3

5 ИСКЛЮЧЕНИЕ ГРУБЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Грубые погрешности (промахи) являются разновидностью случайных погрешностей, но их величина существенно превышает средние значения случайных погрешностей, характерных для данного измерения.

Определение грубых погрешностей производится по критерию Граббаса t, зависящему от заданной P(x) и n (приложение), если надо решить, отбросить ли вызывающее сомнение значение x_r. Параметр t_r

$$t_r = \frac{\max|x_i - X|}{\sigma}. \qquad (37)$$

1) определяется нормируемое значение t;
так, при n = 10 и q = (1-p)100 = (1-0,95)100 = 5%
t = 2,228;
2) если $t<t_r$, x_r отбрасывают.

После отбрасывания x_r пересчитывают исправленные отклонения $V^{/}$ и определяют $\sigma^{/}$.

Задача

Для данных таблицы 12 произвести проверку на наличие грубых погрешностей и исключить их с последующим пересчетом параметров распределения и их графической интерпретацией.

6 ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ

Обработка результатов наблюдений и оценивание погрешностей результатов для прямых измерений с многократными независимыми наблюдениями регламентируется ГОСТ 8.207-76 «Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдения».

При статистической обработке группы результатов наблюдений следует выполнить следующие операции:

- исключить известные систематические погрешности из результатов наблюдений;
- вычислить среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений, принимаемое за результат измерения;
- вычислить оценку среднего квадратического отклонения результата наблюдения;
- вычислить оценку среднего квадратического отклонения результата измерения;
- проверить гипотезу о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению;
- вычислить доверительные границы случайной погрешности (случайной составляющей погрешности) результата измерения;
- вычислить границы неисключенной систематической погрешности (неисключенных остатков систематической погрешности) результата измерения;
- вычислить доверительные границы погрешности результата измерения.

Проверку гипотезы о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению, следует проводить с уровнем значимости q от 10 до 2 %. Конкретные значения уровней значимости должны быть указаны в конкретной методике выполнения измерений.

Для определения доверительных границ погрешности результата измерения доверительную вероятность Р принимают равной 0,95.

В тех случаях, когда измерение нельзя повторить, помимо границ, соответствующих доверительной вероятности Р= 0,95, допускается указывать границы для доверительной вероятности Р = 0,99.

Среднее квадратическое отклонение $S(\tilde{A})$ результата измерения оценивают по формуле

$$S(\tilde{A}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{A})^2}{n(n-1)}}, \qquad (38)$$

где x_i – i-й результат наблюдения;
A – результат измерения (среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений);
n – число результатов наблюдений;
$S(\tilde{A})$ – оценка среднего квадратического отклонения результата измерения.

7 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ СЛУЧАЙНОЙ ПОГРЕШНОСТИ

Доверительные границы случайной погрешности результата измерения в соответствии с настоящим стандартом устанавливают для результатов наблюдений, принадлежащих нормальному распределению.

При числе результатов наблюдений n>50 для проверки принадлежности их к нормальному распределению по ГОСТ 11006-74 предпочтительным является, например, один из критериев: χ^2 Пирсона.

При числе результатов наблюдений 50>n>15 для проверки принадлежности их к нормальному распределению предпочтительным является составной критерий, приведенный в справочном приложении 1.

Доверительные границы ε (без учета знака) случайной погрешности результата измерения находят по формуле

$$\varepsilon = t \times S(A), \tag{39}$$

где t – коэффициент Стьюдента, который в зависимости от доверительной вероятности Р и числа результатов наблюдений n находят по таблице справочного приложения А.

8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ

Неисключенная систематическая погрешность результата образуется из составляющих, в качестве которых могут быть неисключенные систематические погрешности:

- метода;
- средств измерений;
- вызванные другими источниками.

В качестве границ составляющих неисключенной систематической погрешности принимают, например, пределы допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений, если случайные составляющие погрешности пренебрежимо малы.

При суммировании составляющих неисключенной систематической погрешности результата измерения неисключенные систематические погрешности средств измерений каждого типа и погрешности поправок рассматривают как случайные величины. При отсутствии данных о виде распределения случайных величин их распределения принимают за равномерные.

Границы неисключенной систематической погрешности Θ результата измерения вычисляют путем построения композиции неисключенных систематических погрешностей средств измерений, метода и погрешностей, вызванных другими источниками.

При равномерном распределении неисключенных систематических погрешностей эти границы (без учета знака) можно вычислить по формуле

$$\Theta = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Theta_i^2}\,, \qquad (40)$$

где Θ – граница i-й неисключенной систематической погрешности;

k – коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью. Коэффициент *k* принимают равным 1,1 при доверительной вероятности P=0,95.

При доверительной вероятности P=0,99 коэффициент к принимают равным 1,4, если число суммируемых неисключенных систематических погрешностей более четырех (m>4). Если же число суммируемых погрешностей равно четырем или менее четырех (m <4), то коэффициент *k* определяют по графику зависимости

(рисунок)

$$k=f(m,l), \qquad (41)$$

где m — число суммируемых погрешностей;

$l=\dfrac{\Theta_1}{\Theta_2}$; кривая 1 — m=2; кривая 2 — m=3; кривая 3 — m=4.

При трех или четырех слагаемых в качестве Θ принимают составляющую, по числовому значению наиболее отличающуюся от других, в качестве Θ_2 следует принять ближайшую к Θ_1 составляющую.

Доверительную вероятность для вычисления границ неисключенной систематической погрешности принимают той же, что при вычислении доверительных границ случайной погрешности результата измерения.

График зависимости k=f(m,l) приведен на рисунке 2.

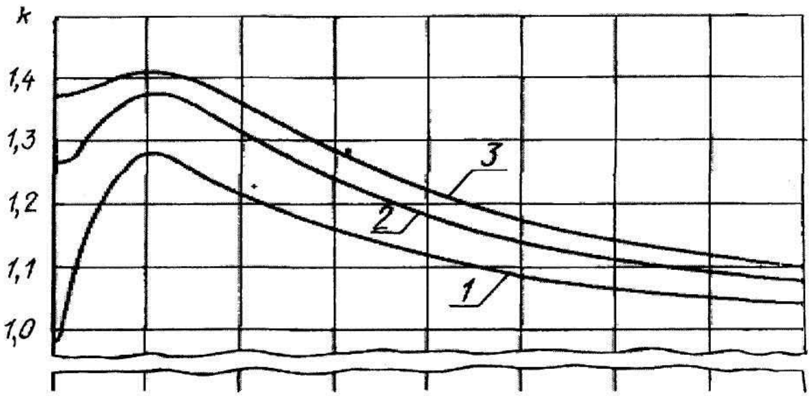

Рис.2. Значения параметра k

В случае, если $\dfrac{\Theta}{S(A)} < 0{,}8$, то неисключенными систематическими погрешностями по сравнению со случайными пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата $\Delta = \varepsilon$. Если $\frac{\Theta}{S(A)} > 8{,}0$, то случайной погрешностью по сравнению с систематическими пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата $\Delta = \Theta$.

Примечание. Погрешность, возникающая из-за пренебрежения одной из составляющих погрешности результата измерения при выполнении указанных неравенств, не превышает 15%.

В случае, если неравенство не выполняется, границу погрешности результата измерения находят путем построения композиции распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей, рассматриваемых как случайные величины. в соответствии с формулой (35)

Если доверительные границы случайных погрешностей найдены в соответствии с вышеописанной методикой, допускается границы погрешности результата измерения Δ (без учета знака) вычислить по формуле

$$\Delta = K \times S_{\Sigma}, \tag{42}$$

где K – коэффициент, зависящий от соотношения случайной и неисключенной систематической погрешностей;
S_{Σ} – оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения.

Оценку суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения вычисляют по формуле

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\Theta_i^2}{3} + S^2(A)}. \tag{43}$$

Коэффициент К вычисляют по эмпирической формуле

$$K = \frac{\varepsilon + \Theta}{S(A) + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\Theta_i^2}{3}}}. \tag{44}$$

Задача

Для данных, приведенных в таблице 12 произвести анализ результатов измерения по нормативным указаниям ГОСТ 8.207-76 «Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюде- ния».

9 ПРИМЕРЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В СИСТЕМАХ ТГВ

Основные принципы обработки результатов измерений не зависят от физической природы измеряемых величин. Теория погрешностей учитывает характерные особенности поведения физических величин и их проявления при измерениях, что должно учитываться и при измерениях в системах ТГВ.

Задача 9.1.

При измерении температуры установлено, что массив результатов измерений можно считать случайными величинами с нормальным законом распределения, имеющим следующие параметры:

- Математическое ожидание – m_t ;
- Среднеквадратичное отклонение – σ_1 ;

Вычислить вероятность выполнения неравенства $t_1 \le t \le t_2$.

Таблица 13. – Исходные данные к задаче 9.1.

№ варианта	Математическое ожидание $\mathbf{m_t}$	Среднеквадратичное отклонение σ_1, °C	t_1 , °C	t_2 , °C
1	27,1	0,9	26,25	27,65
2	26,75	0,9	26,3	27,2
3	26,35	0,5	25,9	26,8
4	27,45	0,4	27,1	27,8
5	27,0	0,9	26,1	27,9
6	27,15	0,8	26,3	28
7	26,5	0,9	25,6	27,4
8	27,65	0,85	26,8	28,5
9	27,45	0,75	26,7	28,2
10	27,1	0,7	26,4	27,8

Задача 9.2.

Результаты измерений давления p (МПа) являются случайными величинами, подчиненными закону равномерного распределения и находятся в пределах $p_1 \le p \le p_2$.

Найти математическое ожидание m_p и дисперсию σ^2_p для измеренных величин давления.

Таблица 14. – Исходные данные к задаче 9.2.

№ варианта	p_1, МПа	p_2, МПа
1	1,4	1,5
2	1,44	1,51
3	1,39	1,48
4	1,42	1,49
5	1,45	1,54
6	1,32	1,45
7	1,5	1,65
8	1,4	1,6
9	1,37	1,47
10	1,54	1,7

Задача 9.3.

Термометр имеет шкалу t_{min} , °С и t_{max} ,°С и класс точности С,

Определить Δt – значение граничной абсолютной погрешности термометра.

Таблица 15. – Исходные данные к задаче 9.3.

№ варианта	t_{min} , °С	t_{max} ,°С	Класс точности, С
1	0	60	0,6
2	0	100	0,5
3	0	80	0,55
4	0	120	0,7
5	0	50	0,4
6	0	60	0,4
7	0	90	0,6
8	0	150	0,8
9	0	120	0,5
10	0	70	0,4

Задача 9.4.

Определить класс точности манометра, рабочий диапазон которого от p_{min}, МПа до p_{max} , МПа и граничная погрешность Δр, МПа,

Таблица 16. – Исходные данные к задаче 9.4.

№ варианта	p_{min}, МПа	P_{max}, МПа	Δр, МПа
1	0,05	2,5	0,035
2	0,04	2,54	0,035
3	0,045	2,61	0,028
4	0,06	2,75	0,025
5	0,055	2,48	0,038
6	0,048	2,5	0,04
7	0,043	2,65	0,032
8	0,054	2,7	0,044
9	0,057	2,69	0,033
10	0,065	2,8	0,045

Задача 9.5.

Измерение разности давления осуществляется при помощи двух манометров класса точности С. Диапазоны измерений манометров Δр, МПа.

Найти минимальную разность давлений, которую можно измерить данными манометрами с точностью %.

Таблица 17. – Исходные данные к задаче 9.5.

№ варианта	Класс точности, С	Диапазоны показаний манометров Δр, МПа	Точность, %
1	0,6	1,8	4
2	0,5	1,7	3
3	0,55	1,65	4,5
4	0,7	1,74	2,8
5	0,4	1,82	2,5
6	0,4	1,77	3,5
7	0,6	1,68	3,8
8	0,8	1,8	4,2
9	0,5	1,7	4
10	0,4	1,6	3

Задача 9.6.

Вычислить относительную погрешность *р* измеренного давления Р, МПа манометром класса точности С, с диапазоном показаний Δ*р,* МПа.

Таблица 18. – Исходные данные к задаче 9.6.

№ варианта	Измеренное давление p, МПа	Класс точности, С	Диапазоны показаний манометров Δp, МПа
1	0,55	0,6	1,8
2	0,65	0,5	2,3
3	0,45	0,55	2
4	0,58	0,7	2,1
5	0,67	0,4	1,82
6	0,49	0,4	1,77
7	0,5	0,6	2,4
8	0,6	0,8	1,8
9	0,62	0,5	2,35
10	0,4	0,6	2,4

Задача 9.7.

Количество теплоты, отводимое от теплообменного аппарата, может быть определенно на основе косвенных измерений по формуле

$$Q = Gc\,(t_1 - t_2),$$

где G – расход рабочего тела (кг/с);
t_1 и t_2 – температура рабочего тела на выходе и входе теплообменного аппарата;
c – удельная теплоемкость рабочего тела (Дж/кг), является заданной характеристикой.

Величины G, t_1, t_2 – определяются путем прямых измерений расхода и температуры при среднеквадратичном отклонении погрешностей измерения σ_G, кг/с, $\sigma_{t1} = \sigma_{t2}$, С.

Вычислить σ_Q – среднеквадратичное отклонение погрешности измерения Q при c = $4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/кг ·°С, G, кг/с, t_1, °С, t_2, °С.

Таблица 19. – Исходные данные к задаче 9.7.

№ варианта	Расход рабочего тела G, кг/с	Температура рабочего тела на выходе из теплообменного аппарата t_1,°C	Температура рабочего тела на входе в теплообменный аппарата t_2,°C	Среднеквадратичное отклонение погрешностей измерения	
				σ_G, кг/с	σ_{t1}, σ_{t2}, °C
1	50	25	8	0,5	0,52
2	52	24	9	0,45	0,5
3	48	26	7	0,55	0,49
4	54	23	10	0,48	0,48
5	46	27	6	0,5	0,55
6	56	22	9	0,53	0,45
7	44	27	8	0,44	0,54
8	50	25	7	0,52	0,47
9	49	26	8,5	0,5	0,51
10	53	24	7,5	0,49	0,46

Задача 9.8.

Температура t°C может быть оценена с помощью косвенного измерения на основе формулы, выражающей зависимость величины термосопротивления меди от температуры в виде

$$R_t = R_0\,(1+\alpha t),$$

где α – температурный коэффициент сопротивления меди

R_t, R_0 – величина термосопротивления при 0°С и при t°С соответственно.

Сопротивление R_t определяется по формуле

$$R_t = \frac{U}{I} R_л$$

где $R_л$ – сопротивление подводящих проводников,

U – падение напряжения,

I – сила тока.

Величины U и I, измеряемые вольтметром и амперметром, являются результатом прямых измерений с погрешностями Δ_U , В, Δ_I, А.

Вычислить погрешность измерения температуры Δ_t при U В, I,А, $\alpha = 4{,}26 \cdot 10^{-3}$ (°С)$^{-1}$, значения погрешностей $R_л$, R_0 считаем ничтожно малыми.

Таблица 20. – Исходные данные к задаче 9.8.

№ варианта	Падение напряжения U, В	Сила тока, I, А	Погрешности измерения	
			Δ_U , В	Δ_I, А
1	10	0,63	0,01	0,01
2	15	0,65	0,0095	0,015
3	8	0,63	0,009	0,01
4	10	0,58	0,01	0,0095
5	12	0,65	0,0088	0,0093
6	15	0,62	0,0078	0,018
7	10	0,57	0,015	0,01
8	7	0,63	0,095	0,015
9	11	0,59	0,01	0,0092
10	10	0,65	0,0095	0,01

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Значение коэффициента t_r для случайной величины Y , имеющей распределение Стьюдента с n-1 степенями свободы

n^{-1}	P=0,95	P=0,99	n^{-1}	P=0,95	P=0,99
3	3,182	5,841	16	2,120	2,921
4	2,776	4,604	18	2,101	2,878
5	2,571	4,032	20	2,086	2,845
6	2,447	3,707	22	2,074	2,819
7	2,365	2,998	24	2,064	2,797
8	2,306	3,355	26	2,056	2,779
9	2,262	3,250	28	2,048	2,763
10	2,228	3,169	30	2,043	2,750
12	2,179	3,055	∞	1,960	2,576
14	2,145	2,977			

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Интегральная функция вероятности нормального распределения

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0,0	0,50000	1,4	0,91924	2,8	0,99744
0,1	0,53983	1,5	0,93319	2,9	0,99813
0,2	0,57926	1,6	0,94520	3,0	0,99865
0,3	0,61791	1,7	0,95543	3,1	0,99903
0,4	0,65542	1,8	0,96407	3,2	0,99931
0,5	0,69146	1,9	0,97128	3,3	0,99952
0,6	0,72575	2,0	0,97725	3,4	0,99966
0,7	0,75804	2,1	0,98214	3,5	0,99977
0,8	0,78814	2,2	0,98610	3,6	0,99984
0,9	0,81594	2,3	0,98928	3,7	0,99989
1,0	0,84134	2,4	0,99180	3,8	0,99993
1,1	0,86433	2,5	0,99379	3,9	0,99995
1,2	0,88493	2,6	0,99534	4,0	0,99997
1,3	0,90320	2,7	0,99653	4,1	0,99998