ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная геодезия»

# Методические указания

к заданиям по курсу «Теория математической обработки геодезических измерений»

# «Ошибки измерений»

Авторы
Губеладзе А.Р.,
Яговкина Е.Н.

Ростов-на-Дону, 2018

# Аннотация

В методических указаниях приведены основные формулы, дан порядок математической обработки результатов измерений одной величины. Приведены примеры решения задач. Разработаны варианты индивидуальных заданий для студентов.

Предназначено для студентов по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия» и направлению подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование» очной и заочной форм обучения.

# Авторы

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Прикладная геодезия» Губеладзе А.Р.

ассистент кафедры «Прикладная геодезия» Яговкина Е.Н.

# Оглавление

# 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

## 1.1. Меры точности результатов измерений

В качестве меры точности, характеризующей надежность результатов измерений, используют среднюю квадратическую $m$, среднюю $\vartheta$, вероятную $r$ и предельную $\Delta_{пр}$ ошибки.

Средняя квадратическая ошибка результата измерения вычисляется по формулам

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1.1}$$

или

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}, \tag{1.2}$$

где $\Delta_i$ – истинная ошибка измерения, $\Delta_i = x_i - X$;

$v_i$ – отклонение от арифметической средины, $v_i = x_i - \bar{x}$;

$n$ – число измерений;

$X$ – истинное значение измеряемой величины;

$\bar{x}$ – среднее арифметическое из результатов измерений;

$x_i$ – результаты измерений.

При этом значение данной ошибки определяется с некоторой надежностью, значения которой вычисляется согласно формулам:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} \tag{1.3}$$

и, соответственно,

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}, \tag{1.4}$$

а также вероятностно статистическими методами.

Средняя ошибка – это среднее арифметическое из абсолютных значений ошибок данного ряда

$$\vartheta = \frac{[|\Delta|]}{n}. \qquad (1.5)$$

При $n \to \infty$ между величинами $m$ и $\vartheta$ существует устойчивая зависимость

$$\vartheta = m\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}798\ m \approx \frac{4}{5}m. \qquad (1.6)$$

Вероятная – это такая ошибка, которая делит пополам ряд случайных ошибок, расположенных в порядке возрастания их абсолютных значений.

При $n \to \infty$ между величинами $m$ и $r$ существует устойчивая зависимость

$$r = 0{,}674\ m \approx \frac{2}{3}m. \qquad (1.7)$$

За предельную ошибку принимают утроенное значение средней квадратической ошибки, т.е.

$$\Delta_{пр} = 3m. \qquad (1.8)$$

## 1.2. Свойства случайных ошибок

Нормальное распределение является достаточно правдоподобной моделью образования случайных ошибок измерений. В этой модели предусматривается возможность появления ошибок от $-\infty$ до $+\infty$. При этом используется нормированная функция плотности распределения (рис. 1), математическое ожидание которой MX = 0, а среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1$.

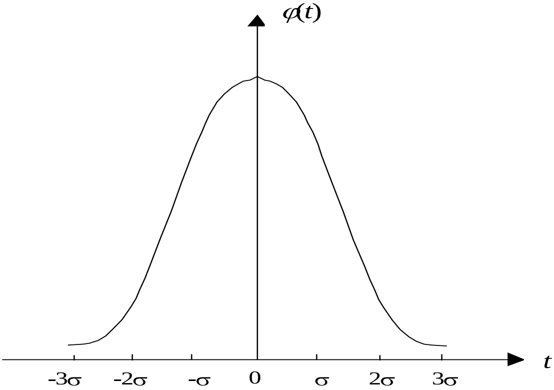


Рис.1

Нормированную нормальную кривую мож-но представить как кривую распределения нормированной случай-ной величины

$$t = \frac{x-a}{\sigma},$$

где $a$ – математическое ожидание случайной ве-личины X.

Нормированную плотность

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (1.9)$$

используют для расчета кривой распределения, соответству-ющей данному эмпирическому ряду.

Свойства случайных ошибок измерений проявляются при массовых испытаниях и могут быть характеризованы следующим образом.

Первое свойство. При данных условиях измерений случайные ошибки не могут превосходить по абсолютной величине определенного предела, т.е.

$$|\Delta| \le 3\sigma. \qquad (1.10)$$

Второе свойство. Малые по абсолютной величине ошибки встречаются чаще, чем большие.

Третье свойство. Положительные ошибки появляются так же часто, как и равные им по абсолютной величине отрица-тельные ошибки, т.е. положительные и отрицательные ошибки равновозможны:

$$P(+\Delta) = P(-\Delta). \qquad (1.11)$$

Четвертое свойство. Среднее арифметическое из случайных ошибок измерений одной и той же величины стремится к нулю при неограниченном возрастании числа наблюдений, т.е. математическое ожидание случайной ошибки равно нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=M(\Delta)=0 \quad . \qquad (1.12)$$

**Задача 1.1.** Проанализировать свойства невязок треугольников, приведенных в табл. 1. Определить средние квадратические ошибки вычисления невязки треугольника, измеренного угла, среднюю, вероятную и предельную ошибки.

Таблица 1

| № пп | $w_i$, с | $w_i\,w_i$ | № пп | $w_i$, с | $w_i\,w_i$ | № пп | $w_i$, с | $w_i\,w_i$ | № пп | $w_i$, с | $w_i\,w_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 0,02 | 0,004 | 12 | -0,38 | 0,1444 | 23 | -0,75 | 0,5625 | 34 | 0,50 | 0,2500 |
| 2 | 0,33 | 0,1089 | 13 | -0,64 | 0,4096 | 24 | 1,37 | 1,8769 | 35 | 0,85 | 0,7225 |
| 3 | 0,57 | 0,3249 | 14 | 1,28 | 1,6384 | 25 | -1,53 | 2,3409 | 36 | -1,96 | 3,8416 |
| 4 | -1,14 | 1,2996 | 15 | 0,07 | 0,0049 | 26 | 0,17 | 0,0289 | 37 | -0,27 | 0,0729 |
| 5 | -0,03 | 0,0009 | 16 | 0,39 | 0,1521 | 27 | -0,45 | 0,2025 | 38 | -0,51 | 0,2601 |
| 6 | 0,34 | 0,1156 | 17 | -0,69 | 0,4761 | 28 | -0,77 | 0,3465 | 39 | -0,92 | 0,8464 |
| 7 | 0,62 | 0,3844 | 18 | -1,32 | 1,7424 | 29 | 1,85 | 3,4225 | 40 | 1,98 | 3,9204 |
| 8 | 1,24 | 1,5376 | 19 | 0,11 | 0,0121 | 30 | -0,23 | 0,0529 | 41 | 2,31 | 5,3361 |
| 9 | -0,05 | 0,0025 | 20 | -0,42 | 0,1764 | 31 | 0,48 | 0,2304 | 42 | -0,31 | 0,0961 |
| 10 | 0 | 0 | 21 | -1,10 | 1,2100 | 32 | 0 | 0 | 43 | 0,06 | 0,0036 |
| 11 | 0,55 | 0,3025 | 22 | -2,49 | 6,2001 | 33 | 0,18 | 0,0324 | 44 | -0,07 | 0,0049 |
| С у м м ы | | | | | | | | | | +15,27<br>-16,03 | 40,6948 |

**Решение.** Числовыми характеристиками данного ряда являются:

Среднее значение невязки

$$w_{cp} = \frac{[w]}{n} = \frac{-0.76}{44} = -0{,}02'' ;$$

средняя ошибка

$$\vartheta = \frac{[|w|]}{n} = \frac{31{,}30}{44} = 0{,}71'' ;$$

средняя квадратическая ошибка определения невязки

$$m = \sqrt{\frac{[ww]}{n}} = \sqrt{\frac{40{,}6948}{44}} = 0{,}96'' ;$$

средняя квадратическая ошибка измеренного угла в треугольнике

$$m_\beta = \frac{m}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}96}{\sqrt{3}} = 0{,}56'' .$$

Срединная (вероятная) ошибка представляет собой медиану упорядоченного ряда невязок, т.е. 23-я и 24-я ошибки, значения которых соответственно равны 0,57″ и 0,62″:

$$r = \frac{0{,}57 + 0{,}62}{2} = 0{,}60 .$$

Вычисление $\vartheta$ и $r$ через среднюю квадратическую ошибку дает следующие результаты:

$$\vartheta = 0{,}789 \cdot m = 0{,}798 \cdot 0{,}96 = 0{,}77'';$$
$$r = 0{,}674 \cdot m = 0{,}674 \cdot 0{,}96 = 0.65''.$$

Вычислим предельную ошибку $\Delta_{пр}$:

$$\Delta_{пр} = 3m = 3 \cdot 0{,}96 = 2{,}88''.$$

Установим, можно ли отнести невязки треугольников к разряду случайных ошибок по их свойствам [ 1 ]:

1) ограничение невязок пределом ( $|w_{max}| = 2{,}49 \leq 3m = 2{,}88''$) имеет место;

2) группировка по интервалам

от 0 до $m \rightarrow$ 32 невязки,
от $m$ до $2m \rightarrow$ 8 невязок
от $2m$ до $3m \rightarrow$ 4 невязки

показывает, что малые по абсолютной величине ошибки встречаются чаще, чем большие;

3) равновозможность появления положительных и отрицательных невязок подтверждается, т.к. $(+w) = 23$ и $(-w) = 21$;

4) значение среднего арифметического из невязок $w_{ср} = -0{,}02'' \approx 0$.

Таким образом, получившиеся в результате измерений углов невязки по выявленным свойствам можно отнести к случайным ошибкам.

## 1.3. Определение ошибок функций измеренных величин

Средняя квадратическая ошибка функции вида

$$Y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.13}$$

вычисляется по формуле

$$M_Y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2 \tag{1.14}$$

где $x_i$ – результаты непосредственных измерений независимых величин;
$m_i$ – средние квадратические ошибки этих измерений.

На основании формулы (1.14) получены следующие средние квадратические ошибки:

средняя квадратическая ошибка линейной функции вида

$$Y = \pm k_1x_1 \pm k_2x_2 \pm \ldots \pm k_nx_n, \qquad (1.15)$$

где $k_i$ – постоянные коэффициенты;
$x_i$ – измеренные величины со средними квадратическими ошибками $m_i$,

$$m_y^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \ldots + k_n^2 m_n^2. \qquad (1.16)$$

При $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 1$

$$m_y^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2. \qquad (1.17)$$

Если принять $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, то

$$m_y = m \cdot \sqrt{n}, \qquad (1.18)$$

т.е. средняя квадратическая ошибка суммы равноточно измеренных величин в $\sqrt{n}$ больше ошибки одного измерения.

Средняя квадратическая ошибка среднего арифметического из результатов равноточных измерений

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad (1.19)$$

Средняя квадратическая ошибка функции вида

$$Y = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_3} \qquad (1.20)$$

определится с помощью натуральных логарифмов [ 2 ]:

$$\ln Y = \ln x_1 + \ln x_2 - \ln x_3. \qquad (1.21)$$

Применяя формулу (1.14), получим

$$\frac{m_y^2}{Y^2} = \frac{m_1^2}{x_1^2} + \frac{m_2^2}{x_2^2} + \frac{m_3^2}{x_3^2}. \qquad (1.22)$$

**Задача 1.2.** В треугольнике измерены два угла со средними квадратическими ошибками $m_1 = 5{,}0''$ и $m_2 = 3{,}0''$. Найти среднюю квадратическую ошибку третьего угла, вычисленного по двум измеренным.

**Решение.** Так как значение третьего угла треугольника определяется

$$\beta_3 = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2),$$

и измерения являются равноточными, то, согласно формуле (1.17), ошибка третьего угла вычисляется

$$m_3^2 = m_1^2 + m_2^2.$$

Подставляя численные значения, получим

$$m_3 = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} = 5{,}8''.$$

**Ответ:** $m_3 = 5{,}8''$.

**Задача 1.3.** Найти среднюю квадратическую ошибку $m_h$ определения превышения по нивелирному ходу длиной 2,5 км, если среднее расстояние от нивелира до рейки составляло 50 м, а ошибка измерения превышения на станции равна $m = 1{,}0$ мм.

**Решение.** Используя формулу (1.18), получим

$$m_h = m \cdot \sqrt{n},$$

где $m$ – средняя квадратическая ошибка определения превышения на станции;
$n$ – число станций, которое в нашем случае определится

$$n = \frac{L}{2l} = \frac{2500}{2 \cdot 50} = 25,$$

$L$ – длина хода, м;
$l$ – длина визирного луча.
После подстановки числовых значений имеем

$$m_h = 1{,}0 \cdot \sqrt{25} = 5{,}0 \text{ мм}.$$

**Ответ:** $m_h = 5{,}0$ мм .

**Задача 1.4.** Средняя квадратическая ошибка измерения угла $m = 30''$. Определить число измерений, необходимое для получения результата со средней квадратической ошибкой $M = 10''$.

**Решение.** Согласно формуле (1.19), имеем

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}},$$

откуда получим

$$n = \frac{m^2}{M^2} = \frac{30^2}{10^2} = 9 \text{ раз}.$$

**Ответ:** $n = 9$ раз .

**Задача 1.5.** В треугольнике измерена сторона $b = 418{,}42 \pm 0{,}18$ м и углы, прилежащие к ней: $A = 46^\circ\ 14{,}4' \pm 0{,}70'$ и $C = 52^\circ\ 11{,}46 \pm 0{,}70'$. Определить противолежащую углу $A$ сторону и ее среднюю квадратическую ошибку.

**Решение.** Для определения стороны $a$ воспользуемся теоремой синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{или} \quad a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}.$$

Сначала вычислим величину угла $B$ по двум измеренным

$$B = 180^\circ - (A + C) = 81^\circ\ 34{,}0'.$$

Средняя квадратическая ошибка вычисленного угла $B$

$$m_B = \sqrt{m_A^2 + m_C^2} = 0{,}70 \cdot \sqrt{2} = 1{,}0'.$$

Далее получим сторону $a$:

$$a = \frac{418{,}42 \cdot \sin 46^\circ 14{,}4'}{\sin 81^\circ 34{,}0'} = 305{,}48 \text{ м}.$$

Для определения средней квадратической ошибки стороны $a$ воспользуемся натуральными логарифмами

$$\ln a = \ln b + \ln \sin A - \ln \sin B.$$

Применяя формулу (1.14), получим

$$\frac{m_a^2}{a^2} = \frac{m_b^2}{b^2} + ctg^2 A \frac{m_A^2}{\rho^2} + ctg^2 B \frac{m_B^2}{\rho^2}.$$

Подстановка исходных данных в полученную формулу приводит к следующему результату:

$$m_a = \sqrt{305{,}48^2 \left( \frac{0.18^2}{418{,}42^2} + 0.9577^2 \frac{0{,}7^2}{3438^2} + 0{,}1483^2 \frac{1}{3438^2} \right)} = 0{,}15 \text{ м}.$$

**Ответ:** $a$ = 305,48 м; $m_a$ = 0,15 м .

## 1.4. Принцип равных влияний

При решении обратной задачи оценки точности функций – расчета точности измерения аргументов при заданной средней квадратической ошибки функции применяют принцип равных влияний. В этом случае устанавливают, что влияние ошибок измерений $m_i$ на среднюю квадратическую ошибку функции $M_F$ одинаково [ 2 ]. Тогда из формулы (1.14) следует

$$\frac{M_F^2}{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 = \ldots = \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2,$$

или

$$\frac{M_F}{\sqrt{n}} = \left|\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) m_1\right| = \left|\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right) m_2\right| = \ldots = \left|\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right) m_n\right|. \quad (1.23)$$

Из равенств (1.23) определяются средние квадратические ошибки $m_i$ измерений отдельных величин.

**Задача 1.6.** Горизонтальное проложение $S$ наклонной линии $D$ определяют по формуле $S = D \cdot \cos\nu$. С какой точностью необходимо измерить расстояние $D$ и угол наклона $\nu$, чтобы горизонтальное проложение получить со средней квадратической ошибкой $m_S$ = 0,10 м ? При этом измеренные расстояние $D$ = 900,0 м и угол наклона $\nu$ = 15°.

**Решение.** Поскольку ошибка функции известна, а необходимо определить ошибки аргументов, то воспользуемся принципом равных влияний.

Средняя квадратическая ошибка вычисления горизонтального проложения $S$ определится согласно формуле

$$m_S^2 = \cos^2\nu \cdot m_D^2 + D^2 \sin^2\nu \frac{m_\nu^2}{\rho^2}.$$

Применяя принцип (1.23), получим

$$\frac{m_S}{\sqrt{2}} = \left|\cos\nu \cdot m_D\right| = \left|D \cdot \sin\nu \frac{m_\nu}{\rho}\right|.$$

Из полученных равенств вычислим средние квадратические ошибки измерений расстояния $m_D$ и угла наклона $m_\nu$:

$$m_D = \frac{m_S}{\sqrt{2} \cdot \cos\nu} = \frac{0{,}10}{\sqrt{2} \cdot 0.966} = 0.07 \text{ м}.$$

Относительная ошибка измерения длины линии должна составить

$$\frac{m_D}{D} = \frac{0{,}07}{900} = \frac{1}{12000}.$$

Средняя квадратическая ошибка измерения угла наклона вычисляется следующим образом:

$$m_\nu = \frac{m_S \cdot \rho}{\sqrt{2} \cdot D \cdot \sin\nu} = \frac{0{,}10 \cdot 3438}{\sqrt{2} \cdot 900 \cdot 0{,}259} = 1{,}0'.$$

**Ответ:** $\frac{m_D}{D} = \frac{1}{12000}$; $m_\nu = 1{,}0'$.

## 1.5. Неравноточные измерения

Вес измерения является степенью доверия к результату измерения и выражается следующими соотношениями:

$$p_i = \frac{C}{m_i^2} \quad \text{и} \quad p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \qquad (1.24)$$

где $C$ – произвольное число, постоянное для данного ряда измерений;
$m_i$ – средняя квадратическая ошибка результата измерения;
$\mu$ – ошибка единицы веса, которая вычисляется по формулам:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}} \quad \text{и} \quad \mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \tag{1.25}$$

или принимается априорно согласно условиям измерений.

В случае неравноточных измерений арифметическая средина определяется как весовое среднее по формуле:

$$\bar{x}_o = \frac{[px]}{[p]} . \tag{1.26}$$

При этом вес общей арифметической средины будет равен сумме весов результатов измерений, т.е.

$$P_0 = [\,p\,] . \tag{1.27}$$

Средняя квадратическая ошибка этой величины вычисляется по формуле:

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{P_0}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} . \tag{1.28}$$

Используя формулу вычисления обратного веса функции независимых величин

$$\frac{1}{P_F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 \frac{1}{p_n} , \tag{1.29}$$

можно определять веса различных значений.

Обратный вес суммы неравноточных слагаемых

$$\frac{1}{p_\Sigma} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} . \tag{1.30}$$

Вес суммы равноточно измеренных величин в $n$ раз меньше веса одного измерения, т.е.

$$p_{\Sigma} = \frac{p}{n}. \tag{1.31}$$

Вес простой арифметической средины в $n$ больше веса одного измерения

$$P = p \cdot n. \tag{1.32}$$

**Задача 1.7.** Вес угла равен 9. Найти среднюю квадратическую ошибку этого угла, если ошибка единицы веса равна 15″.

**Решение.** Из выражения (1.24) получим значение средней квадратической ошибки, т.е.

$$m_{\beta} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{\beta}}}.$$

Подставив в равенство числовые значения, вычислим величину ошибки измеренного угла

$$m_{\beta} = \frac{15''}{\sqrt{9}} = 5''.$$

**Ответ:** $m_{\beta}$ = 5″.

**Задача 1.8.** Веса независимо измеренных углов соответственно равны 5, 3 и 2. Определить вес суммы измеренных углов.

**Решение.** Воспользовавшись формулой (1.30), найдем вес суммы неравноточно измеренных углов

$$\frac{1}{p_{\Sigma\beta}} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{31}{30}$$

или

$$p_{\Sigma\beta} = \frac{30}{31} = 0{,}97 \approx 1.$$

**Ответ:** $p_{\Sigma\beta} = 1$.

**Задача 1.9.** Сторона квадрата $a$ = 10 м измерена с весом $p_a$ = 20. Определить вес вычисленной площади.

**Решение.** Площадь квадрата вычисляется по формуле

$$S = a^2.$$

Так как функциональная зависимость между определяемой величиной и измеряемым параметром известна, то для нахождения веса площади воспользуемся формулой (1.29)

$$\frac{1}{p_S} = \frac{4a^2}{p_a}.$$

Подстановка исходных данных приводит к следующему результату:

$$\frac{1}{p_S} = \frac{4 \cdot 10^2}{20} = \frac{400}{20} = 20.$$

или

$$p_S = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

**Ответ:** $p_S$ = 0,05.

**Задача 1.10.** Угол получен со средней квадратической ошибкой $M_1$ = 4,5″. Сколько приемов нужно сделать инструментом, дающем результат одного измерения со средней квадратической ошибкой $m_2$ =11,2″, чтобы веса углов оказались одинаковыми?

**Решение.** Если веса $P_1 = P_2$, то и $M_1 = M_2$ = 4,5″. Тогда, используя формулу (1.19), будем иметь

$$n_2 = \frac{m_2^2}{M_2^2} = \frac{125{,}44}{20{,}25} = 6.$$

**Ответ:** $n_2 = 6$.

**Задача 1.11.** Найти обратный вес функции

$$y = \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{3}x_3,$$

если веса аргументов соответственно равны $p_1 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}50$, $p_3 = 1{,}0$.

**Решение.** По формуле (1.29) находим

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{p_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p_2} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{p_3}$$

или

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{4}{9} = \frac{43}{36}.$$

Отсюда

$$p_y = 0{,}84.$$

**Ответ:** $p_y = 0{,}84$.

# 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

В процессе геодезических работ или при исследовании новых приборов, методов часто одну и ту же величину измеряют многократно. Возникает необходимость получить наиболее надежное значение из ряда измерений и оценить точность полученных результатов.

## 2.1. Обработка результатов равноточных измерений одной величины

1. Определяют вероятнейшее из всех результатов измерений значение, т.е. арифметическое среднее:

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}.$$

2. Вычисляют отклонения от арифметической средины $v_i = x_i - \bar{x}$. Для контроля подсчитывают $[v] = 0$.

3. Определяют величину $[vv]$.

4. Вычисляют средние квадратические ошибки результатов измерений и полученных значений по формулам, приведенным в п. 1.

**Задача 2.1.** По результатам измерения угла, приведенным в табл. 2, найти наиболее надежное значение этого угла и оценить точность результатов измерений и вычисленного вероятнейшего значения угла.

**Решение.** Выполнять обработку результатов измерений рекомендуется согласно табл. 2.

Таблица 2

| № п.п. | Значение угла $x_i$ | Отклонения $v_i$, сек | $v_i\, v_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 81° 35′ 26″ | +2,2 | 4,8 |
| 2 | 81 35 32 | -3,8 | 14,4 |
| 3 | 81 35 24 | +4,2 | 17,6 |
| 4 | 81 35 28 | +0,2 | 0 |
| 5 | 81 35 33 | -4,8 | 23,0 |
| 6 | 81 35 25 | +3,2 | 10,2 |
| 7 | 81 35 31 | -2,8 | 7,8 |
| 8 | 81 35 22 | +6,2 | 38,4 |
| 9 | 81 35 34 | -5,8 | 33,6 |
| 10 | 81 35 29 | -0,8 | 0,6 |
| 11 | 81 35 25 | +3,2 | 10,2 |
| 12 | 81 35 30 | -1,8 | 3,2 |
| $\bar{x}$ = | 81° 35′ 28,2″ | [ $v$ ] = -0.6 | [ $vv$ ] = 163,8 |

Вычисляем вероятнейшее значение угла:

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n} = 81^{\circ}35'28{,}2''.$$

Найдем среднюю квадратическую ошибку результата измерения угла:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{163{,}8}{12-1}} = 3{,}9''.$$

Оценим надежность вычисления средней квадратической ошибки:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{3{,}9}{\sqrt{2(12-1)}} = 0{,}83''.$$

Определим среднюю квадратическую ошибку нахождения вероятнейшего значения угла:

$$m_\beta = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}9}{\sqrt{12}} = 1{,}1''.$$

**Ответ:** $\bar{x} = 81^\circ 35' 28{,}2'' \pm 1{,}1''$.

## 2.2. Обработка результатов неравноточных измерений одной величины

1. Устанавливают веса согласно выражениям:

$$p_i = \frac{C}{m_i^2} \quad \text{и} \quad p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$$

или в зависимости от видов работ и применяемых методов измерений.

2. Вычисляют наиболее надежное значение согласно формуле:

$$\bar{x} = \frac{[px]}{[p]}.$$

3. Определяют отклонения от арифметической средины и вычисляют $p_i v_i$ и $[pv]$. Контролем служит равенство $[pv] = 0$.

4. Вычисляют значение ошибки единицы веса, ее надежность, а также среднюю квадратическую ошибку наиболее надежного значения.

## 2.3. Оценка точности по разностям двойных равноточных измерений

Если произведен ряд однородных парных измерений $x'_i$ и $x''_i$, то рассматривая разности $d_i$ как истинные ошибки самих разностей

$$d_i = x'_i - x''_i\ , \qquad (2.1)$$

можно вычислить среднюю квадратическую ошибку разности

$$m_d = \sqrt{\frac{[dd]}{n}}\ .$$

Средняя квадратическая ошибка одного измерения определится по формуле [ 1 ]:

$$m = \sqrt{\frac{[dd]}{2n}}\ . \qquad (2.2)$$

Средняя квадратическая ошибка среднего из парных измерений составит:

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[dd]}{n}}\ . \qquad (2.3)$$

Эти формулы применяются при отсутствии систематических ошибок. В качестве критерия влияния систематических ошибок используют следующие условие:

$$|\,[\,d\,]\,| \le 0{,}25[\,|\,d\,|\,]\ . \qquad (2.4)$$

При наличии систематических ошибок вычисляют их среднее значение

$$d_0 = \frac{[d]}{n}. \qquad (2.5)$$

Исключая величину $d_0$ из разностей $d_i$, получают значения

$$d_i' = d_i - d_0, \qquad (2.6)$$

которые, будут свободны от систематического влияния.

При этом следует иметь в виду, что поскольку $d_0$ является средним арифметическим значением разностей, а, следовательно, $d_i$ – отклонения от арифметической средины. Поэтому для нахождения средней квадратической ошибки разности можно воспользоваться формулой:

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'd']}{n-1}}. \qquad (2.7)$$

Средняя квадратическая ошибка одного измерения в этом случае составит:

$$m = \sqrt{\frac{[d'd']}{2(n-1)}}, \qquad (2.8)$$

а ошибка среднего из парных значений результатов измерений

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d'd']}{n-1}}. \qquad (2.9)$$

## 2.4. Оценка точности по разностям двойных неравноточных измерений

Оценка точности ряда парных неравноточных измерений производится по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d dd]}{n}}, \tag{2.10}$$

в которой веса разностей определяются согласно

$$p_{d_i} = \frac{p_i' \cdot p_i''}{p_i' + p_i''}, \tag{2.11}$$

где $p_i'$ и $p_i''$ – веса результатов измерений.

Если $p_i' = p_i''$, то $p_{d_i} = \frac{d_i}{2}$, тогда

$$\mu = \sqrt{\frac{[pdd]}{2n}}. \tag{2.12}$$

При наличии систематических ошибок в разностях двойных неравноточных измерений определяют значение $d_0$:

$$d_0 = \frac{[pd]}{[p]}. \tag{2.13}$$

Ошибка единицы веса определится согласно формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d'd']}{n-1}} \tag{2.14}$$

или

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd'd']}{2(n-1)}}, \qquad (2.15)$$

где $d'_i$ – значения разностей, свободные от систематического влияния.

Критерием применимости формул (2.12) и (2.14) служит условие:

$$\left|\left[d\sqrt{p}\right]\right| \le 0{,}25\left[\left|d\sqrt{p}\right|\right]. \qquad (2.16)$$

В противном случае используют формулы (2.14) и (2.15).

**Задача 2.2.** В табл. 3 приведены результаты двойного нивелирования девяти ходов. Оценить точность выполненных работ по разностям двойных измерений.

Таблица 3

| Превышеия *h*, мм | | Число штативов $n_i$ | Вес $p_i = \frac{10}{n_i}$ | Разности $d_i$, мм | $p_i d_i$, мм | $d'_i$, мм | $p_i d'_i$, мм | $p_i d'_i d'_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Прямой ход | Обратный ход | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1,113 | 1,117 | 3 | 3,3 | -4 | -13,2 | -2 | -6,6 | 13,2 |
| 0,869 | 0,874 | 5 | 2,0 | -5 | -10,0 | -3 | -6,0 | 18,0 |
| 2,136 | 2,133 | 7 | 1,4 | +3 | +4,2 | +5 | +7,0 | 35,0 |
| 4,015 | 4,011 | 6 | 1,7 | +4 | +6,8 | +6 | +10,2 | 61,2 |
| 0,477 | 0,487 | 10 | 1,0 | -10 | -10,0 | -8 | -8,0 | 64,0 |
| 3,210 | 3,218 | 9 | 1,1 | -8 | -8,8 | -6 | -6,6 | 39,6 |
| 0,305 | 0,302 | 8 | 1,2 | +3 | +3,6 | +5 | +6,0 | 30,0 |
| 6,843 | 6,852 | 12 | 0,8 | -9 | -7,2 | -7 | -5,6 | 39,2 |
| 1,408 | 1,406 | 4 | 2,5 | +2 | +5,0 | +4 | +10,0 | 40,0 |
| Суммы | | | 15,0 | | -33,8 | | 0,4 | 340,2 |

**Решение.** Для расчета весов по формуле $p = \frac{C}{n}$ принимается $C = 10$.

Величина $[pd] = -33{,}8$ показывает на наличие систематических ошибок в результатах измерений. Проверяем с помощью критерия (2.16):

$$\left|\left[d\sqrt{p}\right]\right| = 25{,}54 \geq 0{,}25 \cdot \left[\left|d\sqrt{p}\right|\right] = 13{,}98,$$

что указывает на наличие систематических ошибок. Определим

$$d_0 = \frac{[pd]}{[p]} = \frac{-33{,}8}{15} = -2{,}2 \approx -2.$$

Подсчитаем значения $d'_i$ и найдем $[pd'] = 0{,}4$. Вычисляем $[pd'd'] = 340{,}2$.

Средняя квадратическая ошибка единицы веса (при $C = 10$ на 10 штативов или 1 км хода)

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd'd']}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{340{,}2}{2(9-1)}} = 4{,}61 \text{ мм.}$$

Средняя квадратическая ошибка нивелирования на станции

$$m_h = \frac{\mu}{\sqrt{C}} = \frac{4{,}61}{\sqrt{10}} = 1{,}46 \text{ мм.}$$

**Ответ:** $\mu = 4{,}61$ мм ; $m_h = 1{,}46$ мм.

# 3. ЗАДАЧИ

3.1.В четырехугольнике измерены три угла со средними квадратическими ошибками: $m_1$ = 8,0″, $m_2$ = 9,0″, $m_3$ = 9,0″. Найти среднюю квадратическую ошибку четвертого угла, вычисленного по первым трем.

3.2. Средняя квадратическая ошибка превышения, полученного на одной станции геометрического нивелирования, равна 2,0 мм. Определить среднюю квадратическую ошибку суммы превышений, полученных на 36 станциях.

3.3. В замкнутом теодолитном полигоне определены 9 углов со средней квадратической ошибкой измерения одного угла, равной 20,0″. Подсчитать ожидаемую величину угловой невязки полигона.

3.4. Из геометрического нивелирования превышение получено как разность отсчетов по двум рейкам со средней квадратической ошибкой 3,0 мм. Найти среднюю квадратическую ошибку отсчета по рейке.

3.5. Определить среднюю квадратическую ошибку отметки конечной точки хода геометрического нивелирования длиной 16 км, если отметка начальной точки имеет среднюю квадратическую ошибку, равную 18 мм, а превышение по ходу получено со средней квадратической ошибкой, равной 6 мм на 1 км.

3.6. Линия измерена пять раз. Средняя квадратическая ошибка среднего из результатов измерений составила 0,20 м. Найти среднюю квадратическую относительную ошибку одного измерения, если длины линии 985,44 м.

3.7. Площадь многоугольника определялась по частям. Средние квадратические ошибки отдельных частей получились следующими: $m_1$ = 10,5 м$^2$, $m_2$ = 14,0 м$^2$, $m_3$ = 9,5 м$^2$, $m_4$ = 8,5 м$^2$. Найти среднюю квадратическую ошибку всей площади многоугольника.

3.8. Длина линии измерялась по частям стальной 20-тиметровой лентой. Длина частей составила 100 и 200 м. Определить абсолютные и относительные средние квадратические ошибки каждой части и всей линии, если средняя квадратическая ошибка одного отложения ленты $m_1$ = 0,005 м.

3.9. Определить среднюю квадратическую ошибку определения радиуса шара $R$ = 10,0 м, если известно, что объем шара $V$, вычисленный по этому значению радиуса, ошибочен на 1,6 м$^3$.

3.10. Средняя квадратическая ошибка определения превышения на станции равна 2,0 мм. Нивелирование производилось по двусторонним рейкам. Найти средние квадратические ошибки: а) суммы превышений, полученных на 16 станциях; б) превышения, вычисленного на станции как разность отсчетов по черным сторонам рейки.

3.11. Средняя квадратическая ошибка непосредственного измерения угла теодолитом составила 30″. Определить минимальное число измерений, необходимое для получений результата со средней квадратической ошибкой не более 10″.

3.12. Площадь квадрата составляет 2670 см$^2$. С какой точностью должна быть измерена сторона, чтобы обеспечить среднюю квадратическую ошибку вычисленного значения площади квадрата 20 см$^2$?

3.13. Для определения секундного расхода воды в реке по формуле $Q = V{\cdot}P$ измерены площадь живого сечения реки $P$= 17,61 м$^2$ с ошибкой 0,43 м$^2$ и скорость течения воды $V$ = 0,43 м/сек. Вычислить $Q$ и $m_Q$.

3.14. Угол $\beta$ получен как разность отсчетов двух направлений. Какова средняя квадратическая ошибка угла $\beta$, если средняя квадратическая отсчета составляет 30″.

3.15. Определить среднюю квадратическую ошибку площади прямоугольника, если известно, что сторона $a$ = 32,64 м измерена со средней квадратической ошибкой $\tau_a$ = 0,01 м, а сторона $b$ = 52,48 м – со средней квадратической ошибкой $\tau_b$ = 0,02 м.

3.16. Определить среднюю квадратическую ошибку площади трапеции, в которой измерены основания $a$ = 82,36±0,15 м, $b$ = 52,28±0,11 м и высота $h$ = 63,14±0,09 м.

3.17. Вычислить среднюю квадратическую ошибку определения гипотенузы треугольника, если катеты его измерены $a$ = 102,26±0,15 м, $b$ = 92,82±0,11 м.

3.18. В треугольнике непосредственно измерены сторона $a$ = 132,14 м со средней квадратической ошибкой $\tau_a$ = 0,05 м, и два угла $\alpha$ = 64º32'20" и $\beta$ = 41º17'09"с одной и той же средней квадратической ошибкой $\tau$ = 8". Определить среднюю квадратическую ошибку стороны $b$.

3.19. Определить относительную среднюю квадратическую ошибку стороны $c$ треугольника, в котором измерены угол $A$ = 39º01'±0,50', угол $B$ = 60º02'±0,50' и сторона $a$ = 292,80±0,10 м.

3.20. Вычислить площадь квадрата и ее среднюю квадратическую ошибку, если его сторона $a$ = 272,43 м измерена со средней квадратической ошибкой $\tau_a$ = 0,15 м.

3.21. Вычислить горизонтальное проложение длины измеренной линии и его среднюю квадратическую ошибку, если $D$ = 202,85 м измерено с ошибкой $m_D$ = 0,12 м и угол наклона $v$ = +12º00' измерен с ошибкой $\tau_v$ = 0,50'.

3.22. На местности измерена длина наклонной линии $D$ = 212,68 м сС средней квадратической ошибкой $m_D$ = 0,05 м и угол наклона к горизонту $v$ = 16º25' со средней квадратической ошибкой $\tau_v$ = 0,8'. Определить среднюю квадратическую ошибку превышения $h$.

3.23. Определить среднюю квадратическую ошибку вычисленного объема прямоугольного параллелепипеда , если его ребра $a$ = 10, $b$ = 8 и $c$ = 6 м измерены со средними квадратическими ошибками $m_a$ = $m_b$ = $m_c$ = 0,05 м.

3.24. Среднее значение угла из 6 приемов имеет среднюю квадратическую ошибку 4,0". Определить среднюю квадратическую ошибку вероятнейшего значения угла, полученного из 16 приемов при тех же условиях.

3.25. Длина стальной 20-метровой ленты определена со средней квадратической ошибкой, равной 1,2 мм. Найти среднюю квадратическую ошибку в длине линии $D$ = 210,88 м, измеренной этой лентой.

3.26. Найти средние квадратические ошибки приращений координат, если известно, что расстояния $d$ = 66,265±0,028 м и *дирекционный* угол $a$ = 40º38'22"±6".

3.27. Вычислить превышение $h = d \cdot tg\nu + i - \upsilon$ и его среднюю квадратическую ошибку, если длина линии $D$ = 165,35±0,12 м и угол наклона $v$ = -5º33'±1,0', высота инструмента $i$ = 0,985±0,005 м и высота наведения $\upsilon$ = 2,986±0,004 м.

3.28. В соединительном треугольнике $ABC$ угол $\beta$ при отвесе $B$ вычислен по формуле

$$\sin\beta = \frac{b}{c}\sin\gamma$$

и оказался равным 6º13'30". В результате непосредственных измерений получены $\gamma$ =5º11'47"±7"; $b$ =2,333±0,001 м; $c$ = 2,131±0,0005 м. Найти среднюю квадратическую ошибку вычисленного угла $\beta$.

3.29. Определить относительную ошибку периметра теодолитного полигона, состоящего из 7 сторон длиной в среднем по 200 м каждая, если относительная ошибка измерения стороны составляет 1/1700.

3.30. Проложен ход геометрического нивелирования по ровной местности протяжением 3000 м при длине визирного луча 50 м. Найти среднюю квадратическую ошибку суммы превышений по всему ходу, если средняя квадратическая ошибка определения превышения на станции равна 1,2 мм.

3.31. Базис геометрической сети длиной 720 м был измерен три раза стальной рулеткой со средней квадратической ошибкой одного отложения 2 мм. Определить среднюю квадратическую и относительную ошибки вероятнейшего значения базиса.

3.32. Значение угла получено как среднее из 16 приемов и имеет среднюю квадратическую ошибку 1,5". Найти среднюю квадратическую ошибку угла, измеренного одним приемом.

3.33. Определить длину и среднюю квадратическую ошибку вычисленного катета прямоугольного треугольника, в котором измерены гипотенуза $c$ = 224,26±0,12 м и противолежащий катету $a$ угол $A$ = 43º24'00"±20".

3.34. Рассчитать, какую среднюю квадратическую ошибку можно допустить при измерении сторон прямоугольника со сторонами $a$ = 40 м и $b$ = 15 м, чтобы вычислить его площадь со средней квадратической ошибкой 4,0 м$^2$: а) по принципу равных влияний, б) принимая $m_a = m_b = m$.

3.35. Для производства угловых измерений в полигонометрии получено три теодолита. Первый теодолит дает результат со средней квадратической ошибкой измерения угла одним приемом 10", второй – с той же ошибкой, равной 15", и третий – с ошибкой 20". Определить, какое минимальное число приемов нужно сделать каждым теодолитом, чтобы обеспечить получение средней квадратической ошибки вероятнейшего угла не более 5"?

3.36. Даны функции, в которых $x$ являются результатами измерений со средней квадратической ошибкой $m$ = 2,0. Найти средние квадратические ошибки вычисленных значений функций: 1) $y = 5 \cdot x$; 2) $y = x_1 \cdot x_2$; 3) $y = x_1 - 4 \cdot x_2$; 4) $y = \frac{x_2 \cdot x_2}{2}$; 5) $y = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_3}$; 6) $y = \frac{x_1 \cdot x_2}{2} + x_3$.

3.37. В треугольнике измерены два угла. Вес каждого из них равен единице. Определить вес третьего угла треугольника, вычисленного по двум измеренным.

3.38. Два угла измерены со средними квадратическими ошибками $m_1$ = 2" и $m$ = 5". Найти веса этих углов.

3.39. Средняя квадратическая ошибка измерения угла 0,5', вес равен 4. Вычислить среднюю квадратическую ошибку единицы веса.

3.40. Углы треугольника определены с весами $P_1$ = 4, $P_2$ = 9, $P_3$ = 16. Средняя квадратическая ошибка единицы веса $\mu$ = 10". Определить средние квадратические ошибки измерения углов.

3.41. Измерение со средней квадратической ошибкой $m_1$ =2" дает вес $p_1$ = 1. Какой вес соответствует измерению со средней квадратической ошибкой $m_2$ = 1.4"?

3.42. Угол измерен тремя приемами. Какой вес имеет полученный результат, если вес определения одного направления принять за единицу?

3.43. Два угла измерены теодолитами: первый 8 приемами, второй – 16. Средняя квадратическая ошибка измерения первого угла составила 5". Определить среднюю квадратическую ошибку измерения второго угла.

3.44. Линия измерена 5 раз с одинаковой точностью. Найти вес арифметической средины, если вес одного измерения линии равен единице.

3.45. Превышение по нивелирному ходу длиной 450 м имеет вес 4. Найти длину хода, которому соответствует превышение с весом единица.

3.46. Вес измерения суммы шести углов многоугольника равен единице (измерения равноточные). Определить вес измерения одного угла.

3.47. Сколько раз необходимо измерить линию длиной 300 м, чтобы вес результата оказался равным трем, если вес результата измерения линии длиной 100 м равен единице?

3.48. В треугольнике измерены два угла, каждый двумя приемами теодолитом, дающим результат измерения угла одним приемом со средней квадратической ошибкой 5".Сколько раз необходимо измерить третий угол треугольника инструментом, дающим результат измерения угла одним приемом 10", чтобы веса всех углов были одинаковы?

3.49. Найти вес угла, полученного как результат многократных измерений, если известно, что средняя квадратическая ошибка результата составляет 8", а ошибка единицы веса равна 20".

3.50. Высота сигнала определена путем измерения зенитного расстояния $z$ = 70º18'30" и расстояния до сигнала $s$ = 124,18 м. Средние квадратические ошибки измерений $m_z$ = 40" и $m_s$ = 0,03 м.

Определить среднюю квадратическую ошибку вычисленной высоты сигнала.

3.51. Угол измерялся четырьмя различными теодолитами. При измерении первым инструментом получен результат 63°21'18" как среднее из двух приемов, вторым 63°21'30" - из четырех приемов, третьим 63°21'12" - из шести приемов, четвертым 63°21'22" – из восьми приемов. Средние квадратические ошибки результата измерения угла одним приемом для теодолитов оказались соответственно 10", 15", 20" и 12". Определить вероятнейшее значение угла и его среднюю квадратическую ошибку.

3.52. Один угол треугольника измерен 10 раз инструментом со средней квадратической ошибкой результата одного измерения $m_1$ = 6". Сколько раз необходимо измерить каждый из оставшихся углов треугольника инструментом, средняя квадратическая ошибка одного измерения угла $m_2$ = 8", чтобы веса углов были одинаковы?

3.53. В прямоугольнике измерялись стороны $a$ = 140 м и $b$ = 86 м с весами $p_a$ = 40 и $p_b$ = 100. Вычислить площадь и ее вес.

3.54. В прямоугольном треугольнике один угол измерен тремя приемами со средней квадратической ошибкой одного измерения $m$ = 30". Величина угла составила $A$ = 43°21'. Значение измеренной гипотенузы $c$ = 280,42 м получено с ошибкой $m_c$ = 0,12 м. Определить длину катета $a$ и его среднюю квадратическую ошибку, если ошибка единицы веса $\mu$ = 0,21 м.

3.55. Средняя квадратическая ошибка измерения угла 15". Найти вес суммы 20 углов, измеренных в тех же условиях, если ошибка единицы веса $\mu$ = 30".

3.56. В треугольнике один угол измерен тремя приемами, второй - шестью. Найти вес третьего вычисленного угла, если все приемы равноточны и вес угла, полученного из одного приема, принят за единицу.

3.57.При определении глубины наклонной шахты измерен вертикальный угол тремя различными теодолитами. Средние квадратические ошибки однократных измерений угла соответственно составили 1,9", 4,5", 6,0". Первым теодолитом угол был измерен 2 раза, вторым – 10 раз и третьим – 20 раз. Найти среднюю квадратическую ошибку окончательного значения угла.

3.58. Принимая вес однократного измерения линии в 20 м за единицу, необходимо установить, сколько раз следует измерить линию длиной в 150 м с тем, чтобы результат измерения этой линии имел вес, равный 0,5?

3.59. Вычислить вес угла $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, если веса углов $\alpha$ и $\beta$ соответственно равны 3 и 5.

3.60. Вычислением получена полусумма углов $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Вес каждого из углов $\alpha$ и $\beta$ равен 5. Найти вес полусуммы углов.

3.61. Угол $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Углы $\alpha$ и $\beta$ измерены каждый 9 приемами. Средние квадратические ошибки результата измерения угла одним приемом оказались $m_\alpha = 3{,}0''$ и $m_\beta = 6{,}0''$. Найти вес угла $\gamma$, приняв за единицу вес вероятнейшего угла $\alpha$.

3.62. Угол $\gamma = \alpha + \beta$. Углы $\alpha$ получен как среднее из результатов измерений 9 приемами со средней квадратической ошибкой измерения одним приемом $m_\alpha = 5{,}0''$. Для угла $\beta$ сделано 16 приемов, причем $m_\beta = 9{,}0''$. Определить вес угла $\gamma$, приняв за единицу вес результата измерения углы $\alpha$ одним приемом.

3.63. Один угол треугольника измерен 16 раз со средней квадратической ошибкой одного измерения $m_1 = 8{,}0''$. Значение второго угла получено с весом $P_2 = 2$. Считая, что вес первого угла равен единице, найти среднюю квадратическую ошибку и вес третьего угла, вычисленного по двум первым.

3.64. Углы треугольника измерялись тремя различными теодолитами. Первый угол был измерен первым теодолитом 6 раз, второй – вторым теодолитом 10 раз и третий – третьим теодолитом 16 раз. Средние квадратические ошибки одного измерения угла для теодолитов соответственно равны 3,0", 4,5", 6,2". Найти вес каждого угла, если за единицу веса принять результат со средней квадратической ошибкой $\mu = 1{,}0''$.

3.65. Определить вес вычисленного объема прямоугольного параллелепипеда, если ребра его $a$ = 10 м и $b$ = 4 м и $c$ = 5 м измерены с весами $p_a = 80$, $p_b = 100$, $p_c = 160$.

3.66. В треугольнике $ABC$ измерены сторона $a$ = 514,12 ±0,05м и прилежащие к ней углы: $B$ = 57º08'16"±7" и $C$ = 75º28'30"±7". Определить длины, средние квадратические ошибки и веса сторон $a$ и $c$ при условии, что ошибка единицы веса $\mu$ = 0,05 м.

3.67. Найти среднюю квадратическую ошибку и вес превышения , вычисленного по формуле $h = s \cdot tg\,v$, если $s$ = 580,92±0,10 м и $v$ = 1º34'10"±12", а ошибка единицы веса $\mu$ = 0,05 м.

3.68. Сторона квадрата $a$ = 60 м измерена с весом $p_a$ = 16. Определить вес площади квадрата.

3.69. Стороны $a$ = 100 м и $b$ = 150 м прямоугольника измерены с весами $p_a$ = 300 и $p_b$ = 200. Определить вес вычисленной площади.

3.70. Катеты прямоугольного треугольника $a$ = 360 м и $b$ = 270 м измерены с весами $p_a$ = 18 и $p_b$ = 24. Определить вес вычисленной гипотенузы $c$.

3.71. Определить вес вычисленной площади треугольника, если основание его $b$ = 15 м получено с весом $p_b$ = 1, а высота $h$ = 30 м – с весом $p_h$ = 0,5.

3.72. Найти вес функции $y = \frac{x_1 - x_2}{2} + x_3$, если вес каждого из аргументов равен 2.

# 4. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

4.1. В табл. 4 приведены значения истинных ошибок результатов измерения угла. Найти среднюю, среднюю квадратическую, вероятную и предельную ошибки измерения угла. Проанализировать свойства случайных ошибок на данном примере.

Таблица 4

| № пп | Ошибки Δ, с | № пп | Ошибки Δ, с | № пп | Ошибки Δ, с | № пп | Ошибки Δ, с |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | -2,42 | 11 | -025 | 21 | 0,18 | 31 | 0,16 |
| 2 | 0,82 | 12 | -0,12 | 22 | -1,28 | 32 | -0,05 |
| 3 | -0,30 | 13 | -1,45 | 23 | 0,64 | 33 | -0,56 |
| 4 | 0,13 | 14 | 0,66 | 24 | 0,17 | 34 | 0,95 |
| 5 | 1,65 | 15 | 0,24 | 25 | 0,10 | 35 | 0,15 |
| 6 | 0,71 | 16 | -0,11 | 26 | 1,27 | 36 | -0,02 |
| 7 | 0,28 | 17 | 1,29 | 27 | -0,58 | 37 | -0,88 |
| 8 | 0,12 | 18 | -0,65 | 28 | -0,17 | 38 | -0,50 |
| 9 | -1,55 | 19 | -0,22 | 29 | 0,08 | 39 | -0,14 |
| 10 | -0,67 | 20 | -0,10 | 30 | 1,12 | 40 | 0,02 |

Указание: каждому студенту к последним двум цифрам исходных данных прибавить номер своего варианта.

3.2. В табл. 5 приведены ошибки, полученные по результатам независимых измерений. Проверить наличие систематической составляющей и определить среднюю квадратическую ошибку результата измерения.

Таблица 5

| № пп | Ошибки | № пп | Ошибки | № пп | Ошибки | № пп | Ошибки | № пп | Ошибки |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 0,45 | 7 | -0,60 | 13 | -3,58 | 19 | 1,33 | 25 | 0,21 |
| 2 | 0,74 | 8 | 1,00 | 14 | 2,71 | 20 | 2,27 | 26 | -2,26 |
| 3 | -0,21 | 9 | 2,81 | 15 | 4,92 | 21 | -1,34 | 27 | -0,55 |
| 4 | 0,52 | 10 | 3,12 | 16 | 0,15 | 22 | -0,25 | 28 | 1,52 |
| 5 | 0,83 | 11 | -0,95 | 17 | 0,84 | 23 | -1,42 | 29 | -1,86 |
| 6 | -1,36 | 12 | 2,14 | 18 | -2,71 | 24 | 5,63 | 30 | 1,24 |

Указание: студент к исходным данным прибавляет номер своего варианта.

3.3. Вычислить предельную невязку в сумме углов каждого треугольника по одному из вариантов, если средние квадратические ошибки $m_i$ углов равны значениям, приведенным в табл. 6.

Таблица 6

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_1$, " | 5,3 | 4,4 | 6,2 | 4,7 | 4,3 | 4,1 | 2,9 | 4,8 | 5,9 | 4,7 |
| $m_2$, " | 4,9 | 3,3 | 3,4 | 5,7 | 5,9 | 3,1 | 5,1 | 5,7 | 3,7 | 3,6 |
| $m_3$, " | 3,8 | 5,1 | 4,4 | 2,7 | 3,1 | 2,2 | 4,6 | 6,4 | 6,6 | 4,0 |
| **Вариант** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| $m_1$, с | 3,1 | 3,8 | 5,5 | 3,6 | 6,6 | 2,7 | 3,8 | 3,3 | 4,7 | 3,8 |
| $m_2$, с | 5,2 | 4,5 | 4,8 | 6,4 | 3,7 | 2,5 | 4,9 | 4,5 | 5,5 | 4,4 |
| $m_3$, с | 4,6 | 2,9 | 2,5 | 2,2 | 4,1 | 4,4 | 5,2 | 3,4 | 6,2 | 3,1 |
| **Вариант** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
| $m_1$, с | 5,6 | 6,1 | 4,8 | 2,8 | 4,6 | 5,4 | 6,4 | 4,2 | 5,2 | 6,4 |
| $m_2$, с | 4,2 | 3,7 | 5,6 | 4,9 | 5,1 | 4,9 | 5,3 | 5,6 | 4,6 | 5,8 |
| $m_3$, с | 3,4 | 4,6 | 3,7 | 5,3 | 3,8 | 3,7 | 4,9 | 3,9 | 6,1 | 4,9 |

3.4. Проложен ход геометрического нивелирования по ровной местности протяжением $L$ при длине визирного луча 50 м. По одному из вариантов, приведенных в табл. 7, вычислить среднюю квадратическую ошибку суммы превышений по всему ходу, если средняя квадратическая ошибка превышения на станции $m$.

Таблица 7

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L$, мм | 1400 | 1600 | 1800 | 2000 | 2200 | 2400 | 2600 | 2800 | 3000 | 3200 |
| $m$, мм | 1,3 | 1,2 | 1,4 | 1,5 | 1,7 | 1,3 | 1,2 | 1,0 | 1,1 | 1,4 |
| **Вариант** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| $L$, мм | 1500 | 1700 | 2100 | 2500 | 2700 | 3100 | 3300 | 3600 | 3900 | 4100 |
| $m$, мм | 1,0 | 1,2 | 1,3 | 1,6 | 1,8 | 1,4 | 1,5 | 1,3 | 1,1 | 1,0 |

Окончание таблицы 7

| **Вариант** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L$, мм | 3400 | 3500 | 3700 | 3800 | 4000 | 4200 | 4400 | 4600 | 4800 | 4700 |
| $m$, мм | 1,5 | 1,8 | 1,6 | 1,9 | 1,7 | 1,3 | 1,4 | 1,8 | 1,9 | 2,0 |

3.5. В табл. 8 приведены варианты значений длины линии $S$ и дирекционного угла $\alpha$. По одному из вариантов вычислить приращения координат и их средние квадратические ошибки.

Таблица 8

| Вариант | $S \pm m_S$, м | $\alpha \pm m_\alpha$ | Вариант | $S \pm m_S$, м | $\alpha \pm m_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 201 ± 0,07 | 17° ± 1,1′ | 16 | 144 ± 0,17 | 43° ± 2,1′ |
| 2 | 199 ± 0,09 | 21 ± 1,3 | 17 | 197 ± 0,20 | 48 ± 2,4 |
| 3 | 188 ± 0,06 | 38 ± 1,8 | 18 | 290 ± 0,13 | 60 ± 1,9 |
| 4 | 200 ± 0,08 | 40 ± 1,0 | 19 | 252 ± 0,11 | 66 ± 1,4 |
| 5 | 205 ± 0,15 | 33 ± 0,5 | 20 | 156 ± 0,10 | 70 ± 1,0 |
| 6 | 210 ± 0,20 | 55 ± 1,5 | 21 | 165 ± 0,15 | 45 ± 1,6 |
| 7 | 222 ± 0,22 | 68 ± 1,4 | 22 | 174 ± 0,12 | 58 ± 0,9 |
| 8 | 232 ± 0,11 | 73 ± 1,7 | 23 | 146 ± 0,16 | 25 ± 1,3 |
| 9 | 250 ± 0,14 | 88 ± 1,9 | 24 | 183 ± 0,08 | 30 ± 2,5 |
| 10 | 169 ± 0,09 | 96 ± 2,0 | 25 | 195 ± 0,16 | 53 ± 1,7 |
| 11 | 189 ± 0,07 | 39 ± 1,4 | 26 | 230 ± 0,21 | 65 ± 1,8 |
| 12 | 133 ± 0,04 | 41 ± 1,3 | 27 | 254 ± 0,26 | 71 ± 1,2 |
| 13 | 238 ± 0,17 | 32 ± 1,6 | 28 | 180 ± 0,18 | 49 ± 0,8 |
| 14 | 215 ± 0,05 | 18 ± 1,3 | 29 | 245 ± 0,24 | 51 ± 1,4 |
| 15 | 137 ± 0,06 | 37 ± 1,7 | 30 | 260 ± 0,21 | 64 ± 2,3 |

3.6. Превышение $h$ получено по формуле $h = S\,tg\nu$. С какой точностью должно быть измерено расстояние $S$ и угол наклона $\nu$, если $h$ требуется получить со средней квадратической ошибкой $m_h$? Значения величин $S$, $\nu$, $m_h$ даны в табл. 9.

Таблица 9

| Вариант | $S$, м | $v$, град | $m_h$, см | Вариант | $S$, м | $v$, град | $m_h$, см |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 123 | 6 | 3,2 | 16 | 215 | 3 | 4,7 |
| 2 | 150 | 7 | 3,0 | 17 | 235 | 5 | 3,3 |
| 3 | 200 | 5 | 2,0 | 18 | 170 | 10 | 2,8 |
| 4 | 140 | 10 | 2,4 | 19 | 155 | 7 | 3,0 |
| 5 | 175 | 8 | 3,6 | 20 | 260 | 11 | 2,5 |
| 6 | 225 | 9 | 4,0 | 21 | 160 | 4 | 2,1 |
| 7 | 100 | 4 | 1,0 | 22 | 190 | 12 | 4,2 |
| 8 | 250 | 6 | 4,5 | 23 | 210 | 8 | 3,6 |
| 9 | 130 | 3 | 1,2 | 24 | 250 | 9 | 4,8 |
| 10 | 240 | 7 | 4,0 | 25 | 135 | 4 | 3,1 |
| 11 | 110 | 11 | 2,5 | 26 | 185 | 6 | 1,4 |
| 12 | 150 | 6 | 4,3 | 27 | 110 | 5 | 1,9 |
| 13 | 230 | 4 | 3,5 | 28 | 245 | 7 | 2,8 |
| 14 | 180 | 10 | 2,0 | 29 | 220 | 10 | 4,1 |
| 15 | 195 | 9 | 5,0 | 30 | 125 | 3 | 1,5 |

3.7. Два угла измерены разными инструментами. Веса результатов оказались $p_1$ и $p_2$. Найти средние квадратические ошибки результатов измерений угла $m_1$ и $m_2$, если ошибка единицы веса $\mu$. Численный ответ дать по одному из вариантов, приведенных в табл. 10.

Таблица 10

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | 2 | 3 | 4 | 9 | 5 | 10 | 3 | 7 | 5 | 4 |
| $p_2$ | 4 | 7 | 6 | 4 | 2 | 16 | 5 | 11 | 7 | 10 |
| $\mu$, с | 4,0 | 4,5 | 5,1 | 3,2 | 7,8 | 6,1 | 7,0 | 8,0 | 9,2 | 7,4 |
| **Вариант** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| $p_1$ | 2 | 4 | 3 | 6 | 7 | 10 | 9 | 3 | 3 | 6 |
| $p_2$ | 7 | 6 | 6 | 10 | 11 | 4 | 2 | 5 | 10 | 10 |
| $\mu$, с | 2,5 | 2,0 | 4,5 | 5,0 | 5,6 | 2,9 | 4,3 | 2,0 | 1,5 | 3,0 |
| **Вариант** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
| $p_1$ | 5 | 3 | 4 | 11 | 9 | 10 | 7 | 2 | 5 | 3 |
| $p_2$ | 8 | 6 | 7 | 5 | 4 | 6 | 3 | 5 | 8 | 6 |
| $\mu$, с | 5,4 | 2,3 | 3,4 | 5,3 | 4,6 | 4,9 | 3,8 | 2,9 | 7,6 | 5,7 |

3.8. Один угол треугольника измерен $n$ раз теодолитом со средней квадратической ошибкой одного измерения $m_1$. Сколько раз необходимо измерить два других угла треугольника теодолитом, дающим среднюю квадратическую ошибку одного измерения $m_2$, чтобы веса всех углов были одинаковыми? Вычисления выполнить по одному из вариантов, приведенных в табл. 11.

Таблица 11

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 12 | 10 | 8 | 9 | 7 | 6 | 5 | 4 | 11 | 13 |
| $m_1$, с | 5,0 | 4,2 | 3,3 | 3,5 | 3,7 | 2,5 | 2,8 | 1,5 | 5,5 | 6,0 |
| $m_2$, с | 7,0 | 6,1 | 5,2 | 5,5 | 7,3 | 4,5 | 4,4 | 3,6 | 3,5 | 4,7 |
| **Вариант** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| $n$ | 4 | 3 | 8 | 7 | 11 | 10 | 12 | 8 | 5 | 6 |
| $m_1$, с | 6,9 | 5,8 | 5,2 | 3,8 | 3,6 | 3,7 | 2,9 | 1,5 | 5,7 | 2,8 |
| $m_2$, с | 3,8 | 3,2 | 8,2 | 6,0 | 5,9 | 6,4 | 4,9 | 4,5 | 3,0 | 9,3 |
| **Вариант** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
| $n$ | 7 | 5 | 3 | 10 | 12 | 4 | 9 | 8 | 5 | 11 |
| $m_1$, с | 2,7 | 3,1 | 6,2 | 4,8 | 2,4 | 4,6 | 2,1 | 3,8 | 1,9 | 4,6 |
| $m_2$, с | 3,9 | 5,4 | 5,1 | 3,6 | 4,7 | 5,7 | 6,0 | 4,2 | 3,4 | 6,7 |

3.9. Катеты $a$ и $b$ прямоугольного треугольника измерены с весами,равными $p_a$ и $p_b$. Определить вес вычисленной гипотенузы $c$ по одному из вариантов (табл. 12).

Таблица 12

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$, м | 40 | 20 | 80 | 160 | 100 | 200 | 240 | 280 | 320 | 360 |
| $p_c$ | 8 | 4 | 12 | 24 | 10 | 20 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| $p_b$ | 30 | 15 | 60 | 120 | 75 | 150 | 180 | 210 | 240 | 270 |
| $b$, м | 3 | 2 | 6 | 12 | 15 | 10 | 9 | 7 | 8 | 18 |

Окончание таюлицы 12

| **Вариант** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$, м | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
| $p_c$ | 9 | 15 | 45 | 60 | 75 | 150 | 210 | 240 | 270 | 300 |
| $p_b$ | 15 | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 | 105 | 120 | 135 | 150 |
| $b$, м | 4 | 10 | 18 | 40 | 50 | 90 | 140 | 160 | 180 | 200 |
| **Вариант** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
| $a$, м | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 170 | 190 | 220 | 230 | 250 |
| $p_a$ | 9 | 13 | 17 | 22 | 30 | 45 | 35 | 50 | 65 | 70 |
| $p_b$ | 25 | 40 | 55 | 80 | 90 | 110 | 130 | 100 | 140 | 120 |
| $b$, м | 40 | 50 | 20 | 70 | 90 | 60 | 100 | 80 | 150 | 200 |

3.10. В табл. 13 даны результаты измерения двух углов. Найти (по своему варианту) вероятнейшее значение этих углов и их средние квадратические ошибки.

Таблица 13

| № пп | Значение первого угла, $\beta_i$ | № пп | Значение второго угла, $\gamma_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 69° 44′ 15.5″ | 1 | 120° 25′ 09.6″ |
| 2 | 16.4 | 2 | 11.5 |
| 3 | 15.6 | 3 | 12.1 |
| 4 | 17.0 | 4 | 10.8 |
| 5 | 16.3 | 5 | 11.3 |
| 6 | 18.7 | 6 | 10.4 |
| 7 | 17.3 | 7 | 12.5 |
| 8 | 17.5 | 8 | 10.0 |

Указание: каждому студенту к секундам исходного угла прибавить номер своего варианта.

3.11.Отметки узловых реперов получены по шести ходам каждая и приведены в табл. 14. Определить (по своему варианту) вероятнейшее значение отметок и произвести оценку точности.

Таблица 14

| № пп | $H_1$, м | Средняя квадратическая ошибка по ходам | № пп | $H_1$, м | Средняя квадратическая ошибка по ходам |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 271,729 | 5,7 | 1 | 155,678 | 4,6 |
| 2 | 722 | 7,3 | 2 | 674 | 7,5 |
| 3 | 717 | 8,4 | 3 | 681 | 5,8 |
| 4 | 732 | 4,9 | 4 | 669 | 4,1 |
| 5 | 730 | 3,7 | 5 | 685 | 2,9 |
| 6 | 720 | 6,1 | 6 | 672 | 6,9 |

Указание: каждому студенту к величине средней квадратической ошибки прибавить номер своего варианта.

3.12. В табл. 15 приведены результаты шести измерений двух углов, причем каждый результат получен как среднее из нескольких приемов. Определить (по своему варианту) вероятнейшее значение угла и произвести оценку точности.

Таблица 15

| № пп | Значение первого угла, $\beta_i$ | Число приемов, $n_i$ | № пп | Значение второго угла, $\gamma_i$ | Число приемов, $n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 64° 27′ 33″ | 4 | 1 | 76° 15′ 49″ | 3 |
| 2 | 26 | 3 | 2 | 43 | 6 |
| 3 | 22 | 5 | 3 | 40 | 4 |
| 4 | 30 | 2 | 4 | 45 | 2 |
| 5 | 32 | 4 | 5 | 41 | 5 |
| 6 | 25 | 7 | 6 | 47 | 8 |

Указание: каждому студенту к числу приемов прибавить номер своего варианта.

3.13. В табл. 16 даны превышения прямых и обратных ходов геометрического нивелирования и число станций по каждому ходу (в одном направлении). Вычислить (по своему варианту) ошибку единицы веса, а также средние квадратические ошибки превышения на одной станции хода на «условный километр» двойного хода (из 10 станций).

Таблица 16

| № хода | П р е в ы ш е н и е, м | | Число станций, *к* |
|---|---|---|---|
| | Прямой ход | Обратный ход | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | -1,246 | +1,250 | 16 |
| 2 | +2,194 | -2,191 | 11 |
| 3 | +3,875 | -3,873 | 6 |
| 4 | +0,904 | -0,901 | 7 |
| 5 | -4,004 | +4,002 | 8 |
| 6 | -1,892 | +1,895 | 10 |
| 7 | +2,555 | -2,557 | 8 |
| 8 | -1,109 | +1,106 | 11 |
| 9 | +0,546 | -0,549 | 9 |

Указание: каждому студенту к числу станций прибавить номер своего варианта.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1977.
2. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1984.
3. Беляев Б.И. Практикум по математической обработке маркшейдерско-геодезических измерений: Учеб. пособие для вузов. – М.: Недра, 1989.
4. Губеладзе А.Р. Основы теории ошибок измерений: Учебное пособие. – Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 1998.
5. Гудков В.М., Хлебников А.В. Математическая обработка маркшейдерско-геодезических измерений: Учебник для вузов. – М.: Недра, 1990.