ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Высшая геодезия и фотограмметрия»

Практикум
по дисциплине

«Высшая геодезия»

для обучающихся по направлению подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование», профиль «Геодезия»

Авторы
Гермак О.В.,
Гугуева О.А.

Ростов-на-Дону, 2017

Аннотация

Методические указания предназначены для обучающихся по направлению подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование», профиль «Геодезия».

Даны задания к лабораторным работам, разработаны варианты и подробно пояснено выполнение всех этапов работ, приведены примеры.

Авторы

ассистент кафедры «ВГиФ»
Гермак О.В.,

ассистент кафедры «ВГиФ»
Гугуева О.А.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Для того чтобы при создании геодезической сети можно было вычислить на плоскости координаты всех вновь определяемых пунктов, должны быть известны координаты исходного пункта, длина и азимут исходной стороны, а также необходимое число измеренных углов или длин сторон треугольников (в каждом треугольнике по два угла или по две стороны) – *свободная сеть*. В этом случае координаты пунктов определяются однозначно, но бесконтрольно, подчас с большими ошибками. При этом не будет возможности ни выявить, ни устранить эти ошибки, а также оценить точность тех или иных элементов сети. Для устранения этих недостатков и повышения точности построения сети, в ней выполняют в достаточно большом объеме так называемые избыточные измерения горизонтальных углов, длин сторон, азимутов сторон и т. п. – *несвободная сеть*.

При вставке сети более низкого класса в сеть более высокого класса кроме избыточно измеренных углов, длин сторон и т.п. появляются еще и избыточные исходные данные, не подлежащие изменениям при уравнивании вставляемой сети. К ним относятся координаты пунктов, длины и дирекционные углы сторон сети более высокого класса.

При наличии в геодезической сети как избыточно измеренных величин, так и избыточных исходных данных возникает необходимость уравнивания сети за возникающие в ней геометрические условия. Геодезические сети уравнивают обычно по методу наименьших квадратов, считая при этом, что:

1) все измеренные в сети величины (направления, азимуты, длины сторон и т.п.) являются независимыми;

2) в результатах измерений отсутствуют систематические ошибки;

3) случайные ошибки измерений подчиняются закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным нулю.

Невязки устраняют в процессе уравнивания путем введения в измеренные величины поправок v, удовлетворяющих условию $[v^2] = \min$ – для равноточных измерений – и $[pv^2] = \min$ – для неравноточных измерений.

Для уравнивания геодезических сетей наиболее широко применяют коррелатный и параметрический способы. Сети с большим числом исходных пунктов и сторон целесообразно уравнивать на ЭВМ параметрическим способом. Этим способом проще и выгоднее уравнивать обратные засечки, сети трилатерации, линейно-угловые и комбинированные сети.

1. УКАЗАНИЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

1.1. Порядок выполнения

1) получение задания (*выдается преподавателем*):
   – схема уравниваемой сети;
   – результаты полевых измерений.
2) изучение нормативной и учебной литературы;
3) выполнение вычислений.

1.2. Уравнивание свободной триангуляции коррелатным способом

Общие сведения по уравниванию триангуляции

При уравнивании небольших и несложных сетей часто применяют коррелатный способ.

Для того чтобы можно было вычислить на плоскости прямоугольные координаты всех пунктов геодезической сети, необходимо в качестве исходных иметь как минимум четыре элемента: координаты одного пункта (x, y), а также длину и дирекционный угол исходной стороны (s и α) или, что все равно, координаты двух пунктов на концах исходной стороны. Геодезическая сеть, в которой заданы координаты только двух пунктов, находящихся на концах исходной стороны, называется свободной; сеть, в которой кроме двух исходных пунктов имеются и другие пункты с заданными (твердыми) координатами, называется несвободной.

Триангуляционные сети уравнивают как по направлениям, так и по углам. С точки зрения принципа наименьших квадратов из уравнивания следует определять поправки к непосредственно измеренным величинам. Так как в триангуляции измеряются направления, то триангуляционные сети следует уравнивать по направлениям, Однако на практике нередко вместо направлений уравнивают углы, которые находятся как разности направлений и поэтому являются величинами зависимыми. В процессе уравнительных вычислений эта зависимость не учитывается, вследствие чего возникают некоторые искажения уравненных элементов сети и особенно результатов оценки точности.

При уравнивании геодезических сетей коррелатным способом существенное значение имеет правильное определение числа и вида независимых условных уравнений. Не должно быть ни пропущенных независимых условных уравнений, ни избыточных сверх необходимого числа их. При включении избыточного, т. е.

зависимого условного, уравнения, являющегося линейной комбинацией независимых условных уравнений, будет – получена неразрушимая система нормальных уравнений, определитель которой равен нулю. С другой стороны, если какое-либо условное уравнение будет пропущено, то цель уравнивания не будет достигнута, так как соответствующая данному условию невязка не будет устранена. Поэтому правильный выбор независимых условных уравнений в геодезической сети и безошибочное определение их числа, в том числе но видам, имеет принципиальное значение.

Число и виды независимых условных уравнений

В свободной сети триангуляции с одной исходной стороной и ее азимутом могут возникать следующие виды условных уравнений: фигур, горизонта — при уравнивании углов, а не направлений, полюсные и проекций. Условия проекций появляются в том случае, когда длинные диагонали соединяют пункты, разделенные рядом треугольников, не имеющих общей вершины. Такие построения с длинными диагоналями в настоящее время не применяются в геодезическом производстве. Поэтому условия проекций рассматриваться в дальнейшем не будут.

Если в свободной сети есть дополнительно измеренные стороны и азимуты, кроме исходных, то в такой сети появятся еще условия базисные и дирекционных углов (азимутальные).

Общее число независимых условных уравнений в геодезической сети равно числу избыточно измеренных в ней величин: направлений (углов), азимутов (дирекционных углов) и длин сторон. Число избыточно измеренных величин определяется как разность числа всех измеренных величин и числа необходимых для ее построения измеренных величин. Имея это в виду, приведем сводку формул для определения числа и вида независимых уравнений, возникающих в свободной триангуляции для случая измерения и уравнивания направлений:

$$S_H = D^*-(2k+t); \quad f=D-t-p+1; \quad c=p-2n+3 \qquad (1)$$
$$r_б=k_б-1; \qquad r_Д=k_Д-1,$$

где $D^*=D+k_s+k_\alpha$

При уравнивании сети по углам число независимых условных уравнений определяется по формулам:

$Sy=N^*-2k; \quad f=N-p-q+1;$ (2)

$$q=N+t-D;$$
$$c=p-2n+3; \quad r_б=k_б-1; \quad r_Д=k_Д-1,$$

где $N^* = N + k_s + k_a$.

В формулах (1) — (2) приняты обозначения: $S_Н$ и $S_У$ — общее число независимых условных уравнений в сети при уравнивании ее по направлениям и углам соответственно; f — число условных уравнений фигур; q — число условий горизонта; c — число полюсных (боковых) условий; $r_б$— число базисных условий; $r_д$ — число условий дирекционных углов; D* — число измеренных в сети направлений Z), сторон k_s и азимутов k_a ,вместе взятых (подчеркнем, измеренных, но не вычисленных по координатам исходных пунктов); N* — число измеренных в сети углов N, сторон k_s и азимутов k_a , вместе взятых; $k_б$ — общее число исходных и дополнительно измеренных сторон; $k_д$— общее число исходных и дополнительно измеренных азимутов (дирекционных углов); n — число всех пунктов в сети (исходных и определяемых); k — число определяемых пунктов; p — число всех сторон в сети (исходных и определяемых); t — число пунктов, на которых исполнены угловые измерения. Как пример определим число независимых условных уравнений в свободной сети триангуляции, изображенной на рис. 1.

На пунктах сети измерены и уравниваются направления. В качестве исходных заданы координаты одного пункта, длина и дирекционный угол одной стороны. Кроме того, дополнительно измерены длина и азимут стороны 4—5. В этой сети D =22; k_s = 1, k_a = 1, n = 6, k = 4, p= = 11, t= 6, $k_б$ = 2, $k_д$= 2. С этими данными по формулам (1), (2) получим:

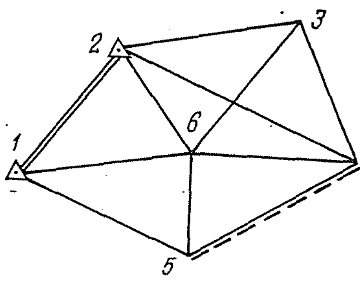


Рис. 1

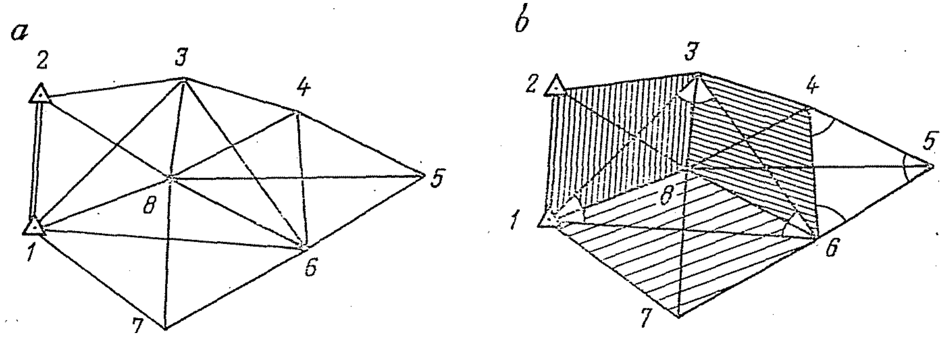


Рис. 2

всего условий	$S_н=D^*-(2k+t) = 24-(8+6) = 10;$
фигур	$f=D-t-p+1 = 22-6-11+1 = 6;$
полюсных	$c=p-2n+3 = 11-12+3 = 2;$
базисных	$r_б=k_б-1 = 2-1 = 1;$
дирекционных углов	$r_Д=к_Д-1=2-1 = 1.$

В более сложной сети, изображенной на рис. 2 и уравниваемой по углам, имеем N = 29, k_s = 0, k_a =0, n = t = 8, k = 6, p=18, $k_б$=1, $k_д$= =1; в этой сети 36 направлений, образующих измеренные углы (D = 36). С этими данными получим по формулам (2) следующее число независимых условных уравнений: всего —17, из них фигур — 11, горизонта — 1, полюсных — 5. При выборе фигур для составления независимых условных уравнений целесообразно иметь в виду следующие соображения. Условные уравнения горизонта возникают при уравнении сети только по углам; число их равно числу полюсов центральных систем, на которых измерены углы или направления. Так, например, в сети, изображенной на рис. 2а, возникает одно условное уравнение горизонта на пункте 8, что согласуется с расчетами по формулам (2).

Полюсные условия возникают только в геодезических четырехугольниках и центральных системах, которые легко опознаются на схеме сети. Число полюсных условий равно числу геодезических четырехугольников и числу полюсов центральных систем, вместе взятых.

Если при каком-либо полюсе окажется ряд центральных систем с разным числом треугольников в каждой из них, то для составления независимого полюсного условия берут только одну систему (по числу полюсов) с наименьшим числом треугольников в ней. В этом случае число вычислительных операций будет меньше, чем при выборе центральной системы с наибольшим числом треугольников, а конечный результат уравнивания будет один и тот же.

В сети на рис. 2б независимые полюсные условия возникают во всех геодезических четырехугольниках: *8123, 8346, 8456, 8671* и одной центральной системе *8136* с полюсом на пункте 8. Всего пять полюсных условий, что и должно быть согласно расчетам по формулам (2).

Для составления базисного и азимутального условных уравнений выделяется в сети цепочка треугольников по кратчайшему пути между соседними базисными сторонами и исходными дирекционными углами соответственно. Число базисных условий на единицу меньше числа базисных сторон; число азимутальных условий на единицу меньше числа исходных дирекционных углов в сети.

Порядок выполнения

Определим число и вид независимых условных уравнений в сети триангуляции, изображенной на рис. 3, которую будем уравнивать коррелатным способом по направлениям.

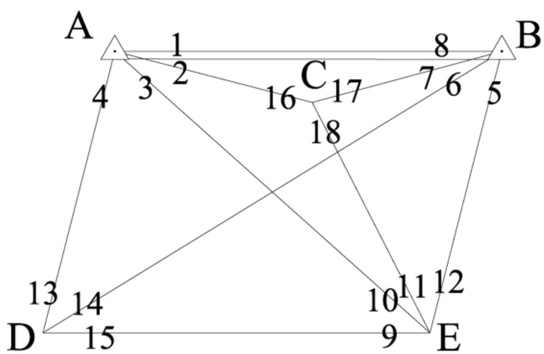


Рис. 3

В этой сети пять пунктов (n=5), из которых два исходных и три определяемых (k= 3); число всех сторон девять (p= 9); горизонтальные направления в количестве восемнадцати (D=18) измерены на всех пунктах (t=5); дополнительно измеренных сторон и азимутов нет ($k_s = k_a = 0$). В данной сети при уравнивании направлений возникают условные уравнения только фигур и полюсные, число которых определим по формулам (1), (2)

всего условий $S_H = D—(2k + t) = 18—6—5 = 7;$
фигур $f=D—t—p +1 = 18—5—9 +1=5;$
полюсных $c=p—2п + 3 = 9—10 + 3 =2.$

Составление условных уравнений и функций уравненных элементов

Условия фигур. Составление независимых условных уравнений начинается с условий фигур. Для уравниваемой сети (рис. 3) приведены исходные данные (табл. 1), измеренные направления (табл. 2), в табл. 3 значения измеренных углов в треугольниках, их невязки. Независимые условные уравнения фигур записаны в последнем столбце этой таблицы. Неизвестными в условных уравнениях фигур являются поправки к направлениям. Номера и знаки этих поправок легко определить по графе «разность направлений». При уравнивании сети по направлениям в каждом условном уравнении сумма коэффициентов при поправках к направлениям должна быть равна нулю, что следует использовать как контроль при составлении условных уравнений.

Таблица 1

Исходные данные

	Координаты, м			
	X	Y	S_{AB}, м	α_{AB}
A	109582,210	403748,390	8118,360	90° 56' 36,58"
B				

Таблица 2

Таблица измеренных направлений

Название пункта	Название направления	Значение направления	номер
A	B	0° 00' 00,0"	1
	C	28° 44' 48,4"	2
	E	52° 07' 25,8"	3
	D	77° 39' 42,7"	4
B	E	0° 00' 00,0"	5
	D	17° 36' 31,8"	6
	C	45° 07' 59,4"	7
	A	59° 41' 52,2"	8
E	D	0° 00' 00,0"	9
	A	54° 57' 37,4"	10
	C	68° 43' 52,7"	11
	B	123° 08' 19,7"	12
D	A	0° 00' 00,0"	13
	B	60° 14' 58,4"	14
	E	99° 30' 08,2"	15
C	A	0° 00' 00,0"	16
	B	136° 41' 19,5"	17
	E	217° 08' 52,1"	18

В этой сети D=18; k_s = 1, k_a = 1, n = 5, k = 3, p= 9, t= 5, $k_б$ = 1, $k_д$= 1.

всего условий $Sн=D^*-(2k+t)=24-(8+6)=10;$

фигур $f=D-t-p+1=18-5-9+1=5;$

полюсных $c=p-2n+3=9-10+3=2;$

базисных $r_б=k_б-1=1-1=0;$

дирекционных углов $r_Д=к_Д-1=1-1=0.$

Таблица 3

Составление условных уравнение фигур

Номер треугольника	Номер вер-	Разность направлений	Измеренные углы (на плоскости)	Условные уравнения фигур
1	A B C	2-1 8-7 17-16	28°44' 48,4" 14 33 53,8 136 41 19,5	(2) +(11)+(8) – (7) (16) + +1,7"=0
	Σ *w1*		180 00 01,7 +01,7	
2	B E C	7-5 12-11 18-17	45 07 59,4 54 24 27,0 80 27 32,6	(7) – (5) + (12) - (17) – 1,0"=0
	Σ *w2*		179 59 59,0 -1,0	
3	A E C	3-2 11-10 16-18	23 22 37,4 13 46 15,3 142 51 07,9	(3) – (2) + (11) (10) + (16) - (18) + 0,6"=0
	Σ *w3*		180 00 00,6 +0,6	
4	A E D	4-3 15-13 10-9	25 32 16,9 99 30 08,2 54 57 37,4	(4) – (3) + (10) (9) + (15) - (13) +2,5"=0
	Σ *w4*		180 00 02,5 +2,5	
5	B E D	6-5 12-9 15-14	17 36 31,8 123 08 19,7 39 15 09,8	(6) – (5) +(12) (9) (15) - (14) + 1,3"=0
	Σ *w5*		180 00 01,3 +1,3	

$\Sigma\omega^2$=12,19

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma\omega^2}{3n}} = \sqrt{\frac{12,19}{15}} = 0,90''.$$

Отметим, что для получения величины средней квадратической ошибки измеренного угла т с погрешностью m_m= 0,1m требуется не менее 50 невязок треугольников (n≥50)Это вытекает из приближенной формулы

$$m_m = \mathrm{m}/\sqrt{2(n-1)}. \tag{3}$$

Среднюю квадратическую ошибку измеренного угла можно вычислить, используя свободные члены условных уравнений как фигур, так и полюсных, вместе взятых:

$$\mathrm{m} = \sqrt{(\Sigma p\omega^2)/k}. \tag{4}$$

В этой формуле квадраты невязок треугольников умножаются на p=$^1/_3$, а квадраты свободных членов полюсных условий на p=$\frac{1}{ctg^2\beta}$; k — число свободных членов условных уравнений фигур и полюсных, вместе взятых; ∑ctg$^2\beta$— сумма квадратов коэффициентов соответствующего полюсного условного уравнения.

В рассматриваемой сети k= 7 (в ней 5 условий фигур и 2 полюсных). С учетом данных, приведенных в табл. 38, 39 и 40, получим

$$\mathrm{m}=\sqrt{\frac{\frac{1}{3}6{,}67+\frac{1}{19{,}31}2{,}39^2+\frac{1}{11{,}19}0{,}44^2}{7}} = 0{,}60''.$$

Полюсные условия. В нашей сети возникает два полюсных условия: в геодезическом четырехугольнике с вершинами *ABDE* и центральной системе *CABE* (рис. 37 и 38). В геодезическом четырехугольнике за полюс принимают либо вершину с наиболее тупым углом, либо точку пересечения диагоналей. В этом случае коэффициенты полюсного условного уравнения будут иметь наибольшие по величине значения, благодаря чему неизвестные поправки направлений определятся с большей точностью, чем при выборе полюса в другой точке.

Обозначив через β_i и β_j связующие углы соответственно числителя и знаменателя дроби полюсного условия, а через $П_1$ и $П_2$ — соответственно произведения синусов измеренных значений этих углов, напишем полюсное условное уравнение в линейном виде

$$\Sigma \mathrm{ctg}\beta_i(\beta_i) - \Sigma \mathrm{ctg}\beta_j(\beta_j) + w = 0, \qquad (5)$$

где $\omega = \frac{П_1 - П_2}{П_1}\rho''$.

В случае уравнивания направлений поправки р в углы надо выразить через разности поправок соответствующих направлений: поправка правого направления минус поправка левого направления.

За порядком составления полюсных условных уравнений, вычислением их коэффициентов и свободных членов можно проследить по приведенным ниже схемам и таблицам.

Составление полюсного условия геодезического четырехугольника

а) Схематический чертеж фигуры (рис. 4).

б) Название полюса: пункт А.

в) Полюсное условие, выраженное через отношения сторон

$$\frac{S_{AB}\ S_{AE}\ S_{AD}}{S_{AE}\ S_{AD}\ S_{AB}} = 1$$

и синусы противолежащих углов

$$\frac{\sin(12-10)\sin(15-13)\sin(8-6)}{\sin(8-5)\sin(10-9)\sin(14-13)} = 1.$$

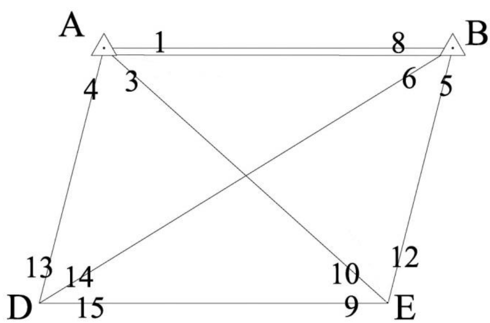


Рис. 4

г) Вычисление свободного члена и коэффициентов $\delta=$ ctgβ при поправках в измеренные направления (табл. 4).

Таблица 4

Числитель				Знаменатель			
Углы β_i	Значения углов β_i	sin β_i	ctg β_i	Углы β_i	Значения углов β_i	sin β_i	ctg β_i
12—10 *15—13* *8—6*	68° 10' 42,3" 99 30 08,2 42 05 21,4	0,9283459 0,9862490 0,6702878 П1 = 0,6137209	0,400 -0,167 1,107	*8—5* *9—8* *13—12*	59°41' 53,2" 54 57 37,4 60 14 58,4	0,8633789 0,8187553 0,86819496 П2 = 0,6137236	0,584 0,701 0,572

$$\omega = \frac{П_1-П_2}{П_2}\rho''=0{,}44'', \qquad \Sigma\, ctg^2\,\beta=2{,}573\ , \qquad \omega_{Доп}=2{,}5m\sqrt{\Sigma ctg^2\beta}=2{,}5\cdot1''\cdot\sqrt{2{,}573}=4{,}01''.$$

Контроль. Сумма коэффициентов при поправках должна быть равна нулю.

д) Линейный вид условия:

$$\delta_{8-5}(5) - \delta_{8-6}(6) + [\delta_{8-6} - \delta_{8-5}](8) + \delta_{10-9}(9) - [\delta_{10-9} + \delta_{12-10}](10) + \delta_{12-10}(12) + [\delta_{14-13} - \delta_{15-13}](13) - \delta_{14-13}(14) + \delta_{15-13}(15) + \omega = 0$$

или с учетом δ = ctgβ:

0,584 (5) – 1,107 (6) + 0,523 (8) + 0,701 (9) – 1,101 (10) +
+ 0,400 (12) + 0,739 (13) –0,572 (14)+ 0,167 (15) – 0,91" = 0.

Составление полюсного условия центральной системы

а) Схематический чертеж фигуры (рис. 5).
б) Название полюса: пункт С.

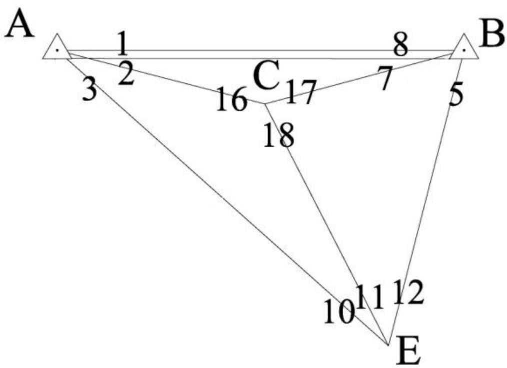


Рис. 5

в) Полюсное условие, выраженное через отношения сторон

$$\frac{S_{CA}\ S_{CB}\ S_{CE}}{S_{CB}\ S_{CE}\ S_{CA}}=1$$

и синусы противолежащих углов

$$\frac{\sin(8-7)\,\sin(12-11)\sin(3-2)}{\sin(2-1)\,\sin(7-5)\sin(11-10)}=1.$$

г) Вычисление свободного члена и коэффициентов δ= ctgβ при поправках в измеренные направления (табл. 5).

Таблица 5

Числитель				Знаменатель			
Углы β_i	Значения углов β_i	sin β_i	ctg β_i	Углы β_i	Значения углов β_i	sin β_i	ctg β_i
8—7 *12—11* *3—2*	14° 33' 53,8" 54 24 27,0 23 22 37,4	0,2514772 0,8131769 0,3967803 П1 = 0,0811397	3,849 0,716 2,313	*2—1* *7—5* *11—10*	28°44' 48,4" 45 07 59,4 13 46 13,3	0,4809395 0,7087483 0,2380311 П2 = 0,0811365	1,823 0,995 4,080

$\omega = \frac{П_1 - П_2}{П_2}\rho''$=8,13", $\Sigma\, ctg^2\, \beta$=26,971, $\omega_{Доп}$=2,5m$\sqrt{\Sigma ctg^2 \beta}$=2,5·1"·$\sqrt{26,971}$=39,95".

д) Линейный вид условия:

$$\delta_{2-1}(1) - [\delta_{2-1} + \delta_{3-2}](2) + \delta_{3-2}(3) - \delta_{7-5}(5) - [\delta_{7-5} + \delta_{8-7}](6) + \delta_{8-7}(7) + \delta_{11-10}(10) + [\delta_{11-10} - \delta_{12-11}](11) + \delta_{12-11}(12) + \omega = 0$$

или с учетом δ = ctgβ:

1,823 (1) – [1,823+2,313] (2) + 2,313 (3) – 0,995 (5) – [0,995+3,849] (6) + 3,849 (7) + 4,080 (10) –
– [4,080+0,716] (11)+ 0,716 (12) – 8,13" = 0.

Составление весовой функции

Пусть в уравненной сети требуется определить среднюю квадратическую ошибку длины наиболее удаленной стороны s_{DE}. Для этого надо вычислить обратный вес этой стороны. С этой целью длину стороны s_{DE} представим как функцию уравненных направлений, идя от исходной стороны s_{AB} по кратчайшему пути через два треугольника *ABD* и *BED*:

$$F = S_{DE} = S_{AB}\frac{\sin(4-1)\sin(6-5)}{\sin(15-13)\sin(12-9)}. \qquad (6)$$

Для вычисления обратного веса этой функции найдем ее приращение $\Delta F = f_s$. Взяв частные производные от F по каждому измеренному направлению и перейдя к конечным приращениям, получим

$$f_s = \Delta_{SDE} = -\Delta_{4-1}(1) + \Delta_{4-1}(4) - \Delta_{6-5}(5) + \Delta_{6-5}(6) + \Delta_{12-9}(9) - \Delta_{12-9}(10) + \Delta_{15-13}(13) - \Delta_{15-13}(15). \qquad (7)$$

где $\Delta_{k-1} = \text{v} \operatorname{ctg}(k\text{-}i) = \text{v}\delta_{k-i}$

$$\nu = \frac{S_{34}ДМ}{\rho''} = \frac{S_{12}ДМ}{\rho''} = \frac{\sin(3-1)\sin(5-4)}{\sin(13-11)\sin(10-8)} = \frac{S_{12}ДМ}{\rho''}\cdot\frac{П_1}{П_2} \qquad (8)$$

В целях удобства вычислений длины сторон S_{AB} и S_{DE} в формуле (8) выражают в дециметрах.

Порядок вычисления коэффициентов Δ_{k-i} весовой функции f_s можно проследить по табл.6 .

Таблица 6

а) Вычисление длины стороны и коэффициента υ

Числитель			Знаменатель		
Углы (k-i)	Значения углов	sin углов	Углы (k-i)	Значения углов	sin углов
4—1 6—5	77°39'42,7" 17 36 31,8	0,9769036 0,3025168 $П_1$= 0,2955298	15—13 10—8	99°30'08,2" 123 08 19,7	0,9862790 0,8373486 $П_2$=0,8258594

S_{AB}= 81184 дм

$S_{\text{DE}} = S_{AB}{}^{дм} = \frac{П1}{П2} = 81184\frac{0{,}2955298}{0{,}8258594} = 29051дм$ $\quad υ = \frac{S_{DE}дм}{\rho''} =$ 0,1408

б) Вычисление коэффициентов Δ_{k-i} = υ ctg (k-i)

Углы (k-i)	Значения углов	ctg (k-i)	Δ_{k-i}= υ ctg (k-i)
4—1 6—5	77°39'42,7" 17 36 31,8	0,2187 3,1507	0,031 0,444
15—13 12—9	99 30 08,2 123 08 19,7	– 0,16744 – 0,6528	–0,024 –0,092

С учетом данных, приведенных в табл. 6, весовая функция, примет окончательный вид

$$f_s = \Delta_{SDE} = -0{,}031(1) + 0{,}031(4) - 0{,}444(5) + 0{,}444(6) + 0{,}092(9) - 0{,}092(10) + 0{,}024(13) - 0{,}024(15).$$

Коэффициенты при поправках направлений весовой функции fs записывают в столбец f табл. 6 условных уравнений.

Таблица 7

Таблица коэффициентов условных уравнений

Номер поправок	1/p	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	f	S'	Поправки υ
(1)	1	-1						1,823	-0,031	0,792	0,537"
(2)	1	1		-1				-4,136		-4,136	0,074
(3)	1			1	-1			2,313		2,313	-0,012
(4)	1				-1				0,031	1,031	-0,624
(5)	1		-1			-1	0,584	0,995	-0,444	-0,865	0,192
(6)	1					1	-1,107		0,444	0,337	0,030
(7)	1	-1	1					-4,844		-4,844	0,296
(8)	1	1					0,523	3,849		5,372	-0,526
(9)	1				-1	-1	0,701		-0,092	-1,391	0,570
(10)	1			-1	1		-1,101	4,080	0,092	3,071	-0,093
(11)	1		-1	1		- 1		-4,796		-4,796	-0,329
(12)	1		1			1	0,400	0,716		3,116	-0,147
(13)	1				-1		0,739		-0,024	-0,285	0,666
(14)	1					-1	-0,572			-1,572	-0,121
(15)	1				1	1	-0167		0,024	1,857	-0,539
(16)	1	-1		1						0,000	-0,142
(17)	1	1	-1							0,000	-0,281
(18)	1		1	-1						0,000	0,139
ω		1,7	-1,0	0,6	2,5	1,3	-0,91	8,13		$[pv^2]$ =	3,13
Контроль: $\Sigma\alpha_i = \Sigma f_i = \Sigma s'_i = \Sigma p_i v_i = 0$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,02

Составление и решение нормальных уравнений коррелат. Вычисление поправок направлений

Нормальные уравнения решают, как правило, по схеме Гаусса или по способу итераций.

Таблица 8

Таблица коэффициентов нормальных уравнений

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	f	ω	S	S°
6,000	-2,000	-2,000	-	-	0,523	2,734	0,031	+1,7	6,988	6,988
	6,000	-2,000	-	2,000	-0,184	-0,327	0,444	-1,0	2,933	2,933
		6,000	-2,000	-	1,101	-2,427	-0,092	+0,6	-0,818	-0,818
			6,000	2,000	-2,708	1,767	0,263	+2,5	7,822	7,822
				6,000	-1,587	-0,279	1,004	+1,3	10,438	10,438
					4,605	-1,612	-0,938	-0,91	-1,710	-1,710
						105,210	-0,123	+8,13	113,073	113,073
							0,414	-	1,003	1,003

В целях контроля правильности вычисления коэффициентов нормальных уравнений построчно образуют суммы S' коэффициентов при одноименных поправках условных уравнений и весовой функции (см. табл. 7). Затем по известным правилам (умножая столбец на столбец в табл. 7 и суммируя результаты) вычисляют коэффициенты нормальных уравнений и записывают их в табл. 8, затем для каждого нормального уравнения находят сумму 5 его коэффициентов и свободного члена ω. В последнем столбце этой таблицы в целях контроля вычисляют для каждого нормального уравнения контрольные суммы $S^0 i = [a_i S \acute{\imath}] + \omega_i$ используя значения $a_i, S \acute{\imath}$ и ω_i, приведенные в табл. 7 коэффициентов условных уравнений. Расхождение между S° и S (в последнем и предпоследнем столбцах табл. 8) допускаются только за счет ошибок округления.

Нормальные уравнения коррелат решены по сокращенной схеме Гаусса (табл. 9). Контрольные вычисления в этой таблице выполнены для коэффициентов преобразованных нормальных уравнений и для коэффициентов соответствующих им эллиминационных строк. Первый контроль представлен в виде следующих равенств:

$$\left.\begin{array}{c}[a_1a_1]+[a_1a_2]+[a_1a_3]+\cdots+\omega_1=S_1;\\ -[a_2a_2\cdot 1]+[a_2a_3\cdot 1]+\cdots+[a_2\omega\cdot 1]=[a_2S\cdot 1];\\ [a_3a_3\cdot 2]+\cdots+[a_3\omega\cdot 2]=[a_3S\cdot 2];\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ [n\omega\cdot(n-1)]=[nS\cdot(n-1)];\end{array}\right\} \quad (9)$$

Второй контроль требует суммирования коэффициентов эллиминационных строк. Сумма коэффициентов в этих строках должна равняться величине, стоящей в столбце S данной строки. Таким образом, будем иметь

$$\left.\begin{array}{c}-1-\dfrac{[a_1a_2]}{[a_1a_1]}-\dfrac{[a_1a_3]}{[a_1a_1]}-\cdots-\dfrac{\omega_1}{[a_1a_1]}=-\dfrac{S_1}{[a_1a_1]};\\ -1-\dfrac{[a_2a_3\cdot 1]}{[a_2a_2\cdot 1]}-\cdots-\dfrac{[a_2\omega\cdot 1]}{[a_2a_2\cdot 1]}=-\dfrac{[a_2S\cdot 1]}{[a_2a_2\cdot 1]};\\ -1-\cdots-\dfrac{[a_3\omega\cdot 2]}{[a_3a_3\cdot 2]}=-\dfrac{[a_3S\cdot 2]}{[a_3a_3\cdot 2]}.\end{array}\right\} \quad (10)$$

Перейдем к определению коррелат. Связанные с этим вычисления требуют использования эллиминационных строк и преобразованных нормальных уравнений коррелат; первые позволяют определить численные значения коррелат, а вторые служат для их контроля. Если ограничиться для простоты тремя уравнениями, то в результате будем иметь

$$\left.\begin{array}{c}k_1=-\dfrac{[a_1a_2]}{[a_1a_1]}k_2-\dfrac{[a_1a_3]}{[a_1a_1]}k_3-\dfrac{\omega_1}{[a_1a_1]};\\ k_2=-\dfrac{[a_2a_3\cdot 1]}{[a_2a_2\cdot 1]}k_3-\dfrac{[a_2\omega\cdot 1]}{[a_2a_2\cdot 1]};\\ k_3=-\dfrac{[a_3\omega\cdot 2]}{[a_3a_3\cdot 2]}\end{array}\right\} \quad (11)$$

Сначала вычисляют последнюю коррелату и, проконтролировав ее путем подстановки в последнее преобразованное уравнение, находят следующую, предпоследнюю коррелату. Подставив эту и последнюю коррелату в предпоследнее преобразованное уравнение и убедившись в правильности этих двух коррелат, вычисляют следующую коррелату и т. д. Порядок вычисления коррелат по формулам (11) легко проследить по табл. 9; в нижнем левом ее углу дана табличка слагаемых, участвующих в вычислении коррелат в соответствии с указанными формулами.

Таблица 9

Решение нормальных уравнений коррелат

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	f	ω	S	Контроль
6,000 -1	-2,000 0,3333	-2,000 0,3333	0 0	0 0	0,523 -0,0872	2,734 -0,4556	0,031 -0,0052	1,7 -0,2833	6,988 -1,1647	-1,1648
	6,000 5,3333 -1	-2,000 -2,6667 0,5	0 0 0	2,000 2,0000 -0,3750	-0,184 -0,0097 0,0018	-0,327 0,5842 -0,1095	0,444 0,4543 -0,0852	-1,0 -0,4334 0,0813	2,933 5,2621 -0,9866	-0,9866
		6,000 4,0000 -1	-2,000 -2,0000 0,5000	0 1,0000 -0,2500	1,101 1,2705 -0,3176	-2,427 -1,2236 0,3059	-0,092 0,1455 -0,0363	0,60 0,9499 -0,2375	-0,818 4,1422 -1,0355	-1,0355
			6,000 5,0000 -1	2,000 2,5000 -0,5000	-2,708 -2,0728 0,4146	1,767 1,1552 -0,2310	0,263 0,3358 -0,0672	2,5 2,9749 -0,5950	7,822 9,8931 -1,9786	-1,9786
				6,000 3,7500 -1	-1,587 -0,8646 0,2306	-0,279 -0,7698 0,2053	1,004 0,6294 -0,1678	1,3 -0,2624 0,0699	10,438 2,4826 -0,6620	-0,6620
					4,605 3,0970 -1	-1,612 -1,1593 0,3743	-0,938 -0,7017 0,2266	-0,91 -0,1878 0,0606	-1,710 -1,0487 -0,3386	-0,3386
						105,210 102,7952 -1	-0,123 -4,3099 0,0042	8,13 6,8339 -0,0665	113,073 109,1974 -1,0623	-1,0623
-0,2833 -0,0303 0,0550 0 0 -0,1215 -0,0029 -0,3830	0,0813 0,0073 -0,0011 0,0859 0 -0,1823 -0,0088	-0,2375 -0,0203 0,2004 0,0573 -0,3633 -0,3645	-0,5950 0,0154 -0,2616 0,1145 -0,7267	-0,0699 -0,0136 -0,1455 -0,2290	-0,6060 -0,0249 -0,6309	-0,0665	0,414 $\frac{1}{P_F}$=0,0072 $[pv^2]$=3,14	-0,0094	1,003 -0,0022	-0,0022
k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7				

Вычислив коррелаты, находят поправки к измеренным направлениям по формуле

$$v_i = \frac{1}{p_i}(a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_r k_r) \qquad (12)$$

,

где a_i— коэффициенты условных уравнений,k_i— коррелаты. В нашей сети направления измерены равноточно, поэтому p_i= 1.

Поправки направлений, вычисленные по формуле (12), приведены в табл. 7. Контроль составления и решения системы нормальных уравнений, соответствующих системе условных уравнений в табл. 7, выполняется по формуле $[pv^2]$ = —$[k\omega]$. Если при составлении условных уравнений были допущены ошибки, то обнаружатся они только при окончательном решении треугольников.

При уравнивании направлений на каждом пункте и в сети в целом должно соблюдаться равенство $[pv]$= 0, т. е. сумма произведений поправок направлений на их веса должна быть равна нулю.

Оценка точности уравненных элементов сети

Как отмечалось выше, для оценки точности того или иного элемента уравненной сети необходимо составить соответствующую ему функцию F и вычислить ее обратный вес $^1/_{P_F}$ Тогда средняя квадратическая ошибка уравненного элемента определится по формуле

$$m_F = \mu\sqrt{\frac{1}{P_F}} \qquad (13)$$

где μ— средняя квадратическая ошибка единицы веса, определяемая из уравнивания сети,

$$\mu = \sqrt{(\sum pv^2)/r} \qquad (14)$$

v— поправки к измеренным с весами p величинам,r — число избыточных измерений, равное числу условных уравнений.

В нашей сети была составлена весовая функция fs для оценки точности длины наиболее удаленной стороны S_{DE} и затем по формуле

$$\frac{1}{P_F} = [ff] - \frac{[a_1 f*1]^2}{[a_1 a_1*1]} - \frac{[a_2 f*2]^2}{[a_2 a_2*2]} - \frac{[a_3 f*3]^2}{[a_3 a_3*3]} - \ldots \qquad (15)$$

вычислен в табл. 9 при решении нормальных уравнений обратный вес этой стороны, который оказался равным $1/P_S = 0{,}072$.

Средняя квадратическая ошибка единицы веса равна

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum pv^2}{r}} = \sqrt{\frac{3{,}13}{9}} = 0{,}60''.$$

С учетом полученных значений (μ = 0,60" и 1/PS = 0,072 найдем среднюю квадратическую ошибку длины уравненной стороны S_{DE}:

$$m_{s_{DE}} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_s}} = 0{,}60\sqrt{0{,}072} = 0{,}060\text{м}.$$

Отметим, что полученная ошибка m_s характеризует только лишь точность передачи длины от исходной стороны s_{AB} к стороне s_{DE}, причем без учета влияния ошибок исходных данных, которое надо учесть дополнительно.

Вопрос учета влияния ошибок исходных данных на точность определения уравненных элементов еще не отработан должным образом на практике, особенно в больших и сложных сетях многоступенчатого построения. Поэтому в подавляющем числе случаев ограничиваются вычислением средних квадратических ошибок уравненных элементов по формуле (8.24), т. е. без учета влияния ошибок исходных данных, что в ряде случаев, когда последние ошибки сравнительно велики, приводит к некоторому завышению показателей точности оцениваемых элементов, что надо иметь в виду.

Окончательные вычисления в триангуляции

После исправления измеренных направлений поправками, полученными из уравнивания сети, выполняют окончательное решение треугольников (табл. 10). Сумма уравненных углов в каждом треугольнике должна быть равна 180°. Если поправки округлены до сотых долей секунды, то сумма уравненных углов в некоторых треугольниках может отличаться от 180° на 0,01". Обычно эту сотую долю секунды алгебраически прибавляют к углу, который наиболее близок к прямому.

Таблица 10

Окончательное решение треугольников

Номер треугольника	Номер вершины	Разность направлений	Измеренные углы (на плоскости)	Поправки v	Уравненные углы	sin Уравненных углов	Уравненные стороны, м
1	A B C	2-1 8-7 17-16	28°44' 48,4" 14 33 53,8 136 41 19,5	-0,463" -0,822 -0,423	47,9 53,0 19,1	0,4809373 0,25147723 0,6859626	5691,89 2976,23 8118,36
	Σ W_1		180 00 01,7 +01,7	-01,7			
2	B E C	7-5 12-11 18-17	45 07 59,4 54 24 27,0 80 27 32,6	0,104 0,182 0,711	59,5 27,2 33,3	0,708748 0,8131775 0,9861679	4960,93 5691,89 6902,75
	Σ W_2		179 59 59,0 -1,0	+1,0			
3	A E C	3-2 11-10 16-18	23 22 37,4 13 46 15,3 142 51 07,9	-0,086 -0,236 -0,281	37,3 15,1 7,6	0,3967798 0,2380395 0,6038744	4960,93 2976,20 7550,23
	Σ W_3		180 00 00,6 +0,6	-0,6			
4	A E D	4-3 15-13 10-9	25 32 16,9 99 30 08,2 54 57 37,4	-0,612 -1,205 -0,663	16,3 7,0 36,7	0,43110743 0,9862799 0,8187450	3300,24 7550,23 6267,71
	Σ W_4		180 00 02,5 +2,5	-2,5			
5	B E D	6-5 12-9 15-14	17 36 31,8 123 08 19,7 39 15 09,8	-0,162 -0,717 -0,418	31,6 19,0 9,4	0,3025159 0,8373505 0,6327406	3300,24 9134,89 6902,75
	Σ W_5		180 00 01,3 +1,3	-1,3			
6	A B D	4-1 8-6 14-13	77 39 42,7 42 05 21,4 60 14 58,4	-1,161 -0,556 -0,786	41,5 20,8 57,7	0,9769023 0,6702855 0,8681932	9134,89 6267,71 8118,36
	Σ W_6		180 00 02,5 +2,5	-2,5			
7	A B E	3-1 8-5 12-10	52 07 25,8 59 41 53,2 68 10 42,3	-0,549 -0,718 -0,054	25,3 52,5 42,2	0,7893380 0,86337720 0,9283456	6902,75 7550,23 8118,36
	Σ W_7		180 00 01,3 +1,3	-1,3			

Таблица 11

Вычисление окончательных координат

Формулы	i=A	A	B	A	B	A	B
	k=B	C		D		E	
$\alpha_{исх}$	90°56′ 36,58"	90°56′ 36,58"	270°56′36,58"	90°56′ 36,58"	270°56′36,58"	90°56′ 36,58"	270°56′36,58"
$\pm\beta_i$		+28 44 47,9	-14 33 53,0	+77 39 41,5	-42 05 20,8	+52 07 25,3	-59 41 52,5
α_{ik}	90°56′ 36,58"	119 41 24,48	256 22 43,58	168 36 18,08	228 51 15,78	143 04 01,88	211 14 44,08
x_k	109448,53	108108,06	108108,07	103438,01	103438,01	103547,01	103547,01
x_i	109582,21	109582,21	109448,53	109582,21	109448,53	109582,21	109448,53
Δx_{ik}	-133,68	-1474,15	-1340,445	-6144,16	-6010,53	-6035,21	-5901,52
$\cos\alpha_{ik}$	-0,0164663	-0,4953090	-0,2355009	-0,9802884	-0,6579749	-0,7993406	-0,8549519
S_{ik}	8118,36	2976,23	5691,89	6267,71	9134,89	7550,23	6902,75
$\sin\alpha_{ik}$	0,9998644	0,8687168	-0,9718741	0,1975714	-0,75303978	0,6008781	-0,5187072
Δy_{ik}	8117,26	+2585,50	-5531,80	+1238,32	-6878,93	+4536,76	-3580,51
y_i	103748,39	403748,39	411865,65	403748,39	411865,65	403748,39	411865,65
y_k	411865,65	406333,89	406333,86	404986,711	404986,71	408285,14	408285,14

Таблица 12

Решение обратных геодезических задач для каталога

Формулы	i= A	A	A	B	B	B
	k= C	E	D	C	E	D
y_k	406333,87	103547,01	103438,01	406333,06	103547,01	103438,01
y_i	403748,39	403748,39	403748,39	411865,65	411865,65	411865,65
Δy_{ik}	+2585,48	+4536,76	+1238,32	-5531,805	-3580,51	-6878,93
$tg\alpha_{ik}$	-1,7538883	-0,75171711	-0,20154415	4,1268141	0,6067092	+1,1444808
Δx_{ik}	-1474,15	-6035,21	-6144,16	-1340,44	-5901,52	-6010,53
x_k	108108,06	408285,14	404986,71	108108,06	408285,14	404986,71
x_i	109582,21	109582,21	109582,21	109448,53	109448,53	109448,53
α_{ik}	119°41′24,48"	143°04′01,88"	168°36′18,08"	256°22′43,58"	211°14′44,08"	228°51′15,78"
$\Delta x+\Delta y$	1111,33	+10571,97	-4905,84	-6872,24	-9482,03	-12889,46
$\Delta x-\Delta y$	-4059,63	+1498,45	+7382,48	4191,36	-2321,01	868,4
$tg(\alpha_{ik}+45°)$	-0,2737541	0,14173686	0,66452476	-1,6396286	+4,0852969	-14,8426656
$\alpha_{ik}+45°$	164°41′24,48"	188°04′01,88"	213°36′18,08"	301°22′43,58"	256°14′44,08"	273°51′15,78"
$\sin\alpha_{ik}$	0,8687168	0,6008781	-0,1975714	-0,9718741	-0,5187072	-0,7530397
$\cos\alpha_{ik}$	-0,49530907	-0,7993406	-0,9802884	-0,2355009	-0,8549519	-0,6579749
$s=\Delta y:\sin\alpha$	2976,23	7550,23	6267,71	5691,89	6902,75	9134,89
$s=\Delta x:\cos\alpha$	2976,23	7550,23	6267,71	5691,89	6902,75	9134,89

В том случае, когда сумма уравненных углов в каком-либо треугольнике существенно отличается от 180° (более 0,01"), необходимо еще раз внимательно проверить все вычисления по составлению и решению условия фигур данного треугольника; ошибки устраняются повторными вычислениями.

Соблюдение условий фигур во всех треугольниках сети еще не говорит о том, что уравнительные вычисления выполнены безошибочно. Тот факт, что в каждом треугольнике сумма уравненных углов оказалась равной точно 180°, свидетельствует только лишь о том, что условные уравнения фигур составлены и решены правильно.

Окончательное суждение о правильности уравнивания свободной сети триангуляции может быть сделано на основе сопоставления длин одноименных сторон, полученных из решения разных треугольников. Если расхождения не превышают двух единиц последнего знака, то это указывает на безошибочность составления и решения полюсных условных уравнений и последующих вычислений в сети.

Проверив безошибочность решения всех треугольников сети (см. табл. 10), а не только тех, для которых были составлены независимые условия фигур, приступают к вычислению окончательных координат пунктов (табл. 11). На каждом определяемом пункте расхождения в абсциссах и ординатах, вычисленных по двум сторонам треугольника, не должны превышать одной-двух единиц в последнем знаке.

Среднее из двух значений абсцисс и ординат записывают в каталог координат пунктов (табл. 13). Для того чтобы обеспечить полное соответствие между окончательными координатами, длинами и дирекционными углами сторон, решают (табл. 12) обратные геодезические задачи, используя координаты, внесенные в каталог.

Таблица 13

Каталог координат пунктов

№	координаты		Длина стороны	Дирекционные углы	На пункты
	X	Y			
A	109582,21	403748,39	8118,36	90°56′ 36,58"	B
			7550,23	143 04 01,88	E
			6267,71	168 36 18 08	D
B	109448,53	411865,65	9134,89	228 51 15,78	D
			6902,75	211 14 44,08	E
			5691,89	256 22 43,58	C
C	108108,06	406333,87	2976,23	119 41 24,48	A
E	103547,01	408285,14	6902,75	31 14 44,08	B
D	103438,01	404986,71	6267,71	348 36 18,45	A

1.3. Уравнивание триангуляции по двухгрупповому методу Н.А. Урмаева

При уравнивании триангуляции по методу Урмаева условные уравнения делят на две группы. В первую группу включают условия фигур неперекрывающихся треугольников, во вторую — оставшиеся условия фигур, горизонта, полюсные, дирекционных углов, базисные и координат. Поскольку при уравнивании углов условные уравнения первой группы не имеют общих поправок (не зависят друг от друга), то решение их по методу наименьших квадратов сводится к распределению невязки с обратным знаком поровну во все углы треугольника.

Исходные данные

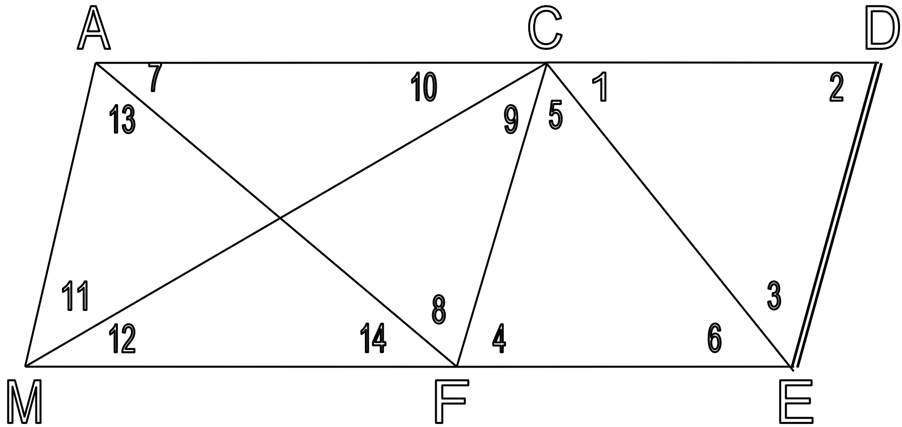


Рис. 6. Схема сети триангуляции

$S_{DE} = 3086{,}22$ м; $\alpha_{DE} = 134°25'08{,}9''$;
$X_D = 250000{,}00$ м; $Y_D = 250000{,}00$ м

Таблица 14

Название пункта	Название направления	Значение направления
A	C F M	0°00′00,0″ 28°44′04,9″ 54°28′20,6″
M	A C F	0°00′00,0″ 84°11′14,8″ 130°57′31,7″
C	D E F M A	0°00′00,0″ 42°44′49,6″ 108°16′17,4″ 167°17′23,2″ 208°37′44,8″
F	M A C E	0°00′00,0″ 23°18′11,5″ 74°12′34,8″ 134°33′49,3″
E	F C D	0°00′00,0″ 54°07′10,9″ 99°05′20,0″

D	E C	0°00′00,0″ 92°16′57,3″

Число и виды независимых условных уравнений. Деление уравнений на группы и решение уравнений первой группы

Для того, чтобы уменьшить число нормальных уравнений, возникающих в сети, триангуляцию нередко уравнивают не по направлениям, как это требуется, а по углам.

При уравнивании триангуляции по методу Урмаева условные уравнения делят на две группы. В первую группу включают условия фигур неперекрывающихся треугольников, во вторую – оставшиеся условия фигур, горизонта, полюсные, дирекционных углов, базисные и координат. Поскольку при уравнивании углов условные уравнения первой группы не имеют общих поправок (не зависят друг от друга), то решение их по методу наименьших квадратов сводится к распределению невязки с обратным знаком поровну во все углы треугольника.

Поправки углов v', полученные из решения уравнений первой группы, называют первичными, Вторичные поправки v'' в углы находят после решения уравнений второй группы.

Решение условных уравнений второй группы требует предварительного преобразования их коэффициентов. Чтобы получить преобразованный коэффициент при поправке в угол треугольника необходимо вычесть из непреобразованного коэффициента среднее значение коэффициентов по данному треугольнику. Так что сумма преобразованных коэффициентов по треугольнику и по сети в целом равна нулю, что служит контролем их вычисления.

Вторичные поправки вычисляют по формуле:

$$v'' = A_i k_1 + B_i k_2 + \ldots + D_i k_{r''}, \qquad (16)$$

где А,В и т.д. – преобразованные коэффициенты условных уравнений второй группы, k – коррелаты, полученные из решения преобразованных условных уравнений второй группы, r'' - число условных уравнений второй группы. Окончательная поправка в угол равна сумме первичной и вторичной поправок:

$$v_i = v_i' + v_i''. \qquad (17)$$

Составление условных уравнений второй группы и функций уравненных элементов сети

В рассматриваемой сети во вторую группу уравнений входят: условное уравнение фигур для перекрывающегося треугольника А-М-С, полюсное условие геодезического четырехугольника. Свободные члены условных уравнений второй группы вычисляют по углам, исправленным первичными поправками.

Вычисление первичных поправок и длин сторон треугольников

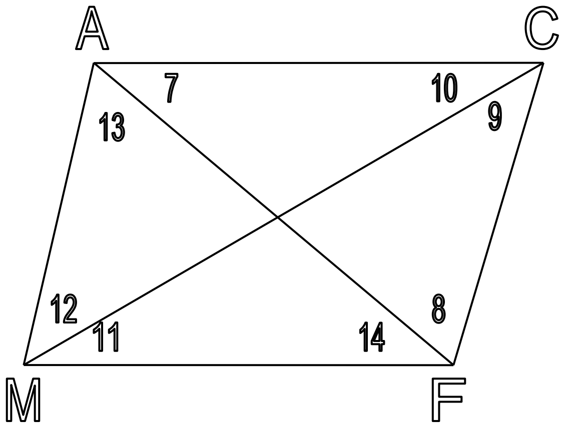
Условное уравнение фигур составлено в табл. 15. Свободные члены и коэффициенты полюсного уравнения четырехугольника вычислены в табл. 16 соответственно. За полюс принят пункт С.

Таблица 15

№ треугольника	Номер угла	Измеренные углы, редуцированные на плоскость	Первичные поправки v′	Углы уравненные за условия 1-ой группы	sin углов	ctg связующих углов	Предварительные длины сторон, м
1	1	42°44'49,6"	+1,4"	51,0"	0,67877	1,082	3086,22
	2	44 58 09,1	+1,3	10,4	0,70673		3213,36
	3	92 16 57,3	+1,3	58,6	0,99920	-0,040	4543,18
	Σ	179 59 56,0					
	W	-4,0"	+4,0	00,00"			
2	4	60 21 14,5	+2,3	16,8	0,869103	0,569	4543,18
	6	65 31 27,8	+2,3	30,1	0,910142		4557,71
	5	54 07 10,9	+2,2	13,1	0,810249	0,723	4235,52
	Σ	179 59 53,2					
	W	-6,8″	+6,8	00,00			
3	7	28 44 04,9	+1,1	6,0	0,480759	1,824	4235,52
	8	50 54 23,3	+1,1	24,4	0,776121		6837,68
	9	59 01 05,8	+1,1	06,9	sin(9+10)=		
	10	41 20 21,6	+1,1	22,7	=0,983703	-0,183	8666,49
	Σ	179 59 55,6					
	W	-4,4	+4,4	00,00			
4	11	46 46 16,9	+0,3	17,2	sin(11+12)=	-0,868	
	12	84 11 14,8	+0,3	15,1	=0,755179		8666,49
	13	25 44 15,7	+0,3	16,0	0,434253		4983,52
	14	23 18 11,5	+0,2	11,7	0,395597	2,322	4539,91
	Σ	179 59 58,9	+1,1	00,00″			
	W	-1,1					
6	7	28 44 04,9	+1,1	06,0	Условие уравнения фигур для 2-ой группы (7) + (10) + (12) + (13) – 0,2″ = 0		
	10	41 20 21,6	+1,1	22,7			
	12	84 11 14,8	+0,3	15,1			
	13	25 44 15,7	+0,3	16,0			
	Σ	179 59 57,0	+2,8	-0,2			
	W	-3,0					

Составление полюсного условия геодезического четырехугольника:

1. Схематический чертеж (рис.7);



2. Полюс: пункт С;
3. Полюсное условие выраженное через отношения сторон

$$\frac{CF \cdot AF \cdot MF}{AF \cdot MF \cdot CF} = 1$$

и синусы противолежащих углов

$$\frac{\sin(13)\sin(10+9)\sin(11)}{\sin(12+11)\sin(7)\sin(9)} = 1$$

4. Вычисление свободного члена и коэффициента $\delta = ctg\beta$ при поправках в измеренные направления (табл.16):

Таблица 16

Числитель				Знаменатель			
Углы β_i	Значение углов β_i	Sin β_i	Ctg β_i	Углы β_i	Значение углов β_i	Sin β_i	Ctg β_i
13	25°44′16,0″	0,4342531	2,074	12+11	130°57′32,3″	0,72551792	-0,868
10+9	100 21 29,6	0,9837028	-0,183	7	28 44 06,0	0,4807592	1,824
11	46 46 17,2	0,7286274	0,940	9	59 01 06,9	0,8573343	0,600

$$\Pi_1 = 0{,}3112521 \qquad \Pi_2 = 0{,}3112632$$

$$\omega = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_1}\rho'' = -7{,}36'' \qquad \Sigma ctg^2\beta_i = 9{,}659$$

$$\omega_{доп} = 2{,}5m\sqrt{\Sigma ctg^2\beta_i} = 2{,}5\cdot 2''\cdot\sqrt{9{,}659} = \pm 15{,}5$$

5. Линейный вид условия:

$$\delta_{10+9}(10) - \delta_{12+11}(12) + \delta_{13}(13) - \delta_7(7) + [\delta_{10+9} - \delta_9](9) + [\delta_{11} -$$
$$- \delta_{12+11}](11 + w = 0$$

или с учетом

$$-0{,}183(10) - 0{,}783(9) + 2{,}074(13) - 3{,}898(14) + 1{,}824(7) +$$
$$+ 1{,}808(11) + 0{,}868(12) - 7{,}36'' = 0$$

Составление весовой функции

Пусть в уравненной сети требуется определить среднюю квадратическую ошибку наиболее удаленной стороны АМ. Для этого нужно вычислить обратный вес этой сторону

$$F = S_{AM} = S_{DE}\frac{\sin 3\sin 6\sin(10+9)\sin 14}{\sin 1\sin 4\sin 7\sin(12+11)}$$

а) Вычисление длины стороны S_{AM} и коэффициента ν

Таблица 17

Числитель			Знаменатель		
Углы *(k-i)*	Значения углов	sin углов	Углы *(k-i)*	Значения углов	sin углов
3	92°16'58,6″	0,9992063	1	42°44'51,0″	0,6787687
6	54 07 13,1	0,8102494	4	60 21 16,8	0,8691038
10+9	100 21 29,6	0,9837028	7	28 44 06,0	0,4807592
14	23 18 11,7	0,3955976	12+11	130 57 32,3	0,7551792
		$П_1$ = 0,315050			$П_2$ = 0,214176

$$S_{AM} = 45399{,}2\ \text{дм}\,;\ v = 0{,}2201$$

б) Вычисление коэффициентов $\Delta_{k-i} = v ctg(k-i)$

Углы(k-i)	Значение углов	ctg(k-i)	Δk-i=v ctg(k-i)
3	92°16'58,6″	-0,0399	-0,009
6	54 07 13,1	0,7233	0,159
10+9	100 21 29,6	-0,1828	-0,040
14	23 18 11,7	2,3216	0,511
1	42°44'51,0″	1,0819	0,238
4	60 21 16,8	0,5691	0,125
7	28 44 06,0	1,8239	0,401
12+11	130 57 32,3	-0,8680	-0,191

f_S=0,009(3) + 0,159(6) – 0,040(10) –
– 0,040(9) + 0,511(14) + 0,511(7) – 0,191(12) – 0,191(11) –
– 0,401(7) – 0,125(4) – 0,238(1)

Таблица 18

Преобразование коэффициентов условных уравнений второй группы и весовых функций

Номер треугольника	Номер угла	Преобразованные уравнения								
		фигур	Полюсное геодезического четырехугольника	f	S	фигур	Полюсное геодезического четырехугольника	f	S	
1	1			-0,238	-0,238			-0,156	-0,156	
	2							0,082	0,082	
	3			-0,009	-0,009			0,073	0,073	
2	4			-0,125	-0,125			-0,136	-0,136	
	5							-0,011	-0,011	
	6			0,159	0,159			0,148	0,148	
3	7	+1	-1,824	-0,401	-1,225	+0,500	-1,172	-0,281	-0,953	-2,2
	8					-0,500	0,652	0,120	0,272	+1,2
	9		-0,600	-0,040	-0,640	-0,500	0,052	0,080	-0,368	+0,2
	10	+1	-0,183	-0,040	0,777	+0,500	0,469	0,080	1,049	+0,8
4	11		0,940	-0,191	0,749	-0,500	-0,031	-0,223	-0,754	0
	12	+1	0,868	-0,191	1,677	+0,500	-0,103	-0,223	0,174	-0,3
	13	+1	2,074		3,074	+0,500	1,103	-0,032	1,571	+1,9
	14			0,511	0,511	-0,500	-0,971	0,479	-0,992	-1,6
	ω	-0,2	-7,36			-0,2 k-0,1629	-7,36 1,7671	$\sum pv^2$=13,1 $-\sum k\,\omega$=13,0		

Преобразование и решение условных уравнений второй группы

Таблица 19

Коэффициенты нормальных уравнений второй группы

k1	k2	f	w	S	контр
2,000	0,2975	-0,4560	-0,20	1,6415	1,6415
	4,1924	-0,0213	-7,36	-2,8914	-2,8914
		0,5130			

Таблица 20

Решение нормальных уравнений коррелат

k_1	k_2	f	ω	S'	Контроль
2,000	0,2975	-0,4560	-0,20	1,6415	
-1	-0,1488	0,2280	0,1000	-0,8208	-0,8208
	4,1924	-0,0213	-7,36	-2,8914	
	4,1481	0,0466	-7,3302	-3,1357	-3,1356
	-1	-0,0012	1,7671	0,7559	0,7559
		0,5130			
k_1	k_2	$1/P_f$ =	0,4089		
0,1000	1,7671				
-0,2629					
-0,1629					

Окончательные вычисления элементов сети и оценка их точности

Таблица 21

Окончательное решение треугольников

№ треугольника	Номер угла	Измеренные углы, редуцированные на плоскость	Поправки			Уравненные углы	sin углов	Длины уравненных сторон
			υ′	υ″	υ=υ′+υ″			
1	1	42°44'49,6"	+1,4"		+1,4"	51,0"	0,67877	3086,22
	2	44 58 09,1	+1,3		+1,3	10,4	0,70673	3213,36
	3	92 16 57,3	+1,3		+1,3	58,6	0,99920	4543,18
	Σ	179 59 56,0	+4,0		+4,0	00,00		
2	4	60 21 14,5	+2,3		+2,3	16,1	0,9608438	4543,18
	6	65 31 27,8	+2,3		+2,3	30,1	0,9598549	4557,71
	5	54 07 10,9	+2,2		+2,2	13,1	0,5354804	4235,53
	Σ	179 59 53,2	+6,8		+6,8	00,00		
3	7	28 44 04,9	+1,1	-2,2″	-1,1″	03,8	0,480759	4235,52
	8	50 54 23,3	+1,1	+1,2	+2,3	25,6	0,776121	6837,68
	9	59 01 05,8	+1,1	+0,2	+1,3	07,1	sin(9+10)=	
	10	41 20 21,6	+1,1	+0,8	+1,9	23,5	=0,983703	8666,49
	Σ	179 59 55,6	+4,4	00,00	+4,4	00,00		
4	11	46 46 16,9		0	+0,3	17,2	sin(11+12)=	
	12	84 11 14,8	+0,3	-0,3	0	14,8	=0,7551801	8666,40
	13	25 44 15,7	+0,3	+1,9	+2,2	17,9	0,4342614	4983,67
	14	23 18 11,5	+0,3	-1,6	-1,4	10,1	0,3955905	4539,87
	Σ	179 59 58,9	+0,2	00,00	+1,1	00,00		
5	7	28 44 04,9	+1,1	-2,2	-1,1	03,8	0,6605242	4539,89
	10	41 20 21,6	+1,1	+0,8	+1,9	23,5		
	12	84 11 14,8	+0,3	-0,3	0	14,8	0,994858531	6837,85
	13	25 44 15,7	+0,3	+1,9	+2,2	17,9	0,5810908	5593,67
	Σ	179 59 57,0	+2,8	+0,2	+3,0	00,00		

Оценка точности уравненных элементов

Средняя квадратическая ошибка уравненного элемента определяется по формуле:

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}, \tag{18}$$

где μ – средняя квадратическая ошибка единицы веса, определяемая из уравнивания сети,

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma p v^2}{r}} = \sqrt{\frac{49{,}11}{6}} = 2{,}86'', \tag{19}$$

v - поправки к измеренным с весами p величинами, r - число избыточных измерений, равное числу условных уравнений.

1.4. Уравнивание триангуляции параметрическим способом

Исходные данные

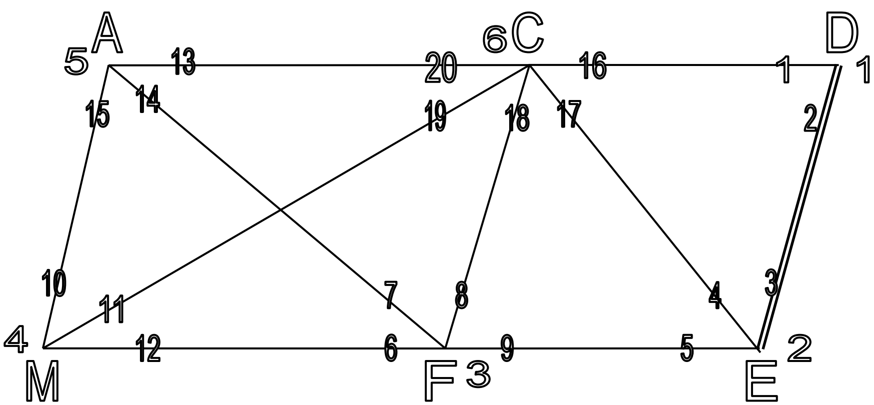


Рис. 8. Схема сети триангуляции

S_{DE} = 3086,22 м; α_{DE} = 134°25′08,9″;
X_D = 250000,00 м; Y_D = 250000,00 м

Таблица 12

Название пункта	Название направления	Значение направления
A	C F M	0°00′00,0″ 28°44′04,9″ 54°28′20,6″
M	A C F	0°00′00,0″ 84°11′14,8″ 130°57′31,7″
C	D E F M A	0°00′00,0″ 42°44′49,6″ 108°16′17,4″ 167°17′23,2″ 208°37′44,8″
F	M A C E	0°00′00,0″ 23°18′11,5″ 74°12′34,8″ 134°33′49,3″
E	F C D	0°00′00,0″ 54°07′10,9″ 99°05′20,0″
D	E C	0°00′00,0″ 92°16′57,3″

Последовательность вычислений при параметрическом способе уравнивания триангуляции

При уравнивании триангуляции параметрическим способом неизвестные поправки величин представляются в виде линейных функции, в которых аргументами являются:

1. поправки ξ и η к приближенным координатам определяемых пунктов;
2. поправки ориентирования δz на стадиях
3. свободные члены l

Число уравнений поправок равно числу измеренных направлений в сети; оно всегда больше числа искомых поправок приближенных координат и поправок ориентирования на станциях. Подчинив поправки направлении условию $[pv^2]=min$, получим однозначные значения поправок координат и поправок ориентирования.

Уравнивание триангуляции параметрическим способом включает:

1. Вычисление приближенных координат определяемых пунктов.
2. Вычисление дирекционных углов всех сторон сети из решения обратных геодезических задач.
3. составление уравнений поправок для всех измеренных направлений.
4. составление и решение нормальных направлений.
5. вычисление окончательных значений координат пунктов путем введения в их приближенные значения поправок, полученных из решения нормальных уравнений.
6. вычисление поправок ориентирования на станциях и поправок измеренных направлений; окончательное решение треугольников.
7. вычисление уравненных дирекционных углов, приращений координат и вторичное определение окончательных координат определяемых пунктов (через их приращения).
8. оценка точности уравненных элементов сети. Составление каталога координат.

Последовательность уравнительных вычислений при использовании параметрического способа рассмотрим на примере уравнивания небольшой сети триангуляции.

Решение треугольников. Вычисление приближенных координат и дирекционных углов

Прежде чем приступить к решению треугольников и вычислению координат пунктов, необходимо определить длины и дирекционные углы исходных сторон из решения обратных геодезических задач (табл.16) по формулам

$$tg\alpha_{ik} = \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i} = \frac{\Delta y}{\Delta x}; \tag{20}$$

$$tg(\alpha_{ik} + 45^\circ) = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y}; \tag{21}$$

$$S_{ik} = \frac{\Delta x}{\cos\alpha_{ik}} = \frac{\Delta y}{\sin\alpha_{ik}} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\ . \tag{22}$$

Таблица 22

Вычисление длин и дирекционных углов исходных сторон

Формулы	i = 1 k = 2	Формулы	i = 1 k = 2
Y k	252204,30	Δ x +Δ y	44,25
Y i	250000,00	Δ x –Δ y	-4364,35
Δ y	2204,30	tg (α ik+45)	-0,0001769
X k	247839,95	α ik+45	179°25'08,90"
X i	250000,00	cos α ik	-0,69999019
Δ x	-2160,05	sin α ik	0,7142389
tg α ik	-0,0178127	S=Δ x /cos α ik	3086,22
α ik	134°25'08,90"	S=Δ y / sin α ik	3086,22

Получив длины сторон и дирекционные углы исходных сторон, приступают к решению треугольников. Невязки ω в каждом треугольнике распределяют поровну на все три угла так, чтобы сумма углов была равна 180°. Результаты решения треугольников приведены в табл. 23; графы 7-10 заполняют после решения нормальных уравнений и вычисления поправок направлений.

Таблица 23

Предварительное и окончательное решение треугольник

Номер треугольников	Номер вершин	Измеренные углы	Предварительно уравненные углы	sin углов	стороны,м	поправки V	Уравненные углы	sin уравненных углов	Уравненные стороны,м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				q=	4546,79			q=	3170,58
1	1	92°16'57,3"	58,64"	0,999206	4543,18	0,86"	55°53'34,67"	0,828	2625,22
	2	44 58 09,1	10,43	0,706731	3213,36	0,99"	46°36'19,03"	0,727	2303,87
	6	42 44 49,6	50,93	0,678768		0,35"	77°30'6,30"	0,976	3095,45
	Σ	179 59 56,0	00,00			2,20"	180°00'00"		
	ω1	-4,0"							
				q=	5227,43			q=	2517,41
2	6	65 31 27,8	30,06	0,910142	4757,70	-0,79"	57°20'31,85"	0,842	2119,43
	2	54 07 10,9	13,17	0,810249	4235,52	-0,23"	56°25'38,20"	0,833	2097,47
	3	60 21 14,5	16,77	0,869104	4543,18	0,13"	66°13'49,95"	0,915	2303,87
	Σ	179 59 53,2	00,00			-0,88"	180°00'00"		
	ω2	-6,8							
				q=	5813,00			q=	4076,49
3	6	59 01 05,8	6,63	0,857334	4983,68	0,48"	116°28'1,66"	0,895	3649,23
	3	74 12 34,8	35,63	0,962265	5593,65	0,04"	32°12'22,84"	0,533	2172,65
	4	46 46 16,9	17,74	0,728629	4235,52	1,72"	31°19'35,50"	0,52	2119,43
	Σ	179 59 57,5	00,00			2,24"	180°00'00"		
	ω3	-2,5							
				q=	6873,17			q=	4171,09
4	6	41 20 21,6	22,60	0,660521	4539,87	0,46"	31°23'29,22"	0,521	2172,65
	5	54 28 20,6	21,60	0,813838	5593,65	-0,60"	109°36'13,85	0,942	3929,31
	4	84 11 14,8	15,80	0,994859	6837,84	-1,12"	39°000'16,93	0,629	2625,22
	Σ	179 59 57,0	00,00			-1,26"	180°00'00"		
	ω4	-3,0							
				q=	8810,26			q	6068,78
5	6	100 21 27,4	28,86	0,983704	8666,68	-0,64	20°26'22,98"	0,349	2119,35
	3	50 54 23,3	24,77	0,776122	6837,84	0,12	133°55'44,49	0,72	4370,73
	5	28 44 04,9	6,37	0,480761	4235,63	0,08	25°37'52,53"	0,433	2625,22
	Σ	179 59 55,6	00,00			-0,44	180°00'00»		
	ω5	-4,4							

Приближенные координаты каждого вновь определяемого пункта вычисляют в табл. 24 по двум сторонам треугольника с точностью до сантиметра. Среднее арифметическое из двух значений координат пункта выписывают в табл. 25, в которую также вносят координаты исходных пунктов.

Таблица 24

Вычисление приближенных координат пунктов

Формулы	i=1	1	2	2
	k=2	6		
α исх.	134°25′08,9″	134°25′08,9″	314°25′08,9″	296°26'58,47"
±β	0	+92 16 58,64	-44 58 10,43	-54 07 13,17
α ik	134 25 08,9	226 42 07,54	269 26 58,47	215 19 45,30
X k	247839,95	247796,30	247796,31	243958,42
X i	250000,00	250000,00	247839,95	247839,95
Δ x ik	-2160,05	-2203,70	-43,64	-3881,53
cos α ik	-0,6999020	-0,6857917	-0,0096066	-0,8158425
S ik	3086,22	3213,36	4543,18	4757,70
Δ y ik	2204,30	-2338,68	-4542,99	-2751,26
sin α ik	0,7142389	-0,7277978	-0,9999539	-0,5782742
Y i	250000,00	250000,00	252204,30	252204,30
Y k	252204,30	247661,32	247661,33	249453,04

Формулы	6	3	4	6
	4		5	
α исх.	154°58′28,53″	334°58′28,53″	33°59'35,16"	213°59'35,16"
±β	+59 01 06,63	-74 12 35,63	-84 11 15,8	+41 20 22,60
α ik	213 59 35,16	260 45 52,90	309 48 19,36	255 19 57,76
X k	243158,59	243158,59	246064,93	246064,93
X i	247796,31	243958,42	243158,59	247796,31
Δ x ik	-4637,72	-799,83	2906,34	-1731,38
cos α ik	-0,8291073	-0,1604894	0,6401818	-0,2532057
S ik	5593,65	4983,68	4539,87	6837,84
Δ y ik	-3127,37	-4919,08	-3487,63	-6615,01
sin α ik	-0,5590896	-0,9870376	-0,7682234	-0,9674125
Y i	247661,33	249453,04	244533,96	247661,33
Y k	244533,96	244533,96	241046,33	241046,32

Таблица 25

Координаты исходных и определяемых пунктов

Номер пункта	Приближённые,м		Поправки,м		Окончательные	
	X_0	Y_0	δx	δy	X	Y
1					250000,00	250000,00
2					247839,95	252204,30
3	243958,42	249453,04	-0,02	0,00	243958,40	249453,04
4	243158,59	244533,96	-0,01	+0,01	243158,58	244533,97
5	246064,93	241046,33	0,00	0,00	246064,93	241046,33
6	247796,31	247661,33	+0,01	-0,02	247796,32	247661,31

Таблица 26

Вычисление дирекционных углов всех сторон сети по координатам

Формулы	i=1	2	2	3
	k=6	6	3	4
Y k	247661,33	247661,33	249453,04	244533,96
Y i	250000,00	252204,30	252204,30	249453,04
Δ y ik	-2338,67	-4542,97	-2751,26	-4919,08
tg α ik	0,0185247	-3,9737184	0,0123716	0,1077537
Δ x ik	-2203,69	-43,64	-3881,53	-799,83
X k	247796,31	247796,31	243958,42	243158,59
X i	250000,00	247839,95	247839,95	243958,42
α ik	226 42 07,53	269 26 58,67	215 19 45,57	260 45 52,82
Δ x ik+Δ y ik	-4542,36	-4586,61	-6632,79	-5718,91
Δ x ik-Δ y ik	134,98	4499,33	-1130,27	4119,25
tg (α ik+45)	-33,6447174	-1,0193984	5,8682811	-1,3883477
α ik+45	271 42 07,53	314 26 58,67	260 19 45,57	305 45 52,82
sin α ik	-0,7278023	-0,9999539	-0,5782717	-0,9870375
cos α ik	-0,6857871	-0,0099056	-0,8158423	-0,1604781
S=Δ y ik/sin α ik	3213,35	4543,18	4757,70	4983,68
S=Δ x ik/cos α ik	3213,35	4543,18	4757,70	4983,68

Формулы	4	6	6	6
	5	3	5	4
Y k	241046,33	249453,04	241046,33	244533,96
Y i	244533,96	247661,31	247661,33	247661,31
Δ y ik	-3487,63	1791,74	-6615,00	-3127,37
tg α ik	-0,0209476	-0,0081483	0,0667807	0,0117698
Δ x ik	2906,34	-3837,91	-1731,38	-4637,72
X k	246064,93	243958,41	246064,93	243158,59
X i	243158,59	247796,32	247796,31	247796,31
α ik	309 48 19,42	154 58 27,62	255 19 57,67	213 59 35,19
Δ x ik+Δ y ik	-581,29	-2046,17	-8346,38	-7765,09
Δ x ik-Δ y ik	6393,97	-5629,65	4883,62	-1510,35
tg (α ik+45)	-5,1946875	0,0063437	-0,0298378	0,0899715
α ik+45	354 48 19,42	199 58 27,62	300 19 57,67	258 59 35,19
sin α ik	-0,7682233	0,4230241	-0,9674124	-0,5590898
cos α ik	0,64018102	-0,9061184	-0,2532161	-0,8291071
S=Δ y ik/sin α ik	4539,87	4235,55	6837,83	5593,65
S=Δ x ik/cos α ik	4539,87	4235,55	6837,83	5593,65

Уравнения поправок направлений

Для направления, измеренного с определяемого пункта I на определяемый пункт K, уравнение поправок записывается в виде

$$v_{ik} = -\delta z_i - a_{ik}\xi_i - b_{ik}\eta_i + a_{ik}\xi_k + b_{ik}\eta_k + l_{ik}, \tag{23}$$

где δz_i – поправка ориентирующего угла $z^0{}_i$ на станции, ξ_i, η_i, ξ_k, η_k – поправки к приближенным координатам $x^0{}_i, y^0{}_i$ и $x^0{}_k, y^0{}_k$ соответственно, выраженные в дециметрах:

$$\xi = 10\delta x; \qquad \eta = 10\delta y, \tag{24}$$

где поправки δx и δy к координатам этих пунктов даны в метрах; a_{ik} и b_{ik} – коэффициенты, l_{ik} – свободный член уравнения поправок.

Коэффициенты a_{ik} и b_{ik} вычисляют по формулам

$$a_{ik} = -20{,}6265\frac{\sin\alpha^0{}_{ik}}{S_{ik}};$$
$$b_{ik} = 20{,}6265\frac{\cos\alpha^0{}_{ik}}{S_{ik}}, \qquad (25)$$

где α_{ik} – дирекционный угол, S_{ik} – длина стороны, выраженная в километрах.

Контроль вычислений выполняется по формулам

$$a = \frac{(a)}{S}; \qquad b = \frac{(b)}{S}, \qquad (26)$$

где S – длина стороны в километрах, а величины

$$(a) = -20{,}6265\sin\alpha^0{}_{ik}; \qquad (b) = 20{,}6265\cos\alpha^0{}_{ik}$$

выбирают из специальной таблицы.

Свободный член l_{ik} уравнения поправок вычисляют как разность

$$l_{ik} = \alpha^0{}_{ik} - R^0{}_{ik} \text{ или } l_{ik} = z^0{}_{ik} - z^0{}_i \qquad (27)$$

где $\alpha^0{}_{ik}$ – дирекционный угол, вычисленный в табл. 20 по приближенным координатам ; $R^0{}_{ik}$ – приближенно ориентированное направление:

$$R^0{}_{ik} = N'_{ik} + z^0{}_{ik} \qquad (28)$$

N'_{ik} – значение измеренного направления; среднее из n значений $z^0{}_i$ ориентирующего угла на станции:

$$z^0{}_i = \frac{1}{n}\Sigma z^0{}_{ik}, \qquad (29)$$

$$z^0{}_{ik} = \alpha^0{}_{ik} - N'_{ik}, \qquad (29)$$

где n – число измеренных направлений на пункте.

Коэффициенты и свободные члены уравнений поправок направлений вычислены в табл. 27.

Таблица 27

Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений поправок

Номер пункта	Номер направления(ik)	Направления на плоскости N_{ik}	Дирекционные углы α_{ik}	значение ориентирующего угла z_{ik} и z_i	Приближенно ориентированные направления $R_{ik}=N_{ik}+z_i$	Свободные члены L_{ik}	Длины сторон	Коэффициенты	
								a	b
	1-2	00°00'00"	134°25'08,9"	134°25'08,9""	134°25'09,57""	-0,67"	3,086	-4,77	-4,49
1	1-6	92 16 57,3	226 42 07,53	134 25 10,23	226 42 06,87	+0,66	3,213	4,67	-4,40
			$z^0{}_1$	134 25 09,57		-0,01			
	2-3	00°00'00"	215°19'45,57	215°19'45,57"	215°19'45,57"	-1,84	4,758	2,51	-3,54
2	2-6	54 07 10,9	269 26 58,67	215 19 47,77	269 26 58,31	0,36	4,543	4,54	-0,04
	2-1	99 05 20,0	314 25 08,9	215 19 48,90	314 25 07,41	1,49	3,086	4,77	4,67
			$z^0{}_2$	215 19 48,90		+0,01			
	3-4	00°00'00"	260 45 52,82	260 45 52,82	260 45 53,35	-0,53	4,984	4,08	-0,66
3	3-5	23 18 11,5	284 04 02,06	260 45 50,56	284 04 04 85	-2,79	8,667	2,31	0,58
	3-6	74 12 34,8	334 58 28,53	260 45 53,73	334 58 28,15	0,38	4,236	2,06	4,41
	3-2	134 33 49,3	35 19 45,57	260 45 56,27	35 19 42,65	2,92	4,758	-2,51	3,54
			$z^0{}_3$	260 45 53,35		-0,02			
	4-5	0 00 00,00	309 48 19,42	309 48 19,42	309 48 20,31	-0,89	4,540	3,49	2,91
4	4-6	84 11 14,8	33 59 35,19	309 48 20,39	33 59 35,11	0,08	5,594	-2,06	3,06
	4-3	130 57 31,7	80 45 52,82	309 48 21,12	80 45 52,01	0,81	4,984	-4,08	0,66
			$z^0{}_4$	309 48 20,31		0,00			
	5-6	0 00 00,00	75 19 57,67	75 19 57,67	75 19 57,88	-0,21	6,838	-2,92	0,76
5	5-3	28 44 04,9	104 04 02,06	75 19 57,16	104 04 02,78	-0,72	8,667	-2,31	-0,58
	5-4	54 28 20,6	129 48 19,42	75 19 58,82	129 48 18,48	0,94	4,540	-3,49	-2,91
			$z^0{}_5$	75 19 57,88		+0,01			
	6-1	0 00 00,00	46 42 07,53	46 42 07,53	46 42 10,52	-2,99	3,213	-4,67	4,40
6	6-2	42 44 49,6	89 26 58,67	46 42 09,07	89 27 00,12	-1,45	4,543	-4,54	0,04
	6-3	108 16 17,4	154 58 28,53	46 42 11,13	154 58 27,92	0,61	4,236	-2,06	-4,41
	6-4	167 17 23,2	213 59 35,19	46 42 11,99	213 59 33,72	1,47	5,594	2,06	-3,06
	6-5	208 37 44,8	255 19 57,67	46 42 12,87	255 19 55,32	2,35	6,838	2,92	-0,76
			$z^0{}_6$	46 42 10,52		-0,01			

Метод исключения поправок ориентирования

В табл. 28 для нашей сети (см. рис.6) приведены уравнения поправок направлений на станциях с присоединенными к ним суммарным уравнениям.

Таблица 28

Уравнения поправок и суммарные уравнения

Номер пункта	Номер направления	δz	ζ_3	η_3	ζ_4	η_4	ζ_5	η_5	ζ_6	η_6	l	s	p	Поправки из уравнивания υ
1	1-2	-1									-0,67	-0,67	1	-1,45″
	1-6	-1							4,67	-4,40	+0,66	0,66	1	1,46
	Σ	-2							4,67	-4,40	-0,01	0,26	-1/2	δz_1=+0,78
2	2-3	-1	2,51	-3,54							-1,84	-2,87	1	-2,35
	2-6	-1							4,54	-0,04	0,36	4,86	1	0,91
	2-1	-1									1,49	1,49	1	1,46
	Σ	-3	2,51	-3,54					4,54	-0,04	+0,01	3,48	-1/3	δz_2=0,03
3	3-4	-1	-4,08	0,66	4,08	-0,66					-0,53	-0,53	1	-0,22
	3-5	-1	-2,31	-0,58			2,31	0,58			-2,79	-2,79	1	-2,25
	3-6	-1	-2,06	-4,41					2,06	4,41	0,38	0,38	1	0,12
	3-2	-1	2,51	-3,54							2,92	1,89	1	2,36
	Σ	-4	-5,94	-7,87	4,08	-0,66	2,31	0,58	2,06	4,41	-0,01	-1,05	-1/4	δz_3=-0,08
4	4-5	-1			-3,49	-2,91	3,49	2,91			-0,89	-0,89	1	-0,33
	4-6	-1			2,06	-3,06			-2,06	3,06	0,08	0,08	1	-1,07
	4-3	-1	-4,08	0,66	4,08	-0,66					0,81	0,81	1	1,40
	Σ	-3	-4,08	0,66	2,65	-6,63	3,49	2,91	-2,06	3,06	0	0	-1/3	δz_4=-0,20
5	5-6	-1					2,91	-0,76	-2,92	0,76	-0,21	-0,22	1	-0,82
	5-3	-1	-2,31	-0,58			2,31	0,58			-0,72	-0,72	1	-0,29
	5-4	-1			-3,49	-2,91	3,49	2,91			0,94	0,94	1	1,11
	Σ	-3	-2,31	-0,58	-3,49	-2,91	8,71	2,73	-2,92	0,76	0,01	0	-1/3	δz_5=0,19
6	6-1	-1							4,67	-4,4	-2,99	-2,72	1	-1,45
	6-2	-1							4,54	-0,04	-1,45	3,05	1	-0,91
	6-3	-1	-2,06	-4,41					2,06	4,41	0,61	0,61	1	0,39
	6-4	-1			2,06	-3,06			-2,06	3,06	1,47	1,47	1	0,07
	6-5	-1					2,92	-0,76	-2,92	0,76	2,35	2,35	1	1,89
	Σ	-5	-2,06	-4,41	2,06	-3,06	2,92	-0,76	6,29	3,79	-0,01	4,76	-1/5	δz_6=0,04
														$[p\upsilon^2]$=35,31

Составление функции уравненных элементов в сети

Коэффициенты весовых функций для длины и дирекционного угла стороны АМ вычислены в табл. 29.

Таблица 29

Вычисление S_{AM} и α_{AM}		Вычисление коэффициентов		
формулы	результаты	обозначения	формулы	результаты
X_M	243158,59	C_{MA}	cos α de	0,640
X_A	246064,93			
Δ X	2906,34	D_{MA}	sin α de	-0,768
Y_M	244533,96			
Y_A	241046,33	A_{MA}	-20,6265*sin α de / S км	3,490
Δ Y	-3487,63			
tg α de = Δ Y/Δ X	-0,02095	B_{MA}	20,6265*cos α de / S км	2,909
α_{MA}	309°48'19,42"			
sin α_{MA}	-0,768223		Контроль	
cos α_{MA}	0,640182			
$S_{MA} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$	4540		$\sin^2$ α de + $\cos^2$ α de	0,999
$S_{MA} = \Delta X / \cos \alpha_{MA}$	4540			

Линейный вид весовых функций:

$$f_S = -0{,}64\xi_4 + 0\text{б}77\eta_4 + 0{,}64\xi_5 - 0{,}77\eta_5$$

$$f_\alpha = -3\text{б}49\xi_4 - 2{,}91\eta_4 + 3\text{б}49\xi_5 + 2{,}918\eta_5$$

Составление и решение нормальных уравнений

Таблица 30

Общая для сети система редуцированных нормальных уравнений

ζ_3	η_3	ζ_4	η_4	ζ_5	η_5	ζ_6	η_6	L	f_s	f_a	$S'=S+f_s+f_a$	контроль
45,96	-12,40	-25,47	-8,11	5,41	3,93	-11,69	-5,27	7,60	-0,64	-3,49	-4,18	-4,18
	41,69	13,98	-3,97	5,35	-0,32	-3,32	-27,45	-6,00	0,77	-2,91	5,43	5,43
		54,73	6,72	-20,87	-19,98	-14,76	4,73	4,20	0,64	3,49	7,40	7,40
			17,08	-1,98	-8,23	9,41	-8,18	-5,07	-0,77	2,91	-0,19	-0,19
				19,64	7,36	-11,01	-6,10	-1,70			-3,89	-3,89
					13,26	9,75	-4,88	-3,52			-2,63	-2,63
						87,86	-34,20	-23,19			8,86	8,87
							76,77	21,04			16,46	16,47
								45,35			38,70	38,70

Таблица 31

Решение нормальных уравнений

ζ_3	η_3	ζ_4	η_4	ζ_5	η_5	ζ_6	η_6	L	f_s	f_a	S′	контроль
45,96	-12,40	-25,47	-8,11	5,41	3,93	-11,69	-5,27	7,60	-0,64	-3,49	-4,18	-4,18
-1,00	0,27	0,55	0,18	-0,12	-0,09	0,25	0,11	-0,17	0,01	0,08	0,09	0,09
	41,69	13,98	-3,97	5,35	-0,32	-3,32	-27,45	-6,00	0,77	-2,91	5,43	5,43
	38,34	7,10	-6,16	6,81	0,74	-6,47	-28,87	-3,95	0,60	-3,85	4,30	4,30
	-1,00	-0,19	0,16	-0,18	-0,02	0,17	0,75	0,10	-0,02	0,10	-0,11	-0,11
		54,73	6,72	-20,87	-19,98	-14,76	4,73	4,20	0,64	3,49	7,40	7,40
		39,30	3,37	-19,13	-17,95	-20,04	7,15	9,14	0,17	2,27	4,29	4,29
		-1,00	-0,09	0,49	0,46	0,51	-0,18	-0,23	0,00	-0,06	-0,11	-0,11
			17,08	-1,98	-8,23	9,41	-8,18	-5,07	-0,77	2,91	-0,19	-0,19
			14,37	1,71	-5,88	8,03	-14,36	-5,15	-0,80	1,48	-0,61	-0,61
			-1,00	-0,12	0,41	-0,56	1,00	0,36	0,06	-0,10	0,04	0,04
				19,64	7,36	-11,01	-6,10	-1,70	0	0	-3,89	-3,89
				8,27	-1,28	-19,19	4,85	3,17	0,15	2,02	-2,00	-2,00
				-1,00	0,15	2,32	-0,59	-0,38	-0,02	-0,24	0,24	0,24
					13,26	9,75	-4,88	-3,52	0	0	-2,63	-2,63
					2,12	2,05	-5,73	-1,54	-0,18	2,33	-0,96	-0,94
					-1,00	-0,97	2,71	0,73	0,09	-1,10	0,45	0,46
						87,86	-34,20	-23,19	0	0	8,86	8,87
						22,60	-11,95	-5,54	1,00	1,23	7,34	7,33
						-1,00	0,53	0,25	-0,04	-0,05	-0,32	-0,32
							76,77	21,04	0	0	16,46	16,47
							14,11	3,17	-0,51	3,53	20,28	20,27
							-1,00	-0,22	0,04	-0,25	-1,44	-1,43
								45,35			38,70	38,70
									pvv			
									35,31	0,01	0,61	
									1/P	-0,14	-4,94	
ζ_3	η_3	ζ_4	η_4	ζ_5	η_5	ζ_6	η_6					
-0,222	-0,022	-0,114	0,057	0,041	-0,003	0,126	-0,225					

Вычисление поправок направлений. Окончательные вычисления в триангуляции

Таблица 32

Вычисление окончательных координат пунктов

Формулы	i=1	1	2	2
	k=2	6		
α исх.	134°25′08,9″	134°25′08,9″	314°25′08,9″	296°26'58,47"
±β	0	+92 16 57,18	-44 58 11,83	-54 07 13,54
α ik	134 25 08,9	226 42 07,54	269 26 58,47	215 19 45,30
X k	247839,95	247796,31	247796,31	243958,41
X i	250000,00	250000,00	247839,95	247839,95
Δ x ik	-2160,05	-2203,70	-43,64	-3881,53
cos α ik	-0,6999020	-0,6857917	-0,0096066	-0,8158425
S ik	3086,22	3213,36	4543,18	4757,70
Δ y ik	2204,30	-2338,68	-4542,99	-2751,26
sin α ik	0,7142389	-0,7277978	-0,9999539	-0,5782742
Y i	250000,00	250000,00	252204,30	252204,30
Y k	252204,30	247661,32	247661,32	249453,04

Формулы	6	3	4	6
	4		5	
α исх.	154°58′28,53″	334°58′28,53″	33°59'35,16"	213°59'35,16"
±β	+59 01 05,45	-74 12 33,83	-84 11 14,08	+41 20 22,16
α ik	213 59 35,16	260 45 52,90	309 48 19,36	255 19 57,76
X k	243158,58	243158,58	246064,93	246064,93
X i	247796,31	243958,42	243158,58	247796,32
Δ x ik	-4637,72	-799,83	2906,34	-1731,38
cos α ik	-0,8291073	-0,1604894	0,6401818	-0,2532057
S ik	5593,65	4983,68	4539,87	6837,84
Δ y ik	-3127,37	-4919,08	-3487,63	-6615,01
sin α ik	-0,5590896	-0,9870376	-0,7682234	-0,9674125
Y i	247661,32	249453,04	244533,97	247661,31
Y k	244533,97	244533,97	241046,33	241046,33

Оценка точности уравненных элементов сети

Средняя квадратическая ошибка уравненного элемента определяется по формуле:

$$m_F = \mu\sqrt{\frac{1}{P_F}} = 2{,}24 * \sqrt{0{,}1446} = 0{,}85дм = 0{,}08м\,,$$

где μ – средняя квадратическая ошибка единицы веса, определяемая из уравнивания сети,

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{r}} = \sqrt{\frac{35{,}31}{7}} = 2{,}24''\,,$$

v – поправки к измеренным с весами p величинами,

r – число избыточных измерений, равное числу условных уравнений.

Среднюю квадратическую ошибку уравненного угла найдем из выражения

$$m_{УГ} = \mu\cdot\sqrt{2} = 2{,}24\cdot\sqrt{2} = 13{,}16''$$

Из решения системы нормальных уравнений (см. табл.22) находим $P_{y_5} = 37{,}646$.

Вес $P_{X_\%}$ вычислим по формуле

$$P_{X_5} = P_{Y_5}\cdot\frac{A}{C+\dfrac{B^2}{A}} = 23{,}016\,,$$

где С и А – квадратичные коэффициенты соответственно последнего и предпоследнего преобразованных нормальных уравнений; В – коэффициент при $\eta_к$ в предпоследнем преобразованном уравнении.

Средние квадратические ошибки определения абсцисс и ординат пункта Е найдем по формулам

$$m_{X_5} = \mu \cdot \sqrt{P_{X_5}} = 0{,}46\textit{дм} = 0{,}046\textit{м}$$

$$m_{Y_5} = \mu \cdot \sqrt{P_{Y_5}} = 0{,}36\textit{дм} = 0{,}036\textit{м}$$

Общая ошибка положения пункта равна

$$M_5 = \sqrt{m_{x_5} + m_{y_5}} = 0{,}58\textit{дм} = 0{,}058\textit{м}$$

ЛИТЕРАТУРА

Основная учебная литература

1. Яковлев Н. В. Практикум по высшей геодезии. – М.: Недра, 1982.
2. Ассур В. Л., Кутузов М. Н., Муравин М. М. Высшая геодезия. – М.: Недра, 1979.
3. Чеботарёв А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. – М., Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.

Дополнительная учебная и справочная литература

1. ГКИНП-01-006-03. Основные положения о государственной геодезической сети Российской Федерации.
2. Огородова Л.В. Высшая геодезия. Часть III. Теоретическая геодезия PDF. Учебник для вузов. — М: Геодезкартиздат, 2006. — 384 с: ил.