



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Прикладная геодезия»

Учебное пособие

«Нивелирование. Уравнивание ходов и сетей нивелирования III и IV классов»



Автор
Губеладзе О.А.

Ростов-на-Дону, 2018

Аннотация

УДК 528.1

Учебное пособие составлено по основным разделам программы курса "Геодезия". Изложены вопросы, связанные с теорией параметрического и коррелятного способов уравнивания, основанных на принципе наименьших квадратов. Рассмотрены способы уравнивания и оценки точности различных ходов и сетей полигонометрии III и IV классов.

Предназначено для студентов по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия» и направлению подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование».

Автор

доцент, к.т.н., доцент кафедры
«Прикладная геодезия»
Губеладзе О.А.



Оглавление

| | |
|--|-----------|
| ВВЕДЕНИЕ..... | 4 |
| 1. НИВЕЛИРОВАНИЕ | 5 |
| 1.1. Высотные геодезические сети..... | 5 |
| 1.2. Сущность геометрического нивелирования..... | 13 |
| 1.3. Влияние кривизны Земли и вертикальной рефракции на горизонтальные и вертикальные измерения..... | 16 |
| 1.4. Классификация нивелиров..... | 19 |
| 1.5. Нивелирные рейки..... | 21 |
| 1.6. Поверки и исследования точных нивелиров | 23 |
| 1.7. Устройство, поверки и исследования нивелирных реек..... | 36 |
| 1.8. Нивелирование III класса | 41 |
| 1.9. Обработка результатов нивелирования III класса ... | 47 |
| 1.10. Нивелирование IV класса..... | 50 |
| 1.11. Тригонометрическое нивелирование..... | 52 |
| 2. СПОСОБЫ УРАВНИВАНИЯ | 55 |
| 2.1. Сущность принципа наименьших квадратов..... | 55 |
| 2.2. Коррелатный способ уравнивания | 58 |
| 2.3. Матричный способ решения..... | 61 |
| 2.4. Уравнивание нивелирной сети коррелатным способом..... | 62 |
| 2.5. Обработка нивелирной сети с одной узловой точкой..... | 64 |
| 2.6. Обработка нивелирной сети по способу эквивалентной замены..... | 66 |
| 2.7. Обработка нивелирной сети по способу узлов | 69 |
| 2.8. Обработка нивелирной сети по способу полигонов.. | 71 |
| 2.9. Теория параметрического способа уравнивания | 74 |
| 2.10. Обработка нивелирной сети параметрическим способом..... | 78 |
| 2.11. Проектирование нивелирования III класса | 80 |
| 2.12. Поиск грубых ошибок измерений в нивелирных сетях..... | 81 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК | 87 |



ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие рассчитано на студентов Ростовского государственного строительного университета, изучающих предмет «Геодезия» на 2-м курсе. В соответствии с учебной программой дисциплины при изучении студентам необходимо ознакомиться с существующими современными приборами и методами геодезических измерений, а также освоить их математическую обработку. Основной задачей данного учебного пособия является оказание существенной помощи студентам как очной, так и заочной формам обучения в самостоятельном освоении данной дисциплины.

Первая часть учебного пособия посвящена нивелированию III и IV классов. Традиционные способы нивелирования находят широкое применение в геодезическом производстве, так и в прикладной геодезии. В сборнике описаны методы выполнения лабораторных работ по теме нивелирования III и IV классов, а также приведены допуски и контроли измерений. Рассмотрены разные типы нивелиров, приводится описание поверок и исследований нивелиров и реек.

Рассмотрены способы уравнивания нивелирных ходов и сетей, основанные на принципе наименьших квадратов. Приводится теория математической обработки одиночных ходов и сетей нивелирования III и IV классов.

1. НИВЕЛИРОВАНИЕ

1.1. Высотные геодезические сети

Геодезической сетью является группа закреплённых на местности точек, для которых определены плановые и высотные координаты (X, Y, H) .

Понятие геодезической высоты H определяется суммированием нормальной высоты H^N и высотой квазигеоида ζ относительно поверхности эллипсоида (рис. 1). Согласно геодезических координат высоту H выражают согласно нормали к эллипсоиду, проходящую через определяемую точку на поверхности Земли.

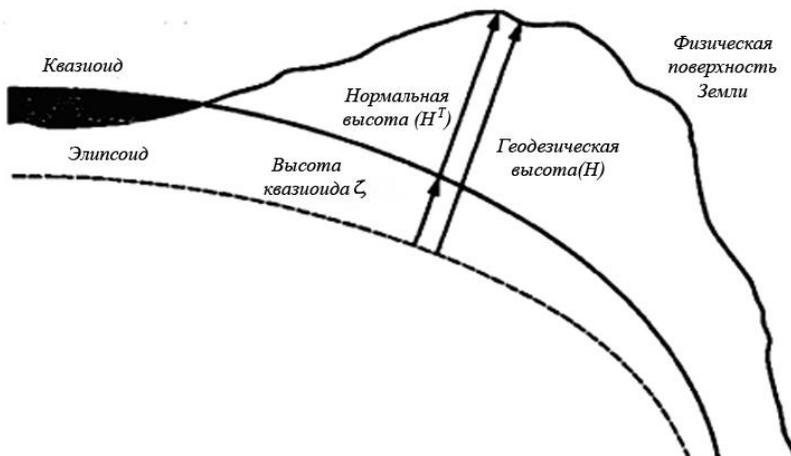


Рис.1. Взаимосвязь геодезической высоты, высоты квазигеоида и нормальной высоты

В настоящее время нормальные высоты определяются в Балтийской системе высот, которая вычисляется от нуля Кронштадтского футштока. Высоты квазигеоида определяются относительно эллипсоида Красовского.

За нуль Кронштадтского футштока (рис. 2) принята горизонтальная риска на медной пластине (установленной в 1913 г.), закрепленной на опоре Синего моста через обводной канал в г. Кронштадте. В первой половине XIX века на основании пятнадцатилетних кропотливых наблюдений М. Ф. Рейнеке определил средний уровень Балтийского моря. Учитывая высокую точность определения среднего уровня моря М.Ф. Рейнеке, этот уровень был позднее

принят за исходную точку отсчета нивелировочной сети на территории нашей страны.

Нуль Кронштадтского футштока используется в качестве начала высот вследствие того, что современные вертикальные подвижки дневной поверхности в данном районе незначительны, а также незначительно колебание среднего уровня Балтийского моря во времени.

Высотные геодезические сети предназначены для получения на территории Российской Федерации единой высотной системы с целью обеспечения картографирования, решения научно-хозяйственных задач, а также обеспечения обороноспособности страны.

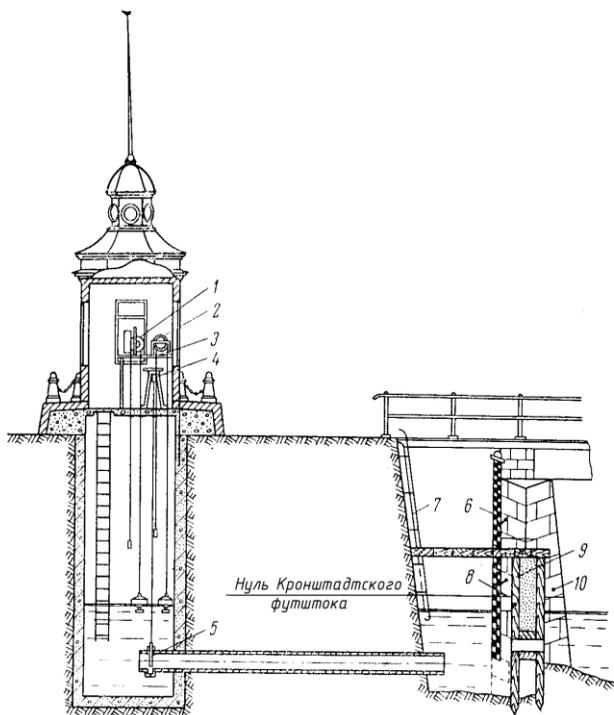


Рис. 2. Устройство Кронштадтского футштока
 1 – мареограф; 2 – копинист; 3 – столик мареографа; 4 – штوك задвижки; 5 – задвижка Лудло; 6 – футшок; 7 – металлический трап; 8 – пластина Тонберга; 9 – отстойник мареографа;
 10 – устой моста

Основное назначение высотных сетей является создание с достаточно высокой точностью закрепленных на земной поверхности пунктов, относительно которых производятся высотные измерения.

Высотные сети на территории Российской Федерации являются собой равномерно закрепленные точки (репера) с высотными отметками на территории всей страны. Вся созданная нивелирная сеть на территории России подразделяется на государственную нивелирную сеть, нивелирную сеть местного значения, высотную съёмочную сеть, высокоточные нивелирные сети специального назначения.

Государственная нивелирная сеть является главной высотной основой для производства топографических съёмок всех масштабов и подразделяется на нивелирные сети I, II, III и IV классов.

Государственная нивелирная сеть I класса являются основой для развития сети II и более низших классов. При этом нивелирование I класса используется для:

- изучения формы физической поверхности Земли;
- изучения вертикальных подвижек земной коры;
- определения уровней морей и океанов;
- строительства, выверки уникальных и прецизионных сооружений;
- наблюдений за осадками и деформациями прецизионных зданий и сооружений и др..

Все работы в геодезии, в том числе и создание государственной высотной геодезической сети, выполняются согласно принципу от общего к частному. На начальном этапе на территории страны развивают нивелирную сеть I класса, образующую полигоны I класса. Внутри этих полигонов прокладывают нивелирные ходы II класса (рис. 3).

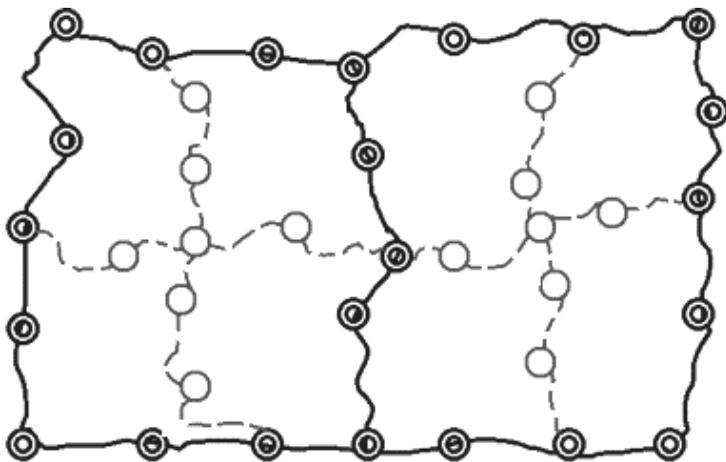


Рис. 3. Схема нивелирных сетей I и II классов
 — репер и линия нивелирования I класса
 — репер и линия нивелирования II класса

Государственные нивелирные сети I и II классов являются главной высотной основой Российской Федерации. Периметры нивелирных полигонов I класса достигают размеров от 1200 до 2000 км, а нивелирных полигонов II класса – от 400 до 1000 км. Нивелирные линии I и II классов прокладываются вдоль магистральных железных и автомобильных дорог. Проложение ходов нивелирования I класса осуществляется с наивысшей точностью с применением современных приборов и методов измерений.

Нивелирные сети III и IV классов являются сетями сгущения и прокладываются внутри полигонов I и II классов как отдельными ходами, так и в виде полигонов, опирающихся не менее чем на два репера высшего класса (рис. 4). Периметры полигонов III класса могут составлять от 60 км в обжитых районах до 300 км в малообжитых районах. В поселениях периметры полигонов III класса могут изменяться от 25 км в застроенной части до 40 км на незастроенных территориях.

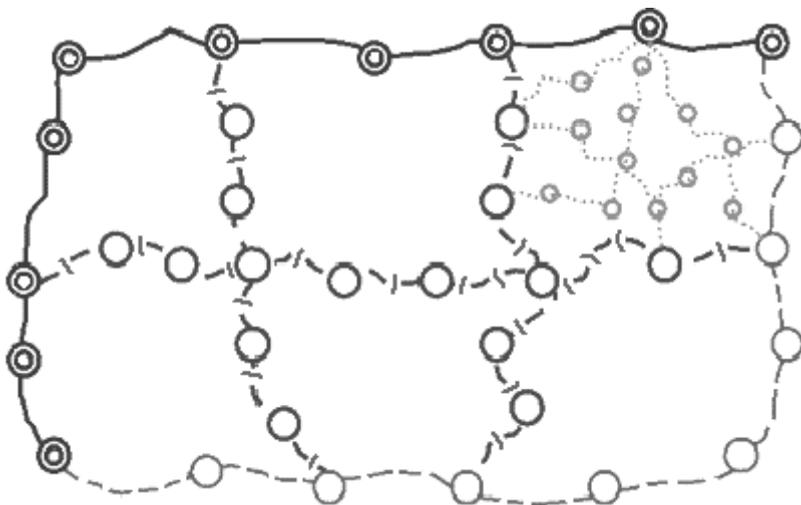


Рис. 4. Схема нивелирования III и IV классов
 -|○|- — репер и линия нивелирования III класса
 ...○... — репер и линия нивелирования IV класса

В сетях IV класса периметр полигонов составляет для обжитых районов 20-60 км, для необжитых районов 25-80 км, для городов 8-12 км. Расположение всех реперов показывают на карте масштаба 1:100000. Если нивелирование III класса выполняется в горной местности, а для I и II классов обязательно, то в измеренные превышения вводятся поправки за переход к системе нормальных высот по формуле

$$\delta_h = \frac{1}{\gamma_m} \cdot (\gamma_A + \gamma_B) \cdot H_m + \frac{h}{\gamma_m} \cdot (g - \gamma)_m, \quad (1.1)$$

где δ_h – поправка в измеренное превышение;
 H_m – среднее из высот реперов A и B ;
 γ_m – нормальное ускорение силы тяжести ($\gamma_m = 9,8 \text{ м/сек}^2$);
 γ_A, γ_B – нормальные ускорения силы тяжести на отсчётном эллипсоиде, соответствующие реперам A и B (выбираются из специальных таблиц);

$(g - \gamma)_m$ – среднее значение силы тяжести на реперах *A* и *B* (g – фактическое значение ускорения силы тяжести, γ – нормальное его значение).

Согласно установленным четырем классам точности нивелирных сетей ошибки измерения при выполнении нивелирования приведены в табл. 1.

Таблица 1

Точность нивелирования

| Параметры точности | Классы нивелирования | | | |
|---------------------------------------|----------------------|--------|---------|---------|
| | I | II | III | IV |
| СКО измерения превышения на 1 км хода | 0,8 мм | 2,0 мм | 5,0 мм | 10,0 мм |
| Предельная ошибка на 1 км хода | 3,0 мм | 5,0 мм | 10,0 мм | 20,0 мм |

Пункты нивелирных сетей закрепляются нивелирными знаками, которые могут быть постоянными и временными.

По конструкциям реперы нивелирования классифицируются на следующие виды: вековые, фундаментальные, грунтовые, скальные, стенные и временные.

Вековые реперы (рис. 5) обеспечивают сохранность главной высотной основы в течение продолжительного времени. Они чаще всего используются для изучения движений земной коры, колебаний уровня моря и океана и т.п. Закладка таких реперов производится в местах пересечения линий нивелирования I класса либо на постах, ведущих наблюдения за колебаниями уровня моря.

К постоянным знакам относятся фундаментальные реперы и обычные знаки – грунтовые реперы, а также марки, закладываемые в бетонных монолитах, а также стенные реперы.

Фундаментальные реперы (рис. 6) устанавливают на линиях нивелирования I и II классов через 50-80 км. Кроме того, на всех линиях нивелирования I, II и III классов постоянные реперы устанавливают, как правило, через 5 – 7 км (в труднодоступных районах – через 10 – 15 км). При производстве съёмок в масштабе 1:5000 и крупнее, а также при проложении ходов нивелирования IV класса расстояния между реперами не должны превышать 1 км.

Грунтовые реперы для районов с глубоким промерзанием грунта аналогичны по своему устройству центру геодезического знака, изображённому на рисунке 2 в предыдущем разделе. Кроме того, дополнительно на расстоянии 1 м от грунтового репера устанавливается опознавательный знак с охранной плитой.

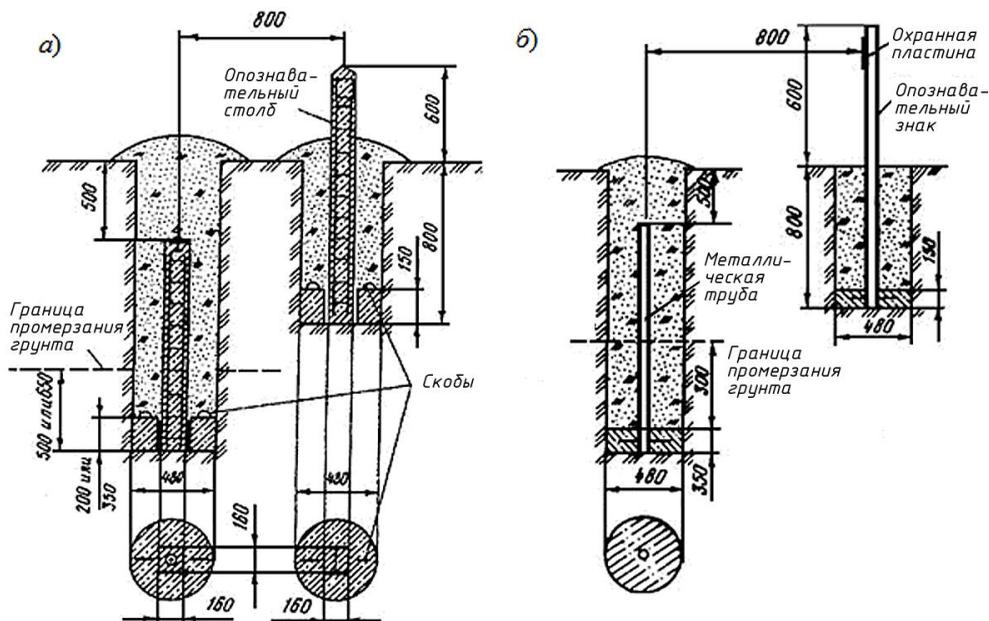


Рис. 7. Типы грунтовых реперов

Для районов с небольшой глубиной промерзания грунта в качестве грунтовых реперов используют бетонные монолиты (рис. 7, а). Грунтовые реперы (рис. 7, б) в области сезонного промерзания грунтов, как правило, закладывают в пробуренные скважины диаметром 50 см.

Конструкция грунтового репера состоит из железобетонного пилона квадратного сечения 16x16 см и бетонной плиты (якоря) диаметром 48 см, изготавливаемых заранее. В верхнюю грань пилона цементируется марка (рис.7, а). В бетонную плиту устанавливают железобетонный пилон.

Можно вместо пилона устанавливают асбоцементную трубу с диаметром около 16 см. Сверху в трубу вставляют марку. При использовании асбоцементной трубы для увеличения связи ее основания с якорем на расстоянии 7-10 см от основания трубы вставляют два взаимно перпендикулярных стержня толщиной 1,0-1,2 см и длиной 25 см.

1.2. Сущность геометрического нивелирования

Рельефом местности называют совокупность неровностей земной поверхности. Процесс измерения превышения одной точки относительно другой называется нивелированием. Нивелирование производится для изучения форм рельефа и определения превышений отдельных точек конструкций и сооружения в целом при проектировании, строительстве и эксплуатации.

По видам нивелирование подразделяется на:

- геометрическое нивелирование;
- тригонометрическое нивелирование;
- физическое;
- стереофотограмметрическое;
- автоматическое.

Геометрическое нивелирование основано на горизонтальном положении визирного луча, которое задается с помощью инструментов, называемых нивелирами.

Тригонометрическое нивелирование производится наклонным лучом с использованием теодолитов либо тахеометров. В этом случае измеряются углы наклона и расстояния между определяемыми точками.

Физическое нивелирование разделяется на барометрическое, гидростатическое и аэронивелирование.

Гидростатическое нивелирование основано на свойстве поверхности жидкости в сообщающихся сосудах всегда находится на одинаковом уровне.

Аэронивелирование производится с самолета при помощи радио-высотомера и статоскопа, позволяющих определять высоты самолета над земной поверхностью и изменение его высоты в полете. Совместное использование этих данных определяет превышения между точками поверхности Земли.

Стереофотограмметрическое нивелирование выполняется путем измерений модели местности, основанное на стереоэффекте при рассматривании двух снимков одной и той же местности (стереопар).

Автоматическое нивелирование производится при помощи приборов, автоматически вычерчивающих профиль местности.

Различают два способа геометрического нивелирования:

- нивелирование из середины;
- нивелирование вперед.

При нивелировании из середины инструмент устанавливают посередине между точками A и B , а на точках A и B ставят рейки с делениями (рис. 8).

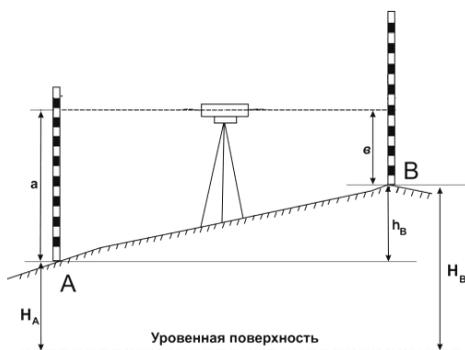


Рис. 8. Схема нивелирования из середины

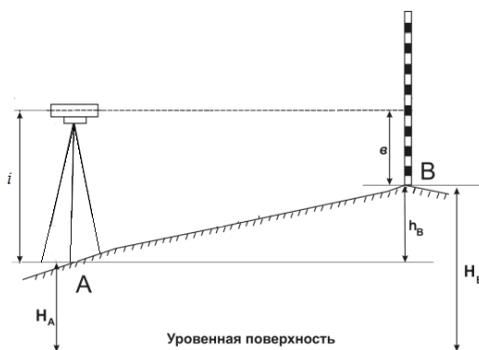


Рис. 9. Схема нивелирования вперед

Превышение точки B относительно точки A получают по формуле

$$h = a - b, \quad (1.2)$$

где a и b – отсчеты по задней и передней рейками соответственно.

Отметка точки B вычисляется по формуле

$$H_B = H_A + h. \quad (1.3)$$

Высота визирного луча над уровнем моря называется горизонтом инструмента $H_{ГИ}$ и вычисляется согласно

$$H_{ГИ} = H_A + a = H_B + b \quad (1.4)$$

При нивелировании вперед нивелир устанавливают над точкой A таким образом, чтобы отвес, опущенный от окуляра, должен находиться над точкой A , а нивелирная рейка – на точку B . С помощью рулетки измеряют высоту нивелира i над точкой A и берут отсчет b по рейке (рис. 9). Превышение h вычисляется по формуле

$$h = i - b. \quad (1.5)$$

Отметку точки B можно вычислить либо через превышение между точками A и B по формуле (1.3), либо через горизонт прибора

$$H_B = H_{ГИ} - b. \quad (1.6)$$

В том случае, если между точками A и B имеется значительное расстояние и превышение между ними нельзя измерить с одной станции, то по направлению AB закрепляют промежуточные точки 1, 2, 3 и т.д. и измеряют превышение по частям (рис. 10). В таком случае отметка точки B определится по формуле

$$H_B = H_A + \sum h_i. \quad (1.7)$$

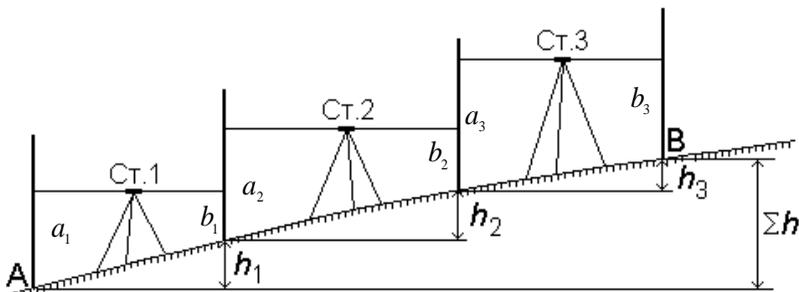


Рис.10. Схема нивелирного хода

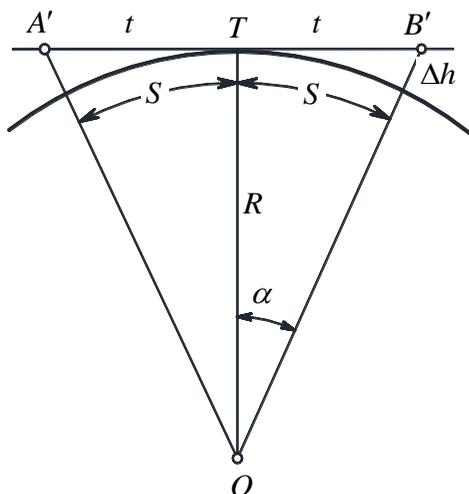
1.3. Влияние кривизны Земли и вертикальной рефракции на горизонтальные и вертикальные измерения

Высота точки является одной из её координат, которая определяет положение точки по высоте относительно поверхности референц-эллипсоида. Высоты всех точек поверхности Земли определяют фигуру Земли в целом.

Все четыре системы высот (приближённые высоты, ортометрические высоты, нормальные высоты и динамические высоты) являются моделями по отношению к объективно существующей реальности.

На местности можно зафиксировать и использовать только одно направление – направление силы тяжести; отвес фиксирует отвесное (вертикальное) направление, а ось цилиндрического уровня – горизонтальное направление.

Если считать уровенные поверхности горизонтальными плоскостями, а направления силы тяжести в точках 1 и 2 считать параллельными, то превышение между точками 1 и 2 выразится простой формулой (1.2). Каждой точке или контуру на земной поверхности соответствует точка или контур на поверхности проецирования.



Поверхность Земли примем за шар радиуса R (рис. 11). Задача сводится к сравнению длины дуги $TB = S$ с длиной касательной $T'B' = t$.

Имеем $t = R \operatorname{tg} \alpha$ и $S = R \alpha$. Обозначим разность $t - S$ через Δt , тогда

$$\Delta t = R(\operatorname{tg} \alpha - \alpha). \quad (1.8)$$

Величина t незначительна по сравнению с R , а угол α мал, то можно принять

Рис. 11. Схема определения поправок за кривизну земной поверхности

$$\Delta t = R \frac{\alpha^3}{3} = R \frac{S^3}{3R^3} \approx \frac{t^3}{3R^2}. \quad (1.9)$$

Приняв приближенно $R = 6000$ км, $t = 10$ км, получим

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{3 \cdot 36 \cdot 10^4} \approx \frac{1}{1000000}.$$

Следовательно, участки земной поверхности размером 20x20 км во всех случаях можно считать плоскими. Определим влияние кривизны на вертикальные измерения

$$t^2 = (R + \Delta h)^2 - R^2 = 2R \cdot \Delta h + \Delta h^2$$

или в силу малости Δh по отношению к радиусу Земли

$$\Delta h = \frac{t^2}{2R}. \quad (1.10)$$

Превышение точки B относительно точки A будет равно разности отрезков AM и BN

$$h = AM - BN.$$

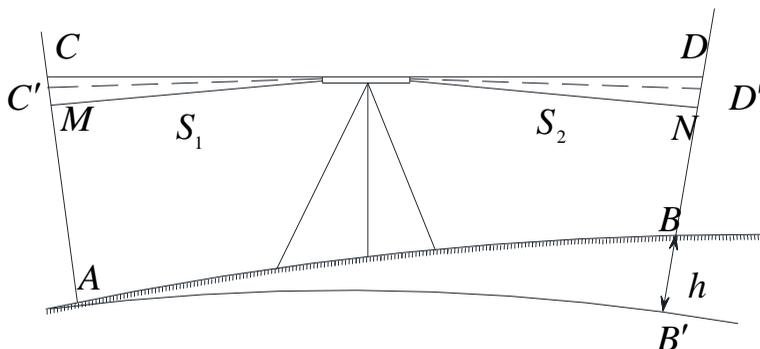


Рис. 12. Влияние кривизны Земли и рефракции на измеряемое превышение хода

Согласно рис. 12

$$AC = AM + MC = AC' + C'C,$$

где AC' – отсчёт по задней рейке;
 $C'C$ – влияние вертикальной рефракции r_1 в точке A ;
 AM – расстояние между урочными поверхностями нивелира и точки A ;
 MC – влияние кривизны Земли p_1 для точки A

$$BD = BN + ND = BD' + D'D,$$

где BD' – отсчёт b по передней рейке;
 $D'D$ – влияние вертикальной рефракции r_2 в точке B ;
 BN – расстояние между урочными поверхностями нивелира и точки B ;
 ND – влияние кривизны Земли p_2 для точки B .
 Следовательно:

$$a + r_1 = AM + p_1,$$

откуда

$$AM = a + r_1 - p_1;$$

$$b + r_2 = BN + p_2,$$

следовательно

$$BN = b + r_2 - p_2.$$

Величина $(p_1 - r_1)$ является совместным влиянием за кривизну Земли и рефракцию в точке A и обозначают f_1 , а величину $(p_2 - r_2)$ – в точке B и обозначают f_2 .

Далее следуют

$$h = (a - b) - (f_1 - f_2);$$

$$f_1 = p_1 - r_1 = \frac{s_1^2}{2R} - k \frac{s_1^2}{2R} = \frac{(1 - k)}{2R} s_1^2; \quad (1.11)$$

$$f_2 = p_2 - r_2 = \frac{s_2^2}{2R} - k \frac{s_2^2}{2R} = \frac{(1-k)}{2R} s_2^2; \quad (1.12)$$

$$h = (a - b) - \frac{(1-k)}{2R} \cdot (s_1^2 - s_2^2). \quad (1.13)$$

Определим влияние $(f_1 - f_2)$ при $s_1 \approx s_2 \approx 100$ м и при $|s_1 - s_2| \leq 3$ м, получим

$$(f_1 - f_2) = \frac{(1-k)}{2R} \cdot (s_1^2 + s_2^2) \cdot (s_1^2 - s_2^2) = 0,04$$

При $s_1 = s_2$ влияние кривизны земли и рефракции становится равным нулю. Следовательно, при нивелировании из середины влияние кривизны Земли и рефракции на измерение превышений исключается.

1.4. Классификация нивелиров

Согласно действующим ГОСТам нивелиры изготавливают трех типов: высокоточные – Н-05; точные – Н-3; технические – Н-10.



Рис. 13. Высокоточный нивелир Н-05

Для производства нивелирования III и IV классов согласно «Инструкции по нивелированию I, II, III и IV классов» применяют точные нивелиры (рис. 14 и 15), основные параметры которых приведены ниже. Устройство базовой модели нивелира Н-3 приведено

на рис. 14. Внешний вид нивелира с компенсатором приведен на рис. 15.

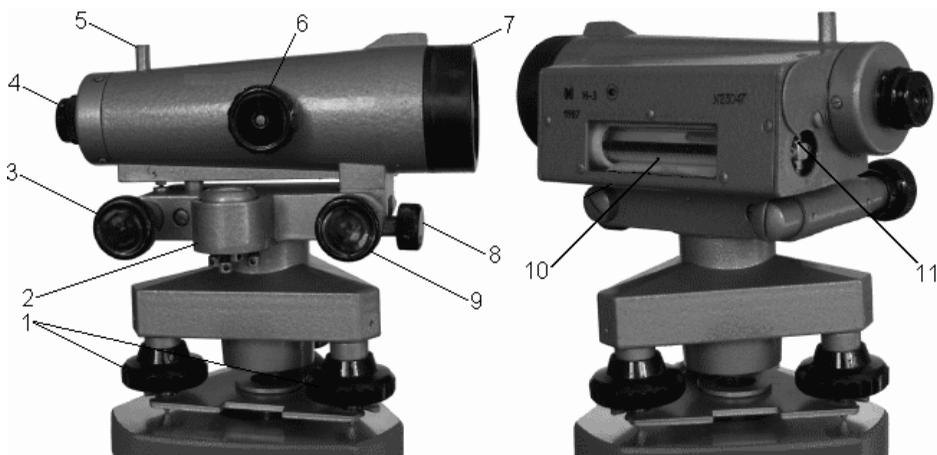


Рис. 14. Нивелир Н-3

- 1 – подъемные винты; 2 – круглый уровень; 3 – элевационный винт; 4 – окуляр с диоптрийным кольцом; 5 – визир; 6 – кремальера; 7 – объектив; 8 – закрепительный винт; 9 – наводящий винт; 10 – цилиндрический уровень; 11 – юстировочные винты цилиндрического уровня



Рис. 15. Нивелир 3Н-ЗКЛ с компенсатором и лимбом: 1 – лимб; 2 – наводящий винт; 3 – кремальера; 4 – визир

Согласно Государственному стандарту установлены следующие основные характеристики для точных нивелиров:

| | |
|---|--------------------|
| - увеличение зрительной трубы | $V^* \geq 30$, |
| - наименьшее расстояние визирования | 2 м, |
| - коэффициент нитяного дальномера | $100 \pm 1\%$, |
| - цена деления цилиндрического уровня при трубе | $15'' \pm 1.5''$, |
| - цена деления круглого установочного уровня | $10' \pm 2'$, |
| - масса | не более 3 кг. |

Точный нивелир должен обеспечить среднюю квадратическую ошибку измерения превышения на станции не более 2 мм при расстоянии от нивелира до реек 100 м.

1.5. Нивелирные рейки

Рейки нивелирования выпускаются трех видов: РН-10, РН-3, РН-05. Цифра в шифре обозначает то же самое, что и в шифрах нивелиров. Рейки РН-10 и РН-3 изготавливаются складными, 3-х метровыми. Могут быть РН-10 4-х метровые, складные. На обеих сторонах рейки нанесены сантиметровые деления в виде шашек: на одной стороне черным цветом – черная сторона, на другой стороне красным цветом – красная сторона. Отсчеты по черным сторонам всех реек начинаются с нуля. Разность отсчетов по красной и черной сторонам одной и той же рейки величина постоянная и служит контролем отсчетов. В комплект для нивелира входят две рейки с разными нулями красных сторон: 4687 и 4787 мм (или 4700 и 4800). Превышения, вычисленные по отсчетам черных сторон реек, будут равны фактическим, а превышения по отсчетам красных сторон реек будут искажаться на ± 100 мм. При выводе среднего значения на станции это искажение необходимо учитывать.

Рейки РН-05 (рис. 16) состоят из деревянных брусьев, на которые натягиваются ленты со штрихами 5 мм. На ленте две шкалы – основная и дополнительная. Ленты изготовляют из инвара (сплав железа с никелем, обладающим малым коэффициентом линейного расширения). Отсчеты по шкалам при помощи микрометра нивелира Н-05 берутся с точностью 0,1 мм.

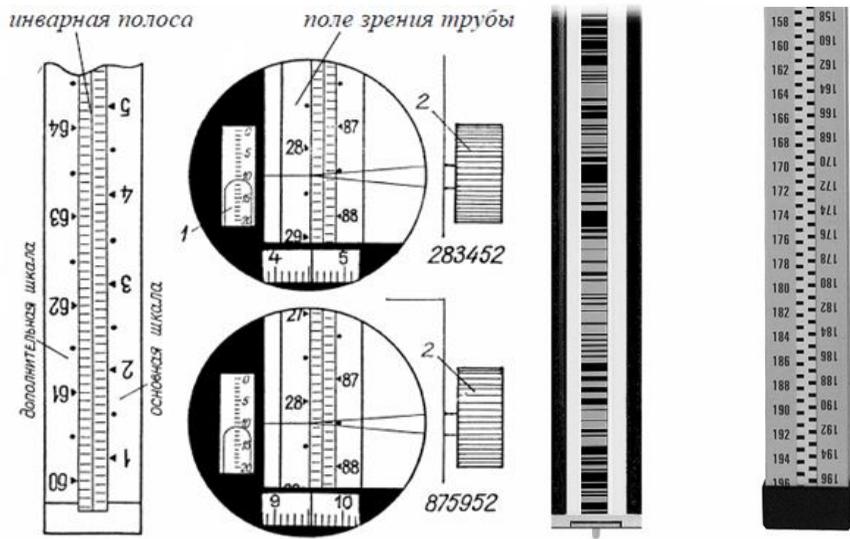


Рис. 16. Инварные рейки

Нивелирные рейки для нивелирования III – IV класса и технического изготавливают из деревянных брусьев двутаврового сечения шириной 8 – 10 см и толщиной 2 – 3 см.

Рейка РН-3 (рис. 17) имеет длину 3 м. Деления нанесены через 1 см. Нижняя часть рейки заключена в металлическую оковку и называется пяткой.

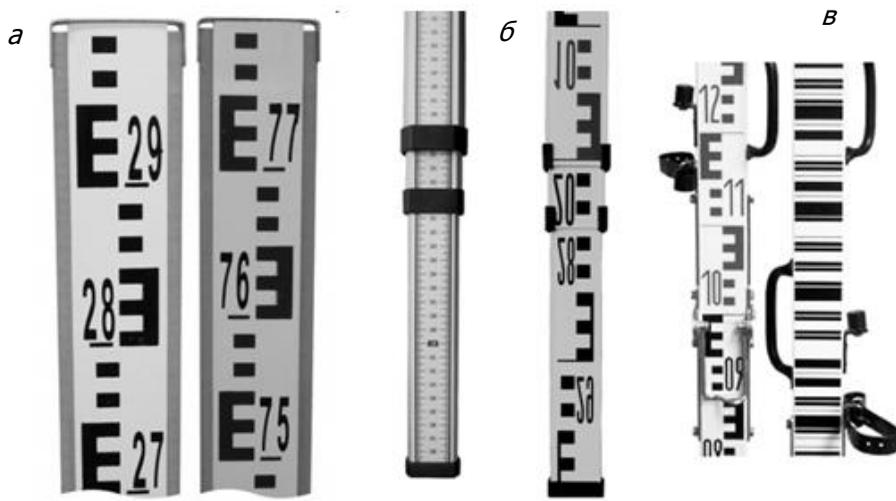


Рис. 16. Нивелирные рейки:
а – шашечная рейка РН-3000; *б* – рейка нивелирная телескопическая; *в* – рейка нивелирная Trimble LD24

Основная шкала имеет деления черного и белого цвета, ноль совмещен с пяткой рейки. Дополнительная шкала на другой стороне рейки имеет чередующиеся красные и белые деления. С пяткой рейки совмещен отсчет больше 4000 мм. Часто встречаются комплекты реек, у которых с пятками красных сторон совпадают отсчеты 4687 и 4787 мм. Поэтому превышения, измеренные по красным сторонам реек, будут больше или меньше на 100 мм измеренных по черным сторонам реек. В настоящее время разности пяткок составляют 4700 и 4800 мм, что является слабым контролем на станции.

1.6. Поверки и исследования точных нивелиров

1.6.1. Поверки точных нивелиров

Поверками являются действия, в результате которых выявляется правильность расположения основных осей инструмента. При обнаружении какого-либо несоответствия его исправляют с помощью юстировочных (исправительных) винтов.

1. Первая поверка. Ось круглого уровня должна быть параллельна оси вращения нивелира.

Располагаем круглый уровень по направлению одного из подъемных винтов и, вращая два других винта одновременно в разные стороны, выводим пузырек уровня в плоскость, перпендикулярную этим винтам. Затем с помощью первого винта приводим пузырек в нуль-пункт. После этого поворачиваем нивелир на 180° . Если пузырек уровня останется в центре ампулы, то условие выполнено. При отклонении пузырька от нуль-пункта с помощью исправительных винтов его перемещают на половину дуги смещения к нуль-пункту, а на другую половину – подъемными винтами. После этого поверку повторяют, чтобы убедиться в выполнении данного условия.

2. Вторая поверка. Горизонтальная нить сетки нитей зрительной трубы должна быть перпендикулярна оси вращения инструмента.

Приводят инструмент в рабочее положение, на расстоянии 20-30 м от него устанавливают рейку в вертикальном положении. Наводят зрительную трубу таким образом, чтобы один из концов горизонтальной нити был наведен на рейку и берут отсчет. Затем микрометренным винтом переводят рейку в другое крайнее положение горизонтальной нити и снова берут отсчет. Если сетка нитей исправна, то отсчеты будут либо одинаковыми, либо отличаться не более чем на 1 мм.

При неисправном положении сетки нитей ослабляют юстировочные винты сетки нитей и поворачивают диафрагму, приводя нить в горизонтальное положение. После этого поверку повторяют.

3. Третья поверка. Поверка главного условия нивелира с уровнем при трубе. Ось цилиндрического уровня и визирная ось трубы должны лежать в параллельных вертикальных плоскостях и быть параллельны.

Определение угла i нивелира следует проводить одним из следующих способов:

- 1) нивелированием вперед;
- 2) нивелированием из середины в сочетании с нивелированием вперед;
- 3) нивелированием с различными плечами.

Количество приемов измерений в любом способе должно быть не менее трех. Окончательное значение угла i не должно превышать $10''$ для всех типов нивелиров.

Способ нивелирования вперед основан на принципе двойного нивелирования двух точек 1 и 2, закрепленных на местности костылями или кольями на расстоянии 50 – 55 м (рис. 17).

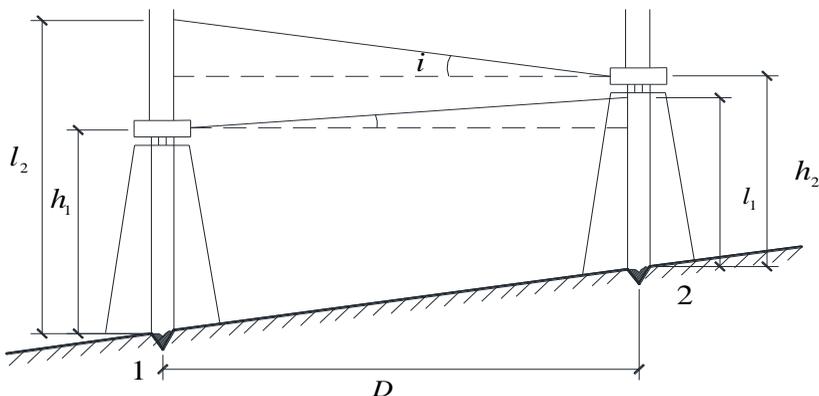


Рис. 17. Взаимное расположение нивелира и реек при определении угла i по способу нивелирования вперед

Нивелир устанавливают над одной из точек, приводят его в рабочее положение, измеряют рулеткой высоту инструмента h_1 относительно точки 1 с точностью до 1 мм, а затем берут отсчет l_2 по рейке, расположенной в точке 2. После этого рейку и нивелир меняют местами и измерения повторяют, т.е. измеряют высоту h_2 и берут отсчет l_1 . Значение угла i вычисляют по формуле:

$$i = \frac{[(h_1 + h_2) - (l_1 + l_2)] \cdot \rho}{2D}, \quad (1.13)$$

где D – расстояние между точками 1 и 2.

При использовании второго способа на расстоянии 70-75 м друг от друга на местности закрепляют две точки (рис. 18), на которые устанавливают рейки. На одинаковом расстоянии от реек устанавливают нивелир и берут отсчеты по рейкам h_1 и h_2 . Согласно полученным отсчетам вычисляют превышение h .

Затем переставляют нивелир к одной из реек на расстояние 3 – 5 м либо перед рейкой, либо за ней. Визируют зрительную трубу на заднюю и переднюю рейки, берут отсчеты h'_1 и h'_2 определяют превышение h' . Значение угла i вычисляют по формуле:

$$i = \frac{[(l_1 + l_2) - (l'_1 + l'_2)] \cdot \rho}{D} = \frac{h - h'}{D} \cdot \rho. \quad (1.14)$$

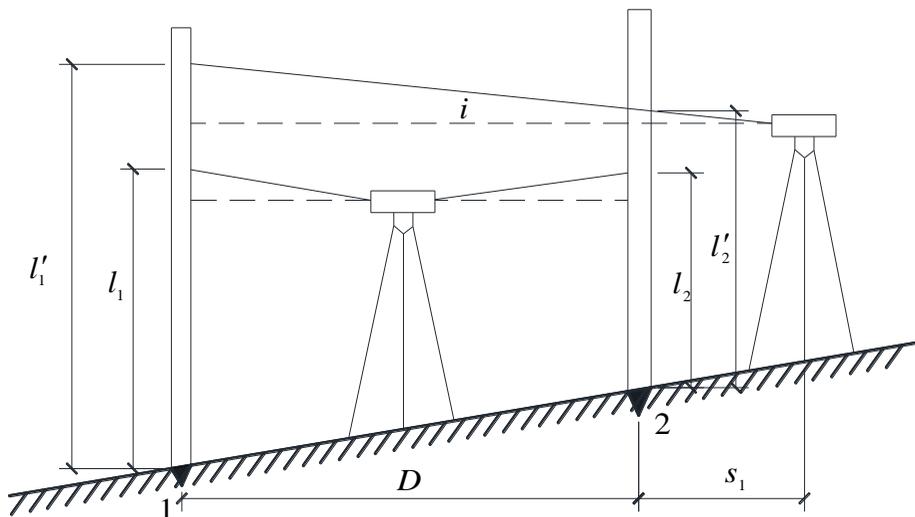


Рис. 18. Взаимное расположение нивелира и реек при определении угла i по способу нивелирования из середины в сочетании с нивелированием вперед

При реализации третьего способа определения угла i (нивелирования с различными плечами) линию длиной 50 – 70 м закрепляют костылями или кольями и определяют превышение между ними с двух станций.

Нивелир устанавливают на расстояния 3 – 5 м от рейки на продолжении створа 1 – 2 (рис. 19). Производят отсчет h_1 по ближайшей рейке и, изменив фокусировку трубы, производят отсчет h_2 по дальней рейке.

Сохраняя фокусировку трубы, устанавливают нивелир на расстоянии 3 – 5 м от второй рейки на продолжении створа 2 – 1. Производят отсчеты h'_1 по дальней рейке и h'_2 по ближней рейке. Угол i вычисляют по формуле:

$$i = \frac{X \cdot \rho}{D} \quad (1.15)$$

где

$$X = \frac{l'_2 + l'_1}{D} - \frac{l_2 + l_1}{D} \quad (1.16)$$

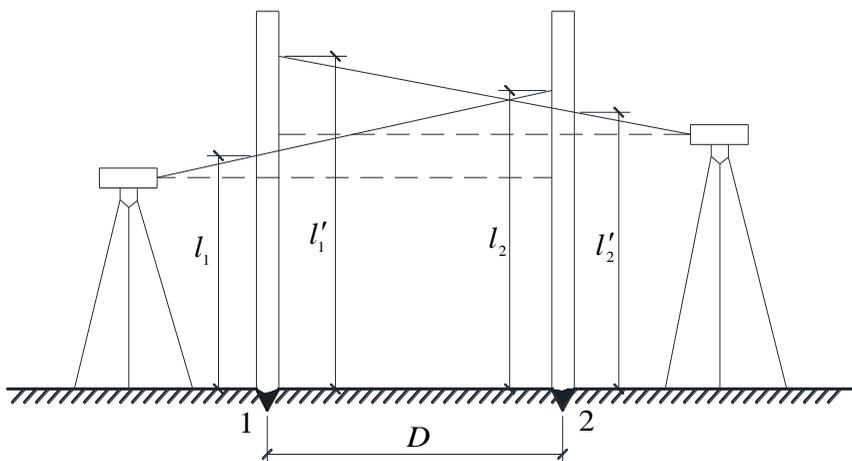


Рис. 19. Взаимное расположение нивелира и реек при определении угла i по способу нивелирования с разными плечами

Главное условие у нивелиров с компенсатором читается следующим образом: визирная ось зрительной трубы должна быть горизонтальной в пределах рабочего диапазона компенсатора. Выполняется данная поверка также, как и для нивелиров с цилиндрическим уровнем.

Полные исследования выполняют в специальных лабораториях для новых нивелиров и после капитального ремонта по программе, предусмотренной ГОСТом. Неполные исследования выполняются перед началом полевых работ и включают следующие процедуры:

- исследование качества зрительной трубы;
- исследование правильности хода фокусирующей линзы;
- исследование цилиндрического контактного уровня;
- определения коэффициента дальномера и асимметрии нитей;
- исследование качества работы элевационного винта;
- определение диапазона и ошибки работы компенсатора.

Нивелиры исследуются перед их использованием для определения качественных характеристик и установления степени влияния внешних условий.

1.6.2. Определение цены деления уровня на экзаменаторе

Простой экзаменатор состоит из штанги длиной l , один конец которой закреплен шарнирно и не изменяется по высоте, а другой поднимается или опускается при помощи винта с делениями по окружности головки (рис. 20).

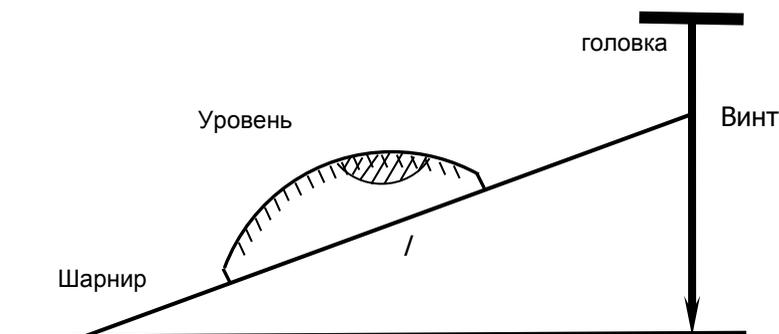


Рис. 20. Схема экзаменатора

Цена деления μ экзаменатора определяется углом, на который наклоняется штанга при повороте винта на одно деление его шкалы. Цену деления уровня вычисляют по формуле:

$$\tau = \frac{\mu \cdot n}{\delta}, \quad (1.17)$$

где δ – число делений уровня, на которое сместился пузырек при повороте винта на n делений.

Уровень исследуют по всей длине его шкалы в прямом и обратном ходе пузырька двумя приемами. За окончательное значение цены деления принимают среднее арифметическое из двух приемов.

Среднюю квадратическую ошибку совмещения изображения концов цилиндрического контактного уровня определяют на экзаменаторе.

Для этого устанавливают нивелир на площадке экзаменатора и приступают к исследованию. Приводят пузырек цилиндрического уровня примерно на середину и ввинчиванием измерительного винта экзаменатора точно совмещают изображения концов пузырька цилиндрического нивелира. Убедившись, что в течение 5 – 10 с концы пузырька цилиндрического уровня не разошлись, делают отсчет по измерительному винту экзаменатора с точностью 0,1 деления. Затем вращают измерительный винт экзаменатора в противоположном направлении на 5 – 10 делений и ввинчиванием совмещают концы пузырька уровня. Всего в одном полуприеме делают 10 точных совмещений концов пузырька цилиндрического уровня и 10 отсчетов по шкале измерительного винта. Во втором полуприеме выполняют на ввинчивание 10 точных совмещений концов пузырька уровня (табл. 2).

Таблица 2

Определение средней квадратической ошибки при исследовании цилиндрического уровня

Экзаменатор № 602 MO = 1" $t_{нач} = 21,3^{\circ} C$ $t_{кон} = 21,8^{\circ} C$

| Отсчет по шкале измерительного винта | | v ₁ | v ₂ |
|--------------------------------------|--------------|---|---|
| Ввинчивание | Вывинчивание | | |
| 41,4 | 41,8 | +0,26 | +0,45 |
| 41,3 | 41,2 | +0,16 | -0,15 |
| 41,3 | 41,4 | +0,16 | +0,05 |
| 40,7 | 41,5 | -0,44 | +0,15 |
| 41,3 | 41,2 | +0,16 | -0,15 |
| 40,7 | 41,1 | -0,44 | -0,26 |
| 40,8 | 41,3 | -0,34 | -0,05 |
| 41,0 | 41,3 | -0,14 | +0,05 |
| 41,6 | 41,4 | +0,46 | -0,05 |
| 41,3 | 41,3 | +0,16 | +0,05 |
| 41,14 | 41,35 | $\Sigma v_1 = 0,00$ $\Sigma v_1 v_1 = 0,904$ | $\Sigma v_2 = 0,00$ $\Sigma v_2 v_2 = 0,345$ |

Среднюю квадратическую погрешность совмещения концов пузырька уровня находят в каждом полуприеме по формуле:

$$m_{совм} = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}, \quad (1.21)$$

где n – число отсчетов в полуприеме.

Определение цены деления уровня по рейке. Цена деления уровня зависит от изменения температуры воздуха. Поэтому перед выездом на полевые работы необходимо убедиться, не изменяется ли цена деления уровня и в каких пределах.

Эти исследования лучше всего выполнять в облачную или пасмурную погоду, при небольшом ветре. Нивелир должен быть хорошо защищен от попаданий на него солнечных лучей.

1.6.3. Исследование правильности хода фокусирующей линзы

Эти исследования выполняют только у нивелиров, когда неравенство расстояний между нивелиром и рейками составляет нескольких сотен метров.

Для исследований выбирают ровную открытую площадку 60х60 м с твёрдым грунтом и забивают несколько колышков по окружности радиуса 50 м (рис. 21).

Сначала нивелир устанавливают в точку A , а рейку – последовательно в точках $C, 1, 2, \dots, 7$ и каждый раз берут по рейке отсчёты; затем повторяют отсчёты, ставя рейку последовательно в точках $7, 6, \dots, 1, C$. Затем переносят нивелир в точку C , а рейку – последовательно в точках $A, 1, 2, \dots, 7$ и берут по рейке отсчёты. Эти действия составляют один приём; всего делают три приёма.

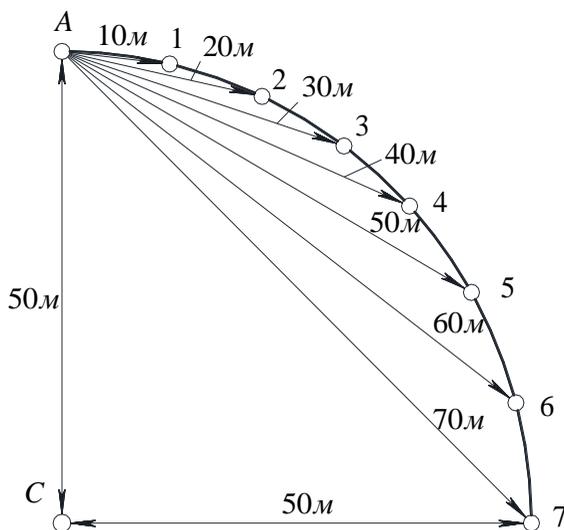


Рис. 21. Схема точек при исследовании хода фокусирующей линзы

Средние значения превышения, вычисленные из результатов измерений всех точек, не должны отличаться от среднего значения превышения, полученного из середины (точка *C*), более чем на 4 мм. В этом случае нивелир считается пригодным к работе. Если расхождения превышают 4 мм, то нивелир нуждается в ремонте.

1.6.4. Определение коэффициента дальномера и асимметрии нитей

Коэффициент дальномера и асимметрию нитей определяют перед полевыми работами. Для нахождения коэффициента дальномера выбирают ровную площадку с незначительным уклоном (менее $0,5^\circ$) и удобную для измерения расстояний с помощью рулетки с относительной ошибкой, не превышающей 1:1500. На расстоянии 50 м друг от друга забивают два колышка. Над первым колышком устанавливают нивелир, а на втором – рейку. Берут отсчеты по средней и дальномерным нитям основной и дополнительной шкалам рейки. Затем наклоняют зрительную трубу в разные стороны так, чтобы изображение пузырька уровня сместилось на 4 – 5 делений, и отсчитывают по основной и дополнительной шкалам рейки. Изменяют высоту нивелира и повторяют все измерения.

При исследованиях нивелиров с компенсатором после первых отсчетов по основной и дополнительной шкалам изменяют высоту нивелира (пять раз).

При исследовании нивелиров Н-3 отсчитывают только по черной стороне рейки без изменения высоты нивелира (табл. 3).

Таблица 3

Определение коэффициента дальномера

Нивелир Н-3 № 22176 D = 50,3 м

| Отсчеты по дальномерным нитям | <i>H – B</i> |
|--------------------------------|-----------------|
| <i>B</i> 1001 <i>H</i> 1503 | 502 |
| <i>B</i> 1143 <i>H</i> 1647 | 504 |
| <i>B</i> 0930 <i>H</i> 1433 | 503 |
| | Среднее = 503,0 |

Коэффициент дальномера вычисляют по формуле, если зрительная труба нивелира имеет постоянную дальномера *c*.

$$K = \frac{D - c}{(H - B)_{cp}}, \quad (1.18)$$

где *c* – постоянная дальномера, взятая из описания нивелира;

D – длина базиса, мм;

$(H - B)_{cp}$ – среднее из разности отсчетов по нижнему и верхнему дальномерным штрихам, мм.

При *c*, равном нулю, формула принимает вид:

$$K = \frac{D}{(H - B)_{cp}}. \quad (1.19)$$

Коэффициент *K* не должен отличаться от 100% более чем на 1%. Одновременно находят асимметрию нитей (*v* %) по формуле:

$$A = \frac{2[(c - v)_{cp} - (H - c)_{cp}]}{(H - c)_{cp}}, \quad (1.20)$$

где c, v, n – отсчеты по соответствующим штрихам сетки нитей. Асимметрия не должна быть более 0,5%.

1.6.5. Определение диапазона и ошибки работы компенсатора

Компенсатор является устройством, позволяющим нивелирам с самоустанавливающейся визирной осью автоматически удерживать ее в горизонтальном положении. При изменении угла наклона зрительной трубы нивелира на малый угол компенсатор возвращает визирную ось в горизонтальное положение. При превышении угла наклона допустимого значения величины компенсации компенсатор не будет выполнять свои функции.

На схемах (рис. 23) и призмы, и зеркало подвешиваются с целью постоянно сохранять горизонтальное положение визирной оси.

Полные исследования нивелира с компенсатором включают:

- определение средней квадратической ошибки установки в вертикальное положение оси вращения нивелира;
- определение диапазона колебаний визирной оси зрительной трубы при приведении ее горизонтальное положение;
- определение систематической ошибки недокомпенсации и времени затухания колебаний подвесной системы компенсатора.

Один из подъемных винтов располагают по направлению закрепленных точек (количество точек не менее 5), на которые устанавливают рейки и берут отсчеты при пяти положениях круглого уровня (рис. 23). Наблюдения выполняют сериями, общее число которых равно пяти. Во всех сериях измеряют превышения по обеим сторонам реек (табл. 4). Перед каждой новой серией меняется высота нивелира.

Если превышения, полученные при разных положениях круглого уровня, отличаются от исходного превышения более, чем на 3 мм для III -го класса или на 5 мм (IV класс), то нивелир не используется для измерения превышений, а нужно сдать его в мастерскую для юстировки.

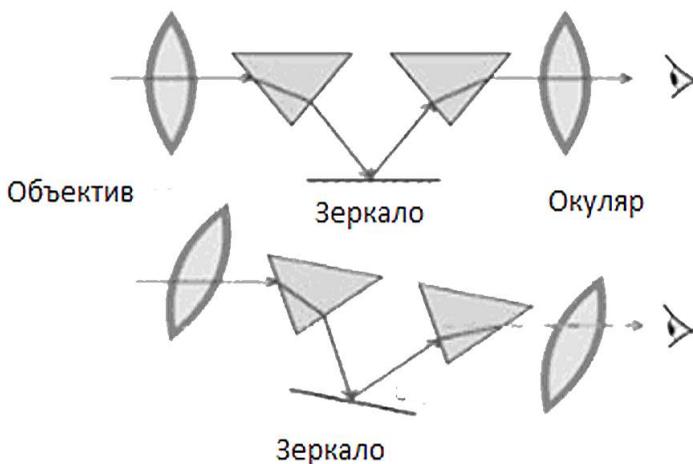
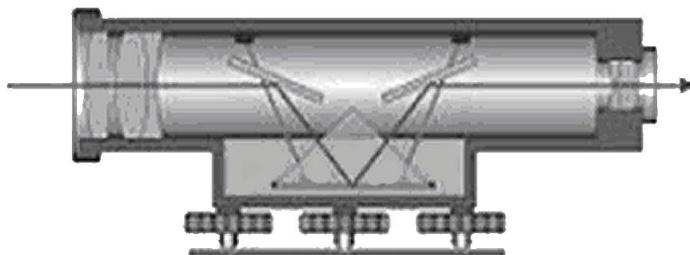


Рис. 22. Схемы расположения компенсатора

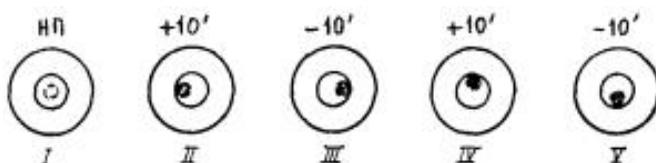


Рис. 23. Схема определения диапазона компенсатора

Систематическую ошибку работы компенсатора для каждого наклона нивелира вычисляют по формуле

$$\sigma_k = \frac{h_i - h_0}{v} \quad (1.18)$$

где h_0 – превышение в миллиметрах при положении пузыря в нуль-пункте;

h_i – превышение в миллиметрах при очередном наклоне нивелира;

v – диапазон наклона нивелира в минутах дуги.

Затем подсчитывают среднее значение из четырёх.

Таблица 4

Определение качества работы компенсатора нивелира

Дата: 24.07.01 8 ч 20 мин. 2Н-ЗКЛ № 14567

$s = 50,0$ м

Ясно, спокойно, изображение слабо колеблющееся

| Номер серии | Превышение, мм | | | | |
|-------------|-----------------------|------------------------------|---------|------------------------------|---------|
| | Пузырек в нуль-пункте | Продольный наклон, угл. мин. | | Поперечный наклон, угл. мин. | |
| | | +10 | -10 | +10 | -10 |
| 1 | 1575,4 | 1575,4 | 1575,6 | 1575,4 | 1575,7 |
| | 1575,6 | 1575,5 | 1575,7 | 1575,4 | 1575,9 |
| 2 | 1575,0 | 1575,8 | 1575,0 | 1575,8 | 1576,0 |
| | 1575,8 | 1575,7 | 1575,6 | 1575,6 | 1575,8 |
| 3 | 1575,5 | 1575,3 | 1575,6 | 1575,4 | 1575,8 |
| | 1575,8 | 1575,4 | 1575,8 | 1575,6 | 1575,8 |
| 4 | 1575,9 | 1575,0 | 1575,2 | 1575,7 | 1575,9 |
| | 1575,9 | 1575,4 | 1575,9 | 1575,7 | 1576,1 |
| 5 | 1575,4 | 1575,5 | 1575,6 | 1575,2 | 1575,8 |
| | 1575,5 | 1575,4 | 1575,8 | 1575,6 | 1575,8 |
| Среднее | 1575,68 | 1575,44 | 1575,78 | 1575,54 | 1575,86 |

Диапазон работы компенсатора определяют по максимальным наклонам нивелира, при которых работает компенсатор, а в отсчётах отсутствуют грубые ошибки. У нивелиров типа Н-3 диапазон работы компенсатора должен быть не менее $15'$, ошибка самоустановки визирной линии трубы – $0,5''$, систематическая ошибка работы компенсатора – $0,3''$ на одну минуту наклона нивелира.

Время затухания колебаний определяют как интервал времени от лёгкого постукивания по корпусу нивелира до полного прекращения колебаний изображения рейки в поле зрения трубы нивелира. Оно не должно превышать двух секунд.

1.7. Устройство, поверки и исследования нивелирных реек

Поверхность рейки должна представлять собой плоскость. Проверку этого условия выполняют с помощью либо тонкой нити, либо проволоки, натягивая их вдоль нивелирной рейки вдоль рейки, определяя просвет между ниткой и рейкой, который не должен превышать 10 мм (для инварной рейки – 5 мм).

Перед началом полевых работ и после их окончания выполняют следующие исследования реек:

- проверяют правильность нанесения дециметровых делений;
- определение длины метровых интервалов реек;
- определение разности высот нулей реек.

Поверку правильности нанесения дециметровых делений выполняют при помощи контрольной линейки (рис. 24).

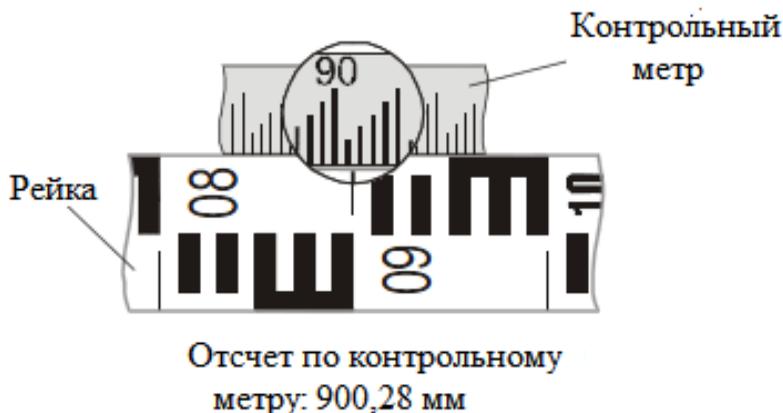


Рис. 24. Схема измерения метровых интервалов рейки в прямом ходе

У деревянных шашечных реек определяют ошибки дециметровых штрихов в интервале 1 – 29 по черной и 47 – 76 по красной

сторонам рейки. Рейка укладывается на горизонтальную поверхность. Ошибки положения дециметровых делений не должны превышать 0,4 мм для III и 0,6 мм для IV класса нивелирования. Укладывают рейку горизонтально и проверяют полностью сначала черную, а затем красную стороны рейки. Измерения каждого метрового интервала выполняют дважды. Контрольную линейку немного сдвигают при повторных измерениях. При этом записываются только сотые миллиметра. Перед началом и в конце исследований измеряется температура контрольной линейки. Пример записи измерений и обработки результатов приведен в табл. 5. Разности отсчетов I – II в пределах метрового интервала не должны различаться между собой на 0,1 мм.

Систематическая ошибка положения дециметрового деления равна $0,70/28 = 0,025$ мм.

Наибольшие ошибки дециметровых делений составляют +0,18 и -0,15 мм.

Исследование метровых интервалов выполняют аналогичным образом. Рейку кладут горизонтально. Каждый интервал рейки 1 – 10, 10 – 20, 20 – 29, 48 – 57, 57 – 67 и 67 – 76 измеряют в прямом и обратном направлениях (рис. 25). При обратных измерениях контрольную линейку поворачивают на 180°. Измерение интервала состоит из двукратного отсчитывания по концам метрового интервала при помощи контрольной линейки. Сначала отсчитывают по левому концу, а затем по правому. Перед вторым измерением интервала контрольную линейку немного сдвигают.

Таблица 5

 Проверка правильности нанесения дециметровых делений
 деревянной рейки (черная сторона)

 Контрольная линейка № 0545 $t_{нач} = 21,3^{\circ} C$ $t_{кон} = +22,4^{\circ} C$

| Номер дециметра | Отсчеты по контрольной линейке, мм | | Разность II – I, мм | Среднее из отсчетов, мм | Ошибка дециметрового деления, мм | Случайная ошибка дециметрового де- ления, мм |
|--------------------|--|-----|---------------------------|----------------------------------|---|---|
| | Положения | | | | | |
| | I | II | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 0,00 | ,28 | 33 | 0,28 | 0,14 | |
| 2 | 100,12 | ,45 | 25 | 100,28 | +0,14 | +0,12 |
| 3 | 200,03 | ,28 | 35 | 200,16 | -0,12 | -0,14 |
| 4 | 300,15 | ,50 | 25 | 300,32 | +0,16 | +0,14 |
| 5 | 400,08 | ,33 | 30 | 400,20 | -0,12 | -0,14 |
| 6 | 500,20 | ,50 | 28 | 500,35 | +0,15 | +0,13 |
| 7 | 600,22 | ,50 | 34 | 600,36 | +0,01 | -0,01 |
| 8 | 700,10 | ,44 | 32 | 700,27 | -0,09 | -0,11 |
| 9 | 800,14 | ,46 | 30 | 800,30 | +0,03 | +0,01 |
| 10 | 900,35 | ,65 | 40 | 900,50 | +0,20 | +0,18 |
| 10 | 0,00 | ,40 | 45 | 0,20 | | |
| 11 | 100,05 | ,50 | 38 | 100,28 | +0,08 | +0,06 |
| 12 | 200,08 | ,46 | 35 | 200,27 | -0,01 | -0,03 |
| 13 | 300,03 | ,38 | 40 | 300,20 | -0,07 | -0,09 |
| 14 | 400,12 | ,52 | 44 | 400,32 | +0,12 | +0,10 |
| 15 | 500,14 | ,58 | 36 | 500,36 | +0,04 | +0,02 |
| 16 | 600,20 | ,56 | 41 | 600,38 | +0,02 | 0,00 |
| 17 | 700,15 | ,56 | 37 | 700,36 | -0,02 | -0,04 |
| 18 | 800,18 | ,55 | 45 | 800,36 | 0,00 | -0,02 |
| 19 | 900,17 | ,62 | 39 | 900,40 | +0,04 | +0,02 |
| 20 | 1000,16 | ,55 | 16 | 1000,36 | -0,04 | -0,06 |
| 20 | 0,00 | ,16 | 20 | 0,08 | | |
| 21 | 100,16 | ,36 | 14 | 100,26 | +0,18 | +0,16 |
| 22 | 200,26 | ,40 | 12 | 200,33 | +0,07 | +0,05 |
| 23 | 300,14 | ,26 | 20 | 300,20 | -0,13 | -0,15 |
| 24 | 400,00 | ,20 | 18 | 400,10 | -0,10 | -0,12 |
| 25 | 500,04 | ,22 | 2 | 500,13 | +0,03 | +0,01 |
| 26 | 600,06 | ,26 | 0 | 600,16 | +0,03 | +0,01 |
| 27 | 700,10 | ,20 | 10 | 700,15 | -0,01 | -0,03 |
| 28 | 800,24 | ,40 | 16 | 800,26 | +0,17 | +0,15 |
| 29 | 900,18 | ,34 | 16 | 800,32 | -0,06 | -0,08 |
| | | | | | Сумма = +0,70 | Сумма = +0,14 |

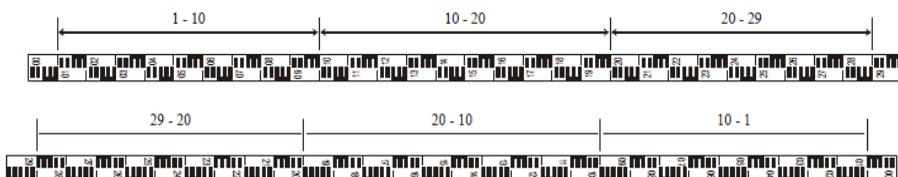


Рис. 25. Схемы измерения метровых интервалов рейки в прямом ходе

Разности отсчетов по правому и левому концам контрольной линейки на каждом интервале не должны различаться между собой больше чем на 0,1 мм. При значительных расхождениях, измерения повторяют, предварительно сдвинув контрольную линейку. Грубые результаты измерений отбрасывают, а из оставшихся берут среднее. Температура контрольной линейки измеряется перед началом и в конце измерений каждой стороны рейки. Пример компарирования деревянной рейки приведен в табл. 6. В измеренные длины вводят поправку за приведение контрольной линейки к температуре компарирования рейки.

Определение разности высот нулей реек осуществляется по четырём кольшкам, забитым в землю на расстоянии 5 – 7 м от нивелира. Исследуемые рейки последовательно устанавливаются на каждый кольшек по круглому уровню.

На каждой рейке берется отсчет по черной, а затем по красной сторонам. Разности высот нулей шкал черной и красной сторон реек получаются путем вычитания из отсчета по красной стороне отсчета по черной стороне реек.

Таблица 6

Определение средней длины метрового интервала деревянной рейки

Дата: 05.11.12

Рейка N 2342 (черная сторона) Контрольная линейка N 0721

 $L = 1000 + 0,01 + 0,018 (t - 16,8 \text{ } ^\circ\text{C}), \text{ мм}$

| Интервал рейки | Отсчёты по линейке | | П – Л (мм) | Среднее П – Л (мм) | Поправка за длину линейки и температуру (мм) | Длина интервала рейки (мм) |
|--|--------------------|----------|------------|--------------------|--|----------------------------|
| | Л | П | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Прямой ход. $t = 21,8 \text{ } ^\circ\text{C}$ | | | | | | |
| | 0.12 | 900.78 | 900.66 | | | |
| 1–10 | | | | 900.70 | –0.05 | 900.65 |
| | 0.44 | 901.18 | 900.74 | | | |
| | 0.34 | 1 000.52 | 1 000.16 | | | |
| 10–20 | | | | 1000.18 | –0.06 | 1 000.12 |
| | 0.48 | 1 000.68 | 1 000.20 | | | |
| | 0.22 | 900.44 | 900.22 | | | |
| 20–29 | | | | 900.27 | –0.05 | 900.22 |
| | 0.86 | 901.18 | 900.32 | | | |
| Обратный ход. $t = 22 \text{ } ^\circ\text{C}$ | | | | | | |
| | 0.28 | 900.58 | 900.30 | | | |
| 29–20 | | | | 900.32 | –0.04 | 900.28 |
| | 0.46 | 900.80 | 900.34 | | | |
| | 0.16 | 1 000.30 | 1000.14 | | | |
| 20–10 | | | | 1 000.12 | –0.05 | 1 000.07 |
| | 0.32 | 1 000.42 | 1000.10 | | | |
| | 0.06 | 900.68 | 900.62 | | | |
| 10–1 | | | | 900.66 | –0.04 | 900.62 |
| | 0.34 | 901.04 | 900.70 | | | |
| | | | | | | $\Sigma = 5\ 601,96$ |

Средняя длина метрового интервала рейки N 2342 по черной стороне равна $5599,72 / 5,6 = 999,95 \text{ мм}$.

Максимальное колебание разностей из определений не должно превышать 3 мм. Грубые ошибочные определения вычеркиваются и взамен их выполняются новые. Таких определений делается 2 серии, высота прибора перед каждым определением меняется на 5 – 7 см. Порядок записи отсчётов и вычислений приводится в табл.7.

Таблица 7

Определение разности высот нулей реек

| Приёмы | Номера костьилей | Отсчёты по рейке № 1 | | | Отсчёты по рейке № 2 | | |
|---|------------------|----------------------|-----------------|-------------------|----------------------|-----------------|-------------------|
| | | Чёрная сторона | Красная сторона | Разность отсчётов | Чёрная сторона | Красная сторона | Разность отсчётов |
| I | 1 | 1 561 | 6 251 | 4 690 | 1 560 | 6 150 | 4 590 |
| | 2 | 1 610 | 6 301 | 4 691 | 1 609 | 6 199 | 4 590 |
| | 3 | 1 689 | 6 378 | 4 689 | 1 689 | 6 277 | 4 588 |
| | 4 | 1 790 | 6 480 | 4 690 | 1 789 | 6 378 | 4 589 |
| II | 1 | 1 601 | 6 290 | 4 689 | 1 602 | 6 192 | 4 590 |
| | 2 | 1 649 | 6 339 | 4 690 | 1 649 | 6 240 | 4 591 |
| | 3 | 1 730 | 6 421 | 4 691 | 1 729 | 6 318 | 4 589 |
| | 4 | 1 829 | 6 519 | 4 690 | 1 830 | 6 420 | 4 590 |
| Сумма отсчётов | | 13 459 | 50 979 | 37 520 | 13 457 | 50 174 | 36 717 |
| Средний | | 1 682,4 | 6 372,4 | 4 690,0 | 1 682,1 | 6 271,8 | 4 589,6 |
| Разность высот нулей красной и чёрной сторон рейки 1 – 4 690 мм. рейки 2 – 4 590 мм. Разность высот нулей реек (1 – 2): чёрных сторон $1\ 682,4 - 1\ 682,1 = +0,3$ мм. красных сторон $6\ 372,4 - 6\ 271,8 = +100,6$ мм. пары реек $+0,3 - 100,6 = -100,3$ мм ≈ -100 мм. | | | | | | | |

Полученные разности высот нулей черной и красной сторон каждой рейки и высот нулей красных сторон пары реек используются для контроля чередования реек, качества наблюдений, а также правильности записи отсчетов и вычислений на станции. Поправки в нивелирные ходы III и IV классов с нечетным числом станций вводятся при разности высот нулей шкал реек более 1 мм.

1.8. Нивелирование III класса

В современных условиях целесообразней прокладывать ходы нивелирования III класса с использованием нивелиров с компенсатором. Нивелиры и рейки с целью установления их пригодности для нивелирования необходимо выполнить поверки и исследования, согласно требований «Инструкции по нивелированию I, II, III и IV классов», приведения в рабочее состояние и определения постоянных.

Нивелирование III класса производят в прямом и обратном направлениях. Наблюдения на станции способом «средней нити» выполняют в следующем порядке.

Приводят нивелир в рабочее положение при помощи установочного уровня.

Наводят трубу на черную сторону задней рейки, берут отсчеты по средней и дальномерным нитям.

Наводят трубу на черную сторону передней рейки и действуют аналогично тому, как это было при наблюдении задней рейки.

Переднюю рейку поворачивают красной стороной и берут отсчет только по средней нити.

Наводят трубу на красную сторону задней рейки и также производят отсчет только по средней нити.

Нивелирование выполняют участками в 20 – 30 км. Причем по этим участкам нивелирование осуществляем в прямом и обратном направлениях. При этом рейки меняют местами.

Рекомендуемая нормальная длина визирного луча составляет 75 м. В случае отсутствия колебаний изображения и увеличении трубы не менее $35\times$ длину луча можно увеличивать до 100 м. Неравенство плеч на станции допускается не более 2 м, при накопление по секции – 5 м. Превышение луча визирования над препятствием должно быть не менее 0,3 м.

Нивелирование выполняют по рейкам с уровнем по башмакам. В местах установки башмаков предварительно снимают дерн. Можно использовать забитые деревянные колья с вбитыми в их торцы гвоздями с полусферическими головками. Размеры кольев должны быть такими, чтобы обеспечить их устойчивость.

В случае перерыва в процессе нивелирования и невозможности окончить ход на постоянном или временном реперах, разрешается заканчивать нивелирование на трех штырях или кольях, забитых в дно заранее приготовленных выемок, после чего закрепленные точки покрывают травой и засыпают землей. После перерыва выполняют нивелирование на последней станции, а при необходимости – и на предпоследней. Точки считаются сохранившими свое положение, если полученные до и после перерыва значения превышений различаются не более чем на 3 мм.

Все записи делаются в журнале установленной формы (табл.8) или вводят в оперативную запоминающего устройства регистратора.

Таблица 8

Форма журнала нивелирования III класса

| Номера штатива и реек | Отсчёты по дальномерным нитям | | Контрольн. превыш. | Наблюдения по средней нити | | | Наблюдения по средней нити |
|-----------------------|-------------------------------|----------|--------------------|----------------------------|-----------|-----------|----------------------------|
| | Задняя | Передняя | | Задняя | Передняя | Превышен. | |
| 1 | 1572 (2) | 1812 (5) | - 240(11) | 1739 (1) | 1971 (4) | -232 (14) | -232 (14) |
| 1 – 2 | 1904 (3) | 2130 (6) | - 226(12) | 6430 (8) | 6761 (7) | -331 (15) | -331 (15) |
| | 332 (9) | 318 (10) | +14/+14 (13) | 4691(16) | 4790 (17) | + 99 (18) | + 99 (18) |

При использовании односторонних реек контрольное превышение на станции определяют при втором горизонте нивелира, меняя высоту инструмента примерно на 10 см.

Расхождения между превышениями и разность высот реек, вычисленная и полученная из исследований, не должны быть более 1,5 мм (30 делений барабана при его цене деления 0,05 мм).

При нивелировании способом «средней нити» необходимо соблюдать следующие допуски.

Отсчет по средней нити каждой рейки не должен расходиться более чем на 3 мм с соответствующей полусуммой отсчетов по дальномерным нитям.

Расхождение между значениями превышения, полученными по черным и красным сторонам реек, не должно быть более 3 мм. После выполнения нивелирования по секции сравнивают между собой значения превышений, полученных из прямого и обратного ходов, причем расхождение между превышениями не должно превышать 10 мм .

По мере завершения нивелирования по секциям регулярно заполняют ведомость превышений установленной формы (табл. 9)

Таблица 9

ВЕДОМОСТЬ ПРЕВЫШЕНИЙ И ВЫСОТ РЕПЕРОВ НИВЕЛИРОВАНИЯ III КЛАССА

| Номер секции | Вид и номер репера | Местоположение репера | Расстояние от начального репера | Число штативов прямо | Измеренное превышение, м | | Разность превышений, мм | Среднее превышение, м | Поправка за уравнивание, М | Уравненное превышение, м | Высота в Балтийской системе высот, м | Примечание |
|---|------------------------------|--|---------------------------------|----------------------|--------------------------|--------------|-------------------------|-----------------------|----------------------------|--------------------------|--------------------------------------|---|
| | | | между реперами | обратно | прямой ход | обратный ход | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| Линия № 10 от грунт. Реп. 5540 до стен. Реп. 513. Исполнитель: ст. техник Петров Н.Н. Дата: 01 – 03.07.2011 | | | | | | | | | | | | |
| 1а | Грунт. Репер 5540 Тип 116 | Глазниха, станция в 4,9 км к сев.-вост. От нее по дороге на ст. Мощное, в 30 м к сев. От дороги в 500 м к вост. От моста через р. Серебрянку | 00 0,7 | | | | | | | | 72,963 | Высота получена из «Каталога пунктов в нивелировании II класса линии Кон-Ивановка», 1989 г. |
| | Вр. Реп. Пень с гвоздем | Глазниха, станция в 4,2 км к сев.-вост. От нее в 15 км к сев. От переезда че-рез ж.д. | 0,7 2,0 | 8 8 | +0,524 | -0,527 | -3 | +0,526 | - | +0,526 | 73,489 | |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|----|--|--|---------------------|------------------|--------|--------|-----|--------|----|--------|--------|----|
| 16 | Грунт. Репер 10542 Тип 121 | Глазниха, станц. в 2,2 км к сев.-вост. от нее в 45 км к сев от дороги на ст. Мощное | 2,7 ---- 1,7 | 19 ---- 19 | +2,210 | -2,214 | -4 | +2,212 | -1 | +2,211 | 75,700 | |
| 2а | Вр. реп. пикетный столб | 426 км ж.д. 7 пк в 5 м к сев. от ж.д. полотна | 4,4 ---- 1,8 | 16 ---- 17 | -0,342 | +0,346 | +4 | -0,344 | -1 | -0,345 | 75,255 | |
| 2б | Стен. репер 502 | р. Серебрянка в сев. устье трубопровода ни 428 км ж.д. | 6,2 ---- 2,8 | 28 ---- 29 | +4,124 | -4,110 | +14 | +4,117 | -1 | +4,116 | 79,471 | |
| 3а | Вр. репер межевой столб | с. Ивановка в 0,5 км от него по дороге в с. Крутое справа от дороги | 9,0 ---- 3,0 | 20 ---- 21 | -1,512 | +1,514 | +2 | +1,513 | -1 | -1,514 | 77,957 | |
| 3б | Сигнал 2 кл Ивановка тип1 | с. Ивановка в 2,5 км ю-зап от него пере- крест. дорог | 12,0 ---- 2,6 | 30 ---- 31 | +4,571 | -4,566 | +5 | +4,568 | -1 | +4,567 | 82,524 | |

Для наблюдений на станции существует несколько допусков:

- уклонение фактической разности отсчетов по красной и черной сторонам рейки не должно отличаться от разности высот нулей рейки более 3 мм;

- разность превышений по черным и красным сторонам реек не должна превышать 3 мм с учётом разности высот нулей реек;

- среднее из отсчетов по дальномерным нитям не должно отличаться от отсчета по средней нити больше 3 мм.

Инструментальные ошибки, сопровождающие процесс измерения превышений на станции:

- ошибка приведения визирной линии трубы в горизонтальное положение

$$m_z = \frac{m_{yp}''}{\rho''} \cdot S_{(мм)}, \quad (1.19)$$

где m_{yp} – ошибка установки уровня в нуль-пункт ($m_{yp} \approx 3''$); при расстоянии от нивелира до рейки $S = 100$ м $m_r \approx 1,5$ мм.

- ошибка от несоблюдения главного условия нивелира; при равенстве расстояний от нивелира до задней и передней реек на станции она исключается.

Инструментальные ошибки, сопровождающие процесс измерения превышений на станции:

- ошибка приведения визирной линии трубы в горизонтальное положение;

- ошибка из-за неправильного хода фокусирующей линзы; для исключения этой ошибки рекомендуется не менять фокусировку при наблюдении задней и передней реек;

- ошибка недокомпенсации наклона зрительной трубы у нивелиров с компенсатором; для ослабления этой ошибки следует соблюдать определенный порядок приведения пузырька установочного уровня в нуль-пункт;

- ошибка в отсчете по рейке из-за ограниченной разрешающей способности трубы

$$m_p = \frac{60'' \cdot S}{\rho \cdot V}, \quad (1.20)$$

- где S – расстояния от нивелира до рейки;
- V – увеличение трубы; при $S = 75$ м и $V = 30 \times m_p = 0,75$ мм;
- ошибка из-за наклона рейки: при установке рейки по уровню эта ошибка очень мала (меньше 0.01 мм), и ею можно пренебречь;
 - ошибка взятия отсчета по рейке: по результатам специальных исследований эта ошибка оценивается величиной 0.8 мм.
- Ошибки из-за влияния внешних условий:
- ошибка из-за влияния рефракции: для ослабления этой ошибки рекомендуется измерять превышения в периоды хорошей видимости и четких изображений;
 - ошибка из-за вертикальных перемещений костылей и башмаков;
 - ошибка из-за неустойчивости штатива: на слабых грунтах рекомендуется снимать дерн или устанавливать ножки штатива на деревянные колья, забитые в землю на глубину 0,2 – 0,4 м.

1.9. Обработка результатов нивелирования III класса

Разомкнутый нивелирный ход начинается на репере с известной отметкой (начальный исходный репер) и заканчивается на репере с известной отметкой (конечный исходный репер); ход включает t реперов с неизвестными отметками и состоит из n секций (секцией называется часть хода между соседними реперами); таким образом, (рис. 21).

Введем следующие обозначения элементов нивелирного хода:

n – количество секций в ходе;

l_i – длина i -ой секции;

l_{iH} – расстояние от начального исходного репера до репера с номером i ;

l_{iK} – расстояние от репера с номером i до конечного исходного репера;

k_i – количество станций на i -ой секции;

L – длина всего хода, $L = \sum l_i$;

K – общее количество станций в ходе, $K = \sum k_i$;

$h_{i пр}$ – измеренное превышение по i -ой секции в прямом ходе;

$h_{i обр}$ – измеренное превышение по i -ой секции в обратном

ходе;

$h_{i ср}$ – измеренное среднее превышение по i -ой секции;

- d_i – разность измеренных превышений на i -ой секции, $d_i = h_{np} + h_{i\text{обр}}$;
 v_i – поправка в среднее превышение по i -ой секции;
 f_h – высотная невязка хода;
 H_i – отметка i -го репера;
 P_{Hi} – вес отметки i -го репера;
 $m_{км}$ – средняя квадратическая ошибка измеренного превышения на 1 км хода;
 M_{Hi} – средняя квадратическая ошибка отметки i -го репера.

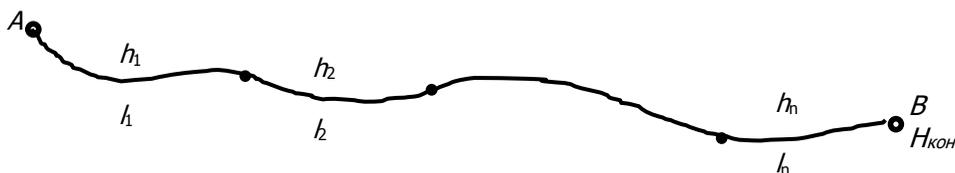


Рис. 26. Схема разомкнутого нивелирного хода

Обработку измерений в нивелирном ходе III класса выполняют в следующем порядке:

1. Вычисляют средние превышения по секциям

$$h_{i(ср)} = \frac{1}{2} \cdot (h_{i(нр)} - h_{i(обр)}) \quad (1.21)$$

Контролируют правильность вычислений средних превышений по формуле

$$\sum h_{i(ср)} = \frac{1}{2} \cdot (\sum h_{i(нр)} - \sum h_{i(обр)}) \quad (1.22)$$

2. Вычисляют высотную невязку хода

$$f_h = \sum h_{i(ср)} - (H_{кон} - H_{нач}) \quad (1.23)$$

3. Вычисляют поправки в средние превышения

$$V_{hi} = -\frac{f_h}{L} \cdot l_i \quad (1.24)$$

4. Вычисляют исправленные значения средних превышений и контролируют правильность их вычислений

$$h_{i(испр)} = h_{i(ср)} + V_{hi}; \quad (1.25)$$

$$\sum h_{i(испр)} = H_{кон} - H_{нач} \quad (1.26)$$

5. Вычисляют уравненные отметки определяемых реперов, начиная с начального репера, у которого $i = 0$, и заканчивая на конечном исходном репере, вычисленная отметка которого должна быть в точности равна заданной отметке $H_{кон}$

$$H_i = H_{i-1} + h_{i(испр)} \quad (1.27)$$

6. Вычисляют среднюю квадратическую ошибку превышения на 1 км хода дважды

$$m_{км} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\left[\frac{d_i^2}{l_i} \right]}{n}} \quad \text{и} \quad m_{км} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\left[d_i^2 \right]}{L}} \quad (1.28)$$

7. Вычисляют веса отметок определяемых реперов

$$P_{H_i} = \frac{L}{\left[l_{iH} \right] \cdot \left[l_{iK} \right]} \quad (1.29)$$

8. Вычисляют среднюю квадратическую ошибки отметок определяемых реперов

$$m_{H_i} = \frac{m_{\text{ксм}}}{\sqrt{P_{H_i}}} \quad (1.30)$$

1.10. Нивелирование IV класса

При создании высотного съемочного обоснования и решении многих задач инженерно-строительной практики находит широкое применение нивелирование IV класса и техническое нивелирование.

Общая схема и последовательность работ при нивелировании таковы:

- проектирование нивелирных ходов и сети;
- рекогносцировка на местности для уточнения и выбираются мест закладки для установки реперов высотной основы и марок;
- закладка реперов и марок;
- нивелирование;
- обработка результатов полевых измерений и составление каталога отметок и при необходимости составление профиля.

Если ходы IV класса образуют замкнутые полигоны или опираются на пункты нивелирования высшего класса, то нивелирование производится в одном направлении. Если нивелирный ход опирается только на один пункт (висячий ход), то он нивелируется в прямом и обратном направлениях или дважды в одном направлении двумя нивелирами.

Нивелирование производят из середины при нормальной длине визирного луча, равной 100 м, в часы спокойного изображения. Расстояние от нивелира до реек определяют при помощи дальномера, тросового канатика или просмоленной бечевы. Разность расстояний от нивелира до задней и передней реек не должна быть более 5 м.

Работа и контроль нивелирования на станции. Последовательность работы на станции такова:

- а) отсчет по средней и одной из крайних нитей сетки по черной стороне задней рейки;
- б) то же по черной стороне передней рейки;
- в) отсчет по средней нити по красной стороне передней рейки;
- г) то же по красной стороне задней рейки.

Отсчет по одной из крайних нитей производится для определения расстояния. Перед каждым отсчетом пузырек уровня приводят в нуль-пункт.

Основными способами контроля отсчетов по рейкам являются:

- применение двусторонних реек;
- нивелирование при двух горизонтах инструмента (при работе с односторонними рейками). Превышения, полученные при разных горизонтах, не должны различаться более чем на 4 мм.

По мере прокладки нивелирных ходов составляют их схему, на которой показывают все реперы и марки, местные предметы, на которые были переданы отметки, превышения по основным и привязочным ходам, длины ходов, число станций.

Обработка результатов нивелирования включает проверку вычислений, произведенных в журналах нивелирования, составление ведомости превышений и определение невязки в ходе, увязку превышений и вычисление отметок точек.

Невязка f_h в зависимости от вида хода определяется следующим образом.

1. Ход замкнутый. Теоретическая сумма превышений должна быть равна нулю

$$\sum h_T = 0. \quad (1.31)$$

Следовательно,

$$f_h = \sum h_{np}. \quad (1.32)$$

2. Ход опирается на точки с известными отметками. Теоретическая сумма превышений должна быть равна разности отметок конечной H_k и начальной H_0 точек хода. Поэтому

$$f_h = \sum h_{np} - (H_k - H_0). \quad (1.33)$$

3. Висячий ход. Невязка определяется как разность сумм превышений, полученных по прямому $\sum h_n$ и обратному $\sum h_o$ ходам (или результатам нивелирования первым и вторым нивелирами), т.е.

$$f_h = \sum h_0 - \sum h_n. \quad (1.34)$$

Согласно инструкции невязка в превышениях в замкнутом и разомкнутом нивелирных ходах IV класса не должна превышать

$$f_{h_{\text{доп}}} = \pm 20 \text{ мм} \sqrt{L}. \quad (1.35)$$

В случае висячего хода допустимая невязка определяется по формуле

$$f_{h_{\text{доп}}} = \pm 30 \text{ мм} \sqrt{L} \quad \text{мм}, \quad (1.36)$$

где L – число километров в ходе.

После проверки допустимости невязки ее распределяют по частям хода между реперами (звеньями) пропорционально их длинам (или числу станций) и вычисляют отметки реперов и других точек. Значение полученных отметок заносят в каталог.

Существует несколько способов уравнивания как приближенных, так и строгих. В "Теории математической обработке геодезических измерений" разработано несколько способов строгой и упрощенной совместной обработки групп измерений.

Основными способами строгой обработки являются способы, основанные на принципе наименьших квадратов. Практическое применение таких способов было осуществлено К.Ф. Гауссом в 1801 году.

Существуют две разновидности МНК: параметрический способ уравнивания и коррелятный способ уравнивания.

1.11. Тригонометрическое нивелирование

Тригонометрическое нивелирование производится с целью создания высотной основы топографических съемок и при решении различных инженерных задач. Его достоинством является возможность передачи высот на большие расстояния. Для определения превышения h между точками A и B (рис. 27) в одной из точек (точке A) устанавливают теодолит-тахеометр, а в точке B – вежу или рейку, наводят трубу на верх визирного знака и измеряют угол наклона v .

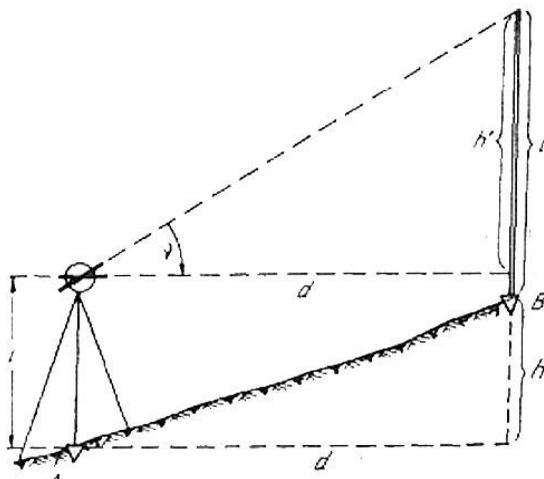


Рис. 27. Схема тригонометрического нивелирования

Если горизонтальное проложение линии AB равно d , высота инструмента и знака соответственно i и l , то, как следует из рисунка,

$$h + l = h' + i$$

или

$$h = h' + i - l. \quad (1.37)$$

Поскольку

$$h' = d \cdot \operatorname{tg} v,$$

то искомая величина превышения будет равна

$$h = d \cdot \operatorname{tg} v + i - l. \quad (1.38)$$

Эта формула получена без учета кривизны Земли и влияния световой рефракции.

$$h = d \cdot \operatorname{tg} v + i - l + f. \quad (1.39)$$

Это основная формула тригонометрического нивелирования.

Если визировать на метку рейки, сделанную на высоте инструмента ($i = l$), и пренебрегать значением f , то формула (6.16) примет вид

$$h = d \cdot \operatorname{tg} \nu. \quad (1.40)$$

Это сокращенная формула тригонометрического нивелирования.

Горизонтальная проекция d наклонного расстояния, измеренного дальномером, определяется из выражения

$$d = Kn \cos^2 \nu + c \cos \nu.$$

Подставив значение d в формулу (1.40), получим

$$h = Kn \sin \nu \cos \nu + c \sin \nu = \frac{1}{2} Kn \sin 2\nu + c \sin \nu.$$

При углах наклона, не превышающих 10° , $\sin 2\nu \approx \sin \nu$, а потому

$$h = \frac{1}{2} (Kn + c) \sin 2\nu. \quad (1.41)$$

Этой формулой широко пользуются на практике.

2. СПОСОБЫ УРАВНИВАНИЯ

2.1. Сущность принципа наименьших квадратов

Для однозначного определения значений k неизвестных параметров необходимо и достаточно измерить k величин. Поскольку в геодезии существует принцип избыточности измерений, то число $r = n - k$, где n – число всех измеренных величин, является избыточным. При этом избыточные измерения должны находиться с необходимыми в функциональной зависимости. Наилучшее решение в процессе обработки результатов измерений получают согласно принципу наименьших квадратов, который состоит из следующего условия

$$[pvv] = \min, \quad (2.1)$$

где p – веса измеренных величин;
 v – поправки в измеренные значения.

Пусть даны результаты равноточных измерений одной величины x_1, x_2, \dots, x_n . При этом следует иметь в виду, что истинное значение X измеряемой величины известно.

Составим ряд истинных ошибок результатов измерений согласно равенству

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= x_1 - X; \\ \Delta_2 &= x_2 - X; \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_n &= x_n - X. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Почленно сложив равенства (2.2), получим следующее значение:

$$[\Delta] = [x] - nX$$

В результате, предварительно разделив на n , будем иметь

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[x]}{n} - X. \quad (2.3)$$

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}$$

Введем обозначение \bar{x} – среднее арифметическое значение измеряемой величины. Тогда

$$\frac{[\Delta]}{n} = \bar{x} - X \quad (2.4)$$

На основании четвертого свойства случайных ошибок можно утверждать, что $\bar{x} \rightarrow X$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. среднее арифметическое из результатов равноточных измерений стремится к истинному значению этой величины при неограниченном возрастании числа измерений.

Среднее арифметическое из данного ряда равноточных измерений принимается за наиболее надежное значение и при конечном числе измерений.

Пусть $x' \neq \bar{x}$, тогда

$$v'_i = x_i - x'; \quad v_i = x_i - \bar{x}.$$

Установим связь между отклонениями v и v'

$$v'_i - v_i = \bar{x} - x'. \quad (2.5)$$

В равенстве (2.5) v_i перенесем в правую часть. Затем, умножая на соответствующие веса квадраты отклонений от среднего арифметического, почленно сложим

$$[pv'v'] = [pvv] + 2[pv](\bar{x} - x') + [p](\bar{x} - x')^2. \quad (2.6)$$

В правой части равенства (2.6) второе слагаемое согласно первому свойству отклонений равно нулю. Следовательно, из равенства (2.6) следует, что

$$[pvv] < [pv'v']. \quad (2.7)$$

Данное свойство подтверждает, что если ошибки результатов неравноточных измерений подчиняются нормальному закону распределения, то наиболее надежным значением является общая арифметическая средина.

Определение окончательных значений искомых величин при избыточных измерениях называют уравниванием, а эти же действия с соблюдением условия (2.1) – уравниванием по способу наименьших квадратов или строгим уравниванием.

Докажем, что арифметическое среднее удовлетворяет принципу наименьших квадратов. Предположим, что некоторая величина равноточно измерялась n раз:

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Наиболее надежное значение из результатов измерений составит X , тогда

$$v_i = X - x_i, \text{ где } i = 1, 2, \dots, n.$$

Определим значение X под условием (2.1).

$$R = [vv] = (X - x_1)^2 + (X - x_2)^2 + \dots + (X - x_n)^2 = \min.$$

$$\frac{\partial R}{\partial X} = 2(X - x_1) + 2(X - x_2) + \dots + 2(X - x_n) = 0,$$

откуда

$$X = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{[x]}{n}. \quad (2.8)$$

В случае неравноточных измерений

$$R = [pvv] = p_1 \cdot (X - x_1)^2 + p_2 \cdot (X - x_2)^2 + \dots + p_n \cdot (X - x_n)^2 = \min.$$

$$\frac{\partial R}{\partial X} = 2p_1(X - x_1) + 2p_2(X - x_2) + \dots + 2p_n(X - x_n) = 0$$

следовательно

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= w_1; \\
 \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= w_2; \\
 &\dots\dots\dots \\
 \varphi_r(x_1, x_2, \dots, x_n) &= w_r.
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Если уравнения связи имеют нелинейный вид, то а их нужно привести к линейному виду

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \cdot v_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \cdot v_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \cdot v_n = 0.
 \tag{2.13}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} &= a_i; & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} &= b_i; \dots; & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} &= g_i. \\
 a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1 &= 0; \\
 b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2 &= 0; \\
 &\dots\dots\dots \\
 g_1 v_1 + g_2 v_2 + \dots + g_n v_n + w_r &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Эти уравнения называются уравнениями поправок. Поскольку количество уравнений поправок r всегда меньше количества поправок n , то система уравнений поправок не имеет решения, но с учетом условия $[pvi] = \min$ получим задачу на условный экстремум, которую можно решить через вспомогательные множители Лагранжа, называемых коррелатами и обозначаемых K_j , количество коррелат равно r .

Поправки v_i выражаются через коррелаты следующим образом

$$v_i = q_i \cdot (a_i K_1 + b_i K_2 + \dots + g_i K_r).
 \tag{2.15}$$

2.3. Матричный способ решения

Система уравнений поправок записывается в виде матричного уравнения

$$A_{rn} \cdot V_{n1} + W_{r1} = 0, \quad (2.21)$$

здесь A_{rn} – матрица коэффициентов уравнений поправок размером rn ;

V_{n1} – вектор поправок размером;

W_{r1} – вектор невязок размером $r1$.

Условие минимума суммы квадратов поправок имеет вид

$$V_{n1}^T P_{nn} V_{n1} = \min. \quad (2.22)$$

Система нормальных уравнений коррелат имеет вид

$$N_{rr} K_{r1} + W_{r1} = 0, \quad (2.23)$$

где N_{rr} – матрица коэффициентов нормальных уравнений коррелат

$$N_{rr} = A_{rn} Q_{nn} A_{rn}^T, \quad (2.24)$$

где Q_{nn} – матрица коэффициентов нормальных уравнений коррелат;

K_{r1} – вектор коррелат размером $r1$.

Поправки в измерения выражаются через коррелаты по формуле

$$V_{n1} = Q_{nn} A_{rn}^T K_{r1}. \quad (2.25)$$

2.4. Уравнивание нивелирной сети коррелятным способом

Веса измеренных превышений h_1, h_2, \dots, h_n вычисляются по длине секций $p_i = 1/l_i$. За ошибку единицы веса μ_0 примем ошибку измерения превышения на пути в 1 км и обозначим среднюю квадратическую ошибку i -го превышения через m_i , тогда имеем последовательно

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2}; \quad m_i = \mu_0 \cdot \sqrt{l_i}; \quad p_i = \frac{\mu_0^2}{\mu_0^2 \cdot l_i} = \frac{1}{l_i}. \quad (2.26)$$

В нивелирном ходе всего одно условие

$$(h_1 + v_1) + (h_2 + v_2) + \dots + (h_n + v_n) - (H_{\text{кон}} - H_{\text{нач}}) = 0, \quad (2.27)$$

которое линейно относительно поправок v_i , поэтому условное уравнение поправок будет

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + w_1 = 0. \quad (2.28)$$

Невязка подсчитывается по формуле:

$$w_1 = \sum h_{\text{изм}} - \sum h_{\text{теор}} = h_1 + h_2 + \dots + h_n - (H_{\text{кон}} - H_{\text{нач}}). \quad (2.29)$$

Сначала выразим обратные веса через длины секций $q_i = l_i$ и $[q] = \sum l_i = L$. Затем напишем нормальное уравнение одной коррелаты и учтём, что $w_1 = f_h$,

$$[qaa]K_1 + f_h = 0, \quad (2.30)$$

откуда

$$K_1 = -\frac{f_h}{[qaa]} = -\frac{f_h}{[q]} = -\frac{f_h}{L},$$

так как $a_i = 1$ и

$$v_i = -\frac{f_h}{L} \cdot l_i.$$

Уравненные значения измеренных превышений вычисляем по формуле, затем вычисляем уравненные значения отметок определяемых реперов

$$H_i = H_{i-1} + h_{i,испр}. \quad (2.31)$$

При уравнивании нивелирного хода III класса следует учесть, что в нём превышения по секциям измеряются дважды – в прямом и обратном направлениях, поэтому

$$h_i = \frac{1}{2} \cdot (h_{np} - h_{обр}). \quad (2.32)$$

Вычисляют расхождения прямого и обратного превышений

$$\delta_{h_i} = (h_{np} + h_{обр})$$

и сравнивают их с допустимыми значениями

$$\delta_{h_i, доп} = 10 \text{ мм} \cdot \sqrt{L_i}.$$

Оценка точности нивелирного хода III класса выполняется по формулам

$$P_{H_i} = \frac{L}{[l_{iH}] \cdot [l_{iK}]}; \quad m_{км} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}; \quad m_{км} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{[l]}}; \quad m_{H_i} = \frac{m_{км}}{\sqrt{P_{H_i}}}. \quad (2.33)$$

Отметку репера можно определить от исходных реперов, и определить из этих значений вычислим как средневесовое, вес которого равен сумме весов этих двух отметок.

Вес первой отметки вычисляется по формуле

$$P_1 = \frac{1}{[l]_i^i},$$

в знаменателе стоит расстояние от начального исходного репера до определяемого репера.

Вес второй отметки вычисляется по формуле

$$P_2 = \frac{1}{[l]_{i+1}^n},$$

в знаменателе стоит расстояние от конечного исходного репера до определяемого репера.

Далее пишем

$$P_{H_i} = P_1 + P_2 = \frac{[l]_i^i + [l]_{i+1}^n}{[l]_i^i \cdot [l]_{i+1}^n} = \frac{L}{[l]_i^i \cdot [l]_{i+1}^n}. \quad (2.34)$$

2.5. Обработка нивелирной сети с одной узловой точкой

В настоящее время обработка нивелирных сетей выполняется на ПК по программам, в которых реализованы алгоритмы строгого СНК-уравнивания.

Из применяемых в прежние времена "ручных" способов: способ эквивалентной замены, способ узлов, способ полигонов.

Особый теоретический интерес представляет первый способ, в котором путем несложных вычислений нивелирная сеть с несколькими узловыми точками может быть преобразована в сеть с одной узловой точкой. В способе узлов и способе полигонов уравнивание выполняется методом приближений. Оба эти способа были разработаны русским учёным геодезистом В.В. Поповым.

Пусть в репере 1 сходятся n ходов; длины ходов обозначим через l_i , измеренные превышения по ним – через h_i (рис. 28). Отметку репера 1 можно получить n раз.

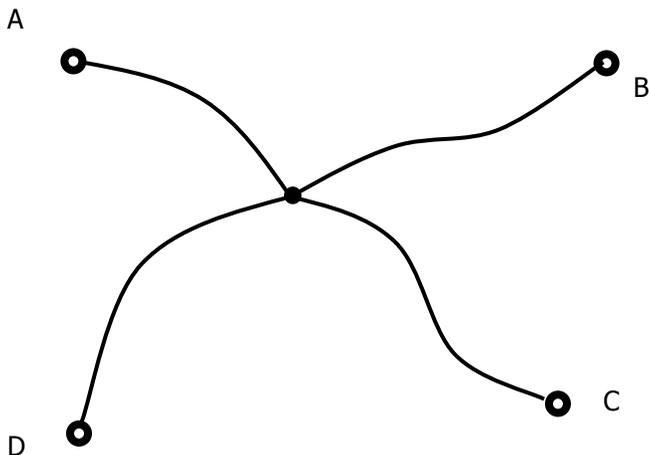


Рис. 28. Схема нивелирной сети с одной узловой точкой

$$H_1^{(1)} = H_A + h_1 - \text{из 1-го хода;}$$

$$H_1^{(2)} = H_B + h_2 - \text{из 2-го хода;}$$

$$H_1^{(3)} = H_C + h_3 - \text{из 3-го хода;}$$

$$H_1^{(4)} = H_D + h_4 - \text{из 4-го хода.}$$

При разной длине ходов l_i ошибки превышений по ходам также различны, следовательно, отметки H_i будут получены с разными весами, и для вычисления средней отметки репера 1 нужно применить формулу весового среднего

$$H_1^{(cp)} = \frac{\sum (p_i \cdot h_i)}{\sum p_i}, \quad (2.35)$$

где p_i – вес i -го хода:

$$p_i = \frac{C}{l_i}$$

C – любое число, но постоянное для данной сети.

После вычисления H_i сеть разделяется на четыре изолированных одиночных хода, каждый из которых обрабатывается по известной методике.

2.6. Обработка нивелирной сети по способу эквивалентной замены

Два нивелирных хода, сходящихся в одной точке, можно заменить одним эквивалентным ходом, вес которого равен сумме весов составляющих его двух ходов, и превышение по которому равно средневесовому из превышений двух ходов.

Рассмотрим нивелирную сеть, изображенную на рис. 29.

$$p_{z_{12}} = p_1 + p_2 = \frac{C}{l_1} + \frac{C}{l_2}. \quad (2.36)$$

Сначала заменим ходы 1 и 2 одним эквивалентным ходом z_{12} , вес которого равен (2.36).

Длину хода z_{12} выразим через длины ходов 1 и 2

$$l_{z_{12}} = \frac{l_1 \cdot l_2}{l_1 + l_2}. \quad (2.37)$$

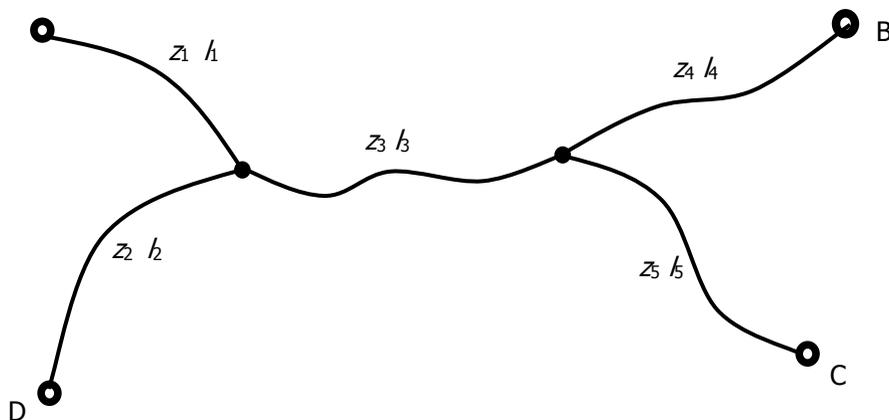


Рис. 29. Схема нивелирной сети с двумя узловыми точками

Отметка репера 1, вычисленная по превышениям ходов 1 и 2 или из эквивалентного хода z_{12} , будет равна

$$H_1^{(z_{12})} = \frac{(H_A + h_1) \cdot p_1 + (H_B + h_2) \cdot p_2}{p_1 + p_2}. \quad (2.38)$$

После первой замены вид сети изменится (рис. 30). Следующим шагом будет "сложение" хода z_{12} с ходом 3. Эквивалентный им ход обозначим z_{123} , его длина будет

$$l_{z_{123}} = l_{z_{12}} + l_3.$$

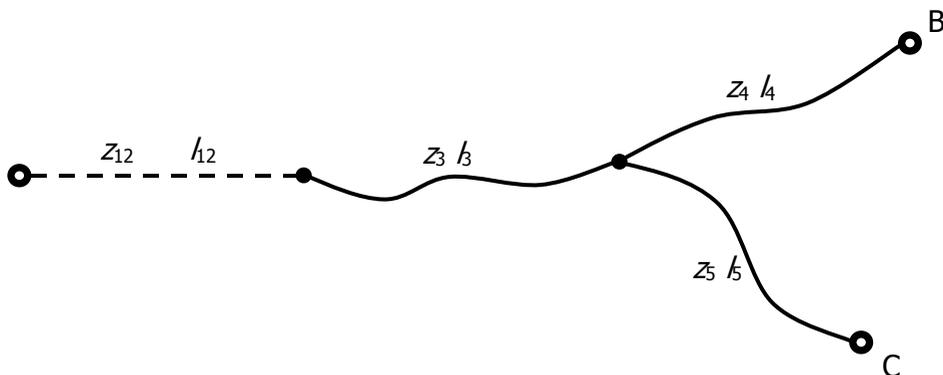


Рис. 30. Схема нивелирной сети после первой замены

Отметка репера 2, полученная из ходов 1, 2, 3 или из эквивалентного хода z_{123} , будет равна

В узловой точке, репере 2, сходятся три хода, и дальнейшая обработка сети выполняется по методике обработки нивелирной сети с одной узловой точкой, описанной выше, т. е.

$$p_4 = \frac{C}{l_4}, p_5 = \frac{C}{l_5};$$

$$H_2^{(4)} = H_C + h_4; \quad V_{z_{123}} = H_2^{(cp)} - H_2^{(z_{123})};$$

$$V_{z_{12}} = V_{z_{123}} \cdot \frac{l_{z_{12}}}{l_{z_{123}}}; \quad V_3 = V_{z_{123}} \cdot \frac{l_3}{l_{z_{123}}}; \quad V_2 = V_{z_{12}} \cdot \frac{l_2}{l_{z_{12}}};$$

$$V_1 = V_{z_{12}} \cdot \frac{l_1}{l_{z_{12}}}.$$

Оценка точности уравненной нивелирной сети заключается в вычислении средней квадратической ошибки единицы веса μ , средней квадратической ошибки превышения на один километр хода $m_{ПКМ}$ и ошибок отметок реперов M_H

$$\mu^2 = \frac{[p_i \cdot V_i^2]}{n - k}; \quad m_{\text{к.м}}^2 = \frac{\mu^2}{C}; \quad M_{H_2} = \mu \cdot \sqrt{\frac{1}{P_{H_2}}}. \quad (2.39)$$

В этих формулах:

p_i – вес i – го хода;

v_i – поправка из уравнивания в превышение по i – му ходу;

n – количество ходов в сети (количество измеренных превышений);

k – количество определяемых реперов в сети;

C – константа при вычислении весов;

l_i – длина i – го хода;

P_{H_2} – вес репера 2.

Чтобы получить вес репера 1, нужно уравнивать сеть заново, заменяя ходы 4 и 5 эквивалентным ходом и затем “складывая” ход 3 и полученный эквивалентный ход. В результате таких замен узловым репером, в котором будут сходиться три хода, должен стать репер 1.

2.7. Обработка нивелирной сети по способу узлов

Рассмотрим ту же ниверную сеть (рис. 28), в которой исходными данными являются отметки H_A, H_B, H_C, H_D реперов A, B, C, D , и измерены пять превышений h_1, h_2, h_3, h_4 и h_5 по пяти ходам 1, 2, 3, 4 и 5; определяемыми данными являются отметки H_1 и H_2 реперов 1 и 2.

Идея способа заключается в вычислении отметок H_1 и H_2 по измеренным превышениям, сходящимся в реперах 1 и 2 соответственно

$$H_1 = \frac{(H_A + h_1) \cdot p_1 + (H_B + h_2) \cdot p_2 + (H_2 - h_3) \cdot p_3}{p_1 + p_2 + p_3}; \quad (2.40)$$

$$H_2 = \frac{(H_C + h_4) \cdot p_4 + (H_D + h_5) \cdot p_5 + (H_1 + h_3) \cdot p_3}{p_3 + p_4 + p_5}. \quad (2.41)$$

Вес каждого хода подсчитывается по известной формуле

$$p_i = \frac{C}{l_i},$$

где l_i – длина хода в километрах;

C – средняя длина хода в сети (тоже в километрах).

При уравнивании сети по способу узлов удобнее пользоваться приведенными весами

$$p'_i = \frac{p_i}{\sum p_i}. \quad (2.42)$$

Сумма приведённых весов на определяемом репере должна быть равна 1,000. Поскольку отметки H_1 и H_2 неизвестны, то в первом приближении отметка H_1 вычисляется по неполной формуле – без третьего слагаемого в числителе и знаменателе.

При вычислении отметки во втором приближении отметка берётся из первого приближения.

При дальнейших приближениях каждый раз берётся последнее вычисленное значение той и другой отметок. Приближения заканчиваются, когда различие обеих отметок H_1 и H_2 в последнем и предпоследнем приближениях не превышает 1 мм.

Поправки в первое измеренное превышение вычисляется по формуле

$$V_1 = H_{1(yp)} - H_A,$$

во второе – по формуле

$$V_2 = H_{2(yp)} - H_B$$

и так далее. Затем вычисляется ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pV^2]}{n - k}}.$$

В первом приближении вес отметки репера равен сумме весов нивелирных ходов, сходящихся в данном репере минус несколько поправочных членов. Количество таких членов равно количеству нивелирных линий, сходящихся в репере, а каждый член равен дроби, в числителе которой стоит квадрат веса нивелирной линии, а в знаменателе – сумма весов нивелирных линий, сходящихся в репере на конце данной линии. Если на конце линии находится исходный репер, то данный член равен нулю.

$$P_{H_1}' = p_1 + p_2 + p_3 - \frac{p_3^2}{p_3 + p_4 + p_5}; \quad (2.43)$$

$$P_{H_2}' = p_3 + p_4 + p_5 - \frac{p_3^2}{p_1 + p_2 + p_3}. \quad (2.44)$$

Во втором приближении в знаменателе каждого члена вместо суммы весов нивелирных линий нужно поставить вес отметки репера в конце линии, полученный из первого приближения.

$$P_{H_1}'' = p_1 + p_2 + p_3 - \frac{p_3^2}{P_{H_2}'}; \quad (2.45)$$

$$P_{H_2}'' = p_3 + p_4 + p_5 - \frac{p_3^2}{P_{H_1}'}. \quad (2.46)$$

2.8. Обработка нивелирной сети по способу полигонов

В способе полигонов, называемом также способом красных чисел, выполняется последовательное распределение невязок каждого полигона пропорционально весам нивелирных ходов, входящих в полигон.

Сначала намечают замкнутые полигоны, количество которых должно быть равно количеству избыточных измерений в сети. При необходимости в полигон включают ход между исходными реперами, превышение по которому считается истинным и не получает поправку при уравнивании.

Затем для каждого полигона, вычисляют высотные невязки $f_h = \sum h_i$, где h_i – измеренные превышения по ходам полигона.

Для всех ходов полигона подсчитываются красные числа по формуле

$$x_i = \frac{l_i}{[l]}, \quad (2.47)$$

где l_i – длина хода;
 $[l]$ – периметр полигона.

Красные числа вычисляются до 0,001. Их сумма в полигоне должна быть равна 1,000.

В каждом полигоне строят колонки: одну – для записи первичной невязки и приведённых невязок; и несколько колонок по числу ходов полигона – для записи поправок; эти колонки располагают за пределами полигона около каждой его стороны (рис. 31).

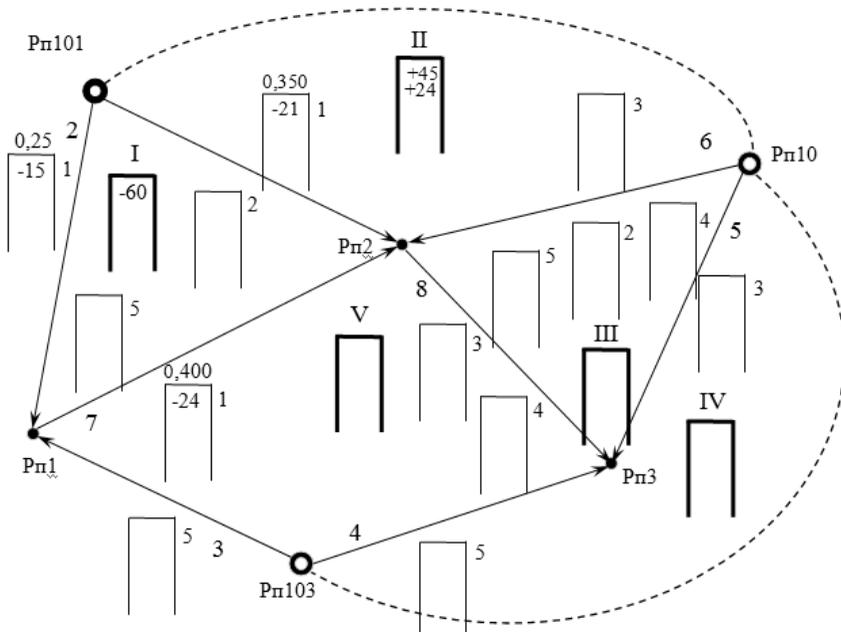


Рис. 31. Схема уравнивания нивелирной сети по способу полигонов

На этом рисунке сеть состоит из трёх исходных реперов, восьми нивелирных ходов и трёх определяемых реперов. Количество полигонов равно $r = 8 - 3 = 5$. В первом полигоне колонка невязок обозначена римской цифрой I. Для трёх ходов полигона за его пределами построены три колонки поправок, которые обозначены арабской цифрой 1. Аналогичные построения выполнены и для остальных четырёх полигонов.

Обход полигонов начинают с полигона, невязка в котором имеет наибольшее значение, например, с полигона I. Невязка этого полигона (-60 мм) распределяется пропорционально красным числам трёх его ходов (0,250; 0,350; 0,400) и записывается в миллиметрах в колонки с обозначением 1.

Затем переходят ко второму полигону: подсчитывается его приведённая невязка, равная первичной невязке и поправки, поступившей в полигон от невязки первого полигона (+45мм - 21мм = +24мм). Эта приведённая невязка (+24мм) распределяется в два хода и записывается в колонки поправок с обозначением 2. Дальнейшие действия выполняют по той же методике.

Выполнив первый обход, приступают ко второму обходу, в котором приведённые невязки подсчитываются как суммы поправок, поступивших в полигон при последнем распределении невязок. Как только приведённые невязки во всех полигонах станут равными нулю, процесс обхода заканчивается.

Поправка в измеренное превышение по ходу, входящему только в один полигон, равна сумме поправок в колонке данного хода; знак поправки зависит от направления хода и направления при вычислении невязок: при совпадении направлений знак поправки одинаков со знаком суммы, при противоположных направлениях знак поправки обратен знаку суммы.

Поправка в измеренное превышение по смежному ходу (входящему в два полигона) равна разности сумм поправок в двух колонках; знак поправки определяется по тому же правилу направлений.

После вычисления поправок в измеренные превышения заполняют таблицу вычисления отметок реперов, вычисляют среднюю квадратическую ошибку единицы веса, веса уравненных отметок реперов и их средние квадратические ошибки.

$$\begin{aligned}
 F_1(T_1, T_2, \dots, T_k) - x_1 &= v_1; \\
 F_2(T_1, T_2, \dots, T_k) - x_2 &= v_2; \\
 &\dots\dots\dots \\
 F_n(T_1, T_2, \dots, T_k) - x_n &= v_n.
 \end{aligned}
 \tag{2.51}$$

Полученные равенства называются уравнениями поправок в общем виде.

В системе (2.51) число неизвестных будет $n + k > n$, т.е. превысит число уравнений в системе, что приводит к неопределенности решения. Для нахождения неизвестных воспользуемся принципом наименьших квадратов. Определим значения T_1, T_2, \dots, T_k при условии

$$[pvv] = \min .$$

Сделаем замену неизвестных через приближенные значения t_j и поправки к ним δt_j

$$T_j = t_j + \delta t_j . \tag{2.52}$$

Полученные значения неизвестных из (2.52) подставляем в уравнения системы (2.51). В результате чего получим

$$\begin{aligned}
 F_1(t_1 + \delta t_1, t_2 + \delta t_2, \dots, t_k + \delta t_k) - x_1 &= v_1; \\
 F_2(t_1 + \delta t_1, t_2 + \delta t_2, \dots, t_k + \delta t_k) - x_2 &= v_2; \\
 &\dots\dots\dots \\
 F_n(t_1 + \delta t_1, t_2 + \delta t_2, \dots, t_k + \delta t_k) - x_n &= v_n.
 \end{aligned}
 \tag{2.53}$$

Приведем уравнения системы (2.15) к линейному виду, разложив в ряд Тейлора, при этом ограничиваясь только первыми степенями разложения

$$\begin{aligned}
 F_1(t_1, t_2, \dots, t_k) + \frac{\partial F_1}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial F_1}{\partial t_2} \delta t_2 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial t_k} \delta t_k - x_1 &= v_1; \\
 F_2(t_1, t_2, \dots, t_k) + \frac{\partial F_2}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial F_2}{\partial t_2} \delta t_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial t_k} \delta t_k - x_2 &= v_2; \\
 \dots & \\
 F_n(t_1, t_2, \dots, t_k) + \frac{\partial F_n}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial F_n}{\partial t_2} \delta t_2 + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial t_k} \delta t_k - x_n &= v_n.
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Введем следующие обозначения

$$\frac{\partial F_i}{\partial t_1} = a_i; \quad \frac{\partial F_i}{\partial t_2} = b_i; \quad \dots; \quad \frac{\partial F_i}{\partial t_k} = g_i; \quad F_i(t_1, t_2, \dots, t_k) - x_i = l_i$$

Подставив введенные обозначения в уравнения (2.16), получим уравнения поправок в линейном виде

$$\begin{aligned}
 a_1 \delta t_1 + b_1 \delta t_2 + \dots + g_1 \delta t_k + l_1 &= v_1; \\
 a_2 \delta t_1 + b_2 \delta t_2 + \dots + g_2 \delta t_k + l_2 &= v_2; \\
 \dots & \\
 a_n \delta t_1 + b_n \delta t_2 + \dots + g_n \delta t_k + l_n &= v_n.
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Следовательно, коэффициенты a_i, b_i, \dots, g_i являются частными производными от соответствующих функций по приближенным значениям искомым аргументов, а свободный член l_i – разность между приближенными и измеренными значениями функций.

Для решения и нахождения поправок δt_j согласно принципу наименьших квадратов составим функцию

$$\begin{aligned}
 \Phi = [pvv] &= p_1(a_1 \delta t_1 + b_1 \delta t_2 + \dots + g_1 \delta t_k + l_1)^2 + \\
 &+ p_2(a_2 \delta t_1 + b_2 \delta t_2 + \dots + g_2 \delta t_k + l_2)^2 + \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Приближённые значения неизвестных можно либо вычислить, либо принять произвольными, но так, чтобы отличие приближённых и уравненных значений неизвестных различались на малые величины. Значения неизвестных представляют в виде суммы и раскладывают функции f в ряд Тейлора относительно поправок δx .

Полученные таким образом уравнения называются параметрическим уравнениями поправок

$$a_i \cdot \delta X_1 + b_i \cdot \delta X_2 + \dots + t_i \cdot \delta X \cdot t + l_i = V_i. \quad (2.61)$$

В этой формуле буквами a_i, b_i, \dots, t_i обозначены частные производные функции f_i по определяемым неизвестным. Свободный член l_i получается по формуле

$$l_i = f_i(X_1^0, X_2^0, \dots, X_t^0) - L_i. \quad (2.62)$$

Функция $F = [pvv] = \min$ представляется в виде

$$F = p_1 \cdot V_1^2 + p_2 \cdot V_2^2 + \dots + p_n \cdot V_n^2 \quad (2.63)$$

и для выполнения условия минимума функции приравняют нулю t её частных производных по v_i .

Затем составляют t нормальных уравнений с t параметрами – поправками к приближённым значениям неизвестных. Из решения системы нормальных уравнений находят поправки δX к приближённым значениям неизвестных. Далее вычисляют уравненные значения неизвестных.

В матричной записи параметрический способ уравнивания имеет вид:

- параметрические уравнения поправок

$$A_{nt} \cdot \Delta X_{t1} + L_{n1} = V_{n1}; \quad (2.64)$$

- нормальные уравнения параметров-поправок

$$N_{tt} \cdot \Delta X_{t1} + B_{t1} = 0_{t1}; \quad (2.65)$$

- матрица коэффициентов нормальных уравнений

$$N_{tt} = A_{nt}^T \cdot P_{nn} \cdot A_{nt}; \quad (2.66)$$

- вектор свободных членов нормальных уравнений

$$B_{t1} = A_{nt} \cdot P_{nn} \cdot L_{n1}; \quad (2.67)$$

- вектор поправок к приближённым значениям неизвестных

$$\Delta X_{t1} = -N_{tt}^{-1} \cdot B_{t1}. \quad (2.68)$$

В этих формулах:

L_{n1} – вектор свободных членов уравнений поправок

$$l_i = f_i(X_1, X_2, \dots, X_t) - L_i; \quad (2.69)$$

P_{nn} – диагональная матрица весов измерений;

A_{nt} – матрица коэффициентов уравнений поправок размером n строк и t столбцов;

V_{n1} – вектор поправок в результаты измерений.

2.11. Проектирование нивелирования III класса

Проект составляется в соответствии с требованиями Инструкции по нивелированию и, если нивелирование III класса проектируется для обеспечения топографических съёмок масштаба 1:5000 и крупнее, то нужно учитывать ещё и требования Инструкции по топографическим съёмкам.

Проектирование выполняют на топографических картах масштаба 1:100 000 – 1:200 000.

Проектирование нивелирования III класса производится в пределах полигонов нивелирования II класса.

Начало и конец проектируемой линии должны быть просто и надёжно связаны с существующими линиями более высокого или того же класса.

Связь проектируемых линий III и IV классов с существующими линиями I, II, III, IV классов осуществляется путём включения в ход одного репера существующей линии.

Нивелирование через водные препятствия шириной до 200 м выполняют по обычной методике двумя приёмами с соблюдением равенства расстояний до задней и передней реек. Между приёмами изменяют высоту нивелира на (3 – 5) см. Расхождение превышений между приёмами допускается 4 мм для III класса и 7 мм для IV класса.

Передачу высоты выполняют две бригады с двух берегов по двум створам с использованием двух нивелиров и двух комплектов инварных реек. При этих измерениях должен присутствовать начальник партии и главный инженер или начальник экспедиции. Расхождение между превышениями, измеренными разными наблюдателями по разным створам, не должно превышать 5 мм для III класса нивелирования.

Измерение превышений через препятствие шириной более 400 м выполняют способом подвижной марки, однако, лучше всего делать такую передачу высоты приборами и по методике II класса нивелирования.

2.12. Поиск грубых ошибок измерений в нивелирных сетях

Под грубой ошибкой понимают случайную ошибку измерения, которая по своему абсолютному значению превышает установленный для случайных ошибок допуск $t \cdot m$, где m – средняя квадратическая ошибка одного измерения, t – коэффициент доверительной вероятности, принимаемый равным либо $t = 3,0$ (с вероятностью 99,7%), либо $t = 2,5$ (с вероятностью 98,8%), либо $t = 2,0$ (с вероятностью 95,4%). Процент вероятности означает, что именно с такой вероятностью измеренное или вычисленное значение X какой-либо величины находится в интервале от

$$(X - t \cdot m) \text{ до } (X + t \cdot m).$$

О наличии грубых ошибок можно судить по следующим признакам:

- недопустимо большое значение одной или более невязок условных уравнений связи при коррелятном способе уравнивания;
- недопустимо большое значение свободных членов при рекуррентном способе уравнивания;

– несоизмеримо большие по сравнению с точностью измерений поправки, полученные при уравнивании геодезического построения;

– увеличение средней квадратической ошибки единицы после уравнивания по сравнению с её проектным значением.

В широком смысле проблема борьбы с грубыми ошибками распадается на несколько отдельных задач:

– установить, есть ли в данном геодезическом построении грубые ошибки вообще (одна или более), или их нет. Если грубые ошибки есть, то следует решать следующие задачи;

– определить конкретные измерения, в которых имеются грубые ошибки – т.е., локализовать положение грубых ошибок с точностью до одного измерения; если это невозможно, то следует попытаться локализовать положение грубых ошибок с точностью до небольшой группы измерений;

– оценить значения грубых ошибок измерений;

– принять меры к ослаблению или полному устранению влияния грубых ошибок измерений на результаты уравнивания данного геодезического построения.

Для поиска грубых ошибок в нивелирных сетях наиболее просто и доступно вычислить высотные невязки всех полигонов, выписать их на схему сети и выполнить визуальный анализ невязок. Наличие в двух соседних полигонах больших невязок с противоположными знаками свидетельствует о грубой ошибке измеренного превышения по линии, являющейся общей для обоих полигонов. В отдельных случаях можно обнаружить грубые ошибки в двух превышениях одного полигона, но сложные комбинации грубых ошибок визуально локализовать практически невозможно.

Наиболее действенным контролем грубых ошибок измерений в любом геодезическом построении, в том числе и в нивелирной сети, является тестирование сети по методу наложения графиков поправок

В параметрическом уравнивании по СНК матрица обратных весов поправок выражается формулами

$$QV = P^{-1} \cdot A \cdot R^{-1} \cdot A^T \quad \text{или} \quad QV = G \cdot P^{-1}, \quad (2.70)$$

где P^{-1} – матрица обратных весов измерений размером $n \times n$ (n – количество измерений);

A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок размером $n \times k$ (k – количество неизвестных);

R^{-1} – матрица, обратная матрице коэффициентов нормальных уравнений, размером $k \times k$;

G – матрица выполняет роль матрицы-преобразователя вектора P^{-1} в матрицу QV .

После умножения выражения (2.43) слева на матрицу P получим

$$G = QV \cdot P$$

или

$$G = E - A \cdot R^{-1} \cdot A^T \cdot P, \quad (2.71)$$

где E – единичная матрица размером $n \times n$ (n – количество измерений);

P – диагональная матрица весов измерений размером $n \times n$.

Матрица G – квадратная, размером $n \times n$, вырожденная; в теории параметрического уравнивания она применяется в нескольких матричных уравнениях. Для наших исследований мы использовали уравнение

$$V = -G \cdot \Delta, \quad (2.72)$$

в котором:

V – вектор поправок в измерения, получаемый из уравнивания;

Δ – вектор истинных ошибок измерения;

G – матрица выполняет роль матрицы-преобразователя вектора Δ в вектор V .

Уравнение (2.44) означает, что поправку V_i каждого измерения можно представить в виде линейной комбинации истинных ошибок измерений

$$V_i = - \sum_{j=1}^n g_{i,j} \cdot \Delta_j, \quad (2.73)$$

где $g_{i,j}$ – элементы i – ой строки G матрицы

При отсутствии в геодезической сети грубых ошибок измерений истинные ошибки Δ_j , произведения $g_{ij} \Delta_j$ и поправки V_i являются случайными величинами, и их математические ожидания равны нулю.

Если среди измерений есть хотя бы одно грубое с истинной ошибкой Δ_j , то одно слагаемое в формуле (2.73) будет иметь ненулевое математическое ожидание, так как $M(\Delta_j)$ и

$$M(g_{i,j} \cdot \Delta_j) = g_{i,j} \cdot \Delta_j,$$

а формулу (2.45) можно переписать в виде

$$V_i = -g_{i,j} \cdot \Delta_j + \varepsilon_i, \quad (2.74)$$

где ε_i – суммарное влияние случайных ошибок остальных измерений; понятно, что

$$\varepsilon_i = V_i + g_{i,j} \cdot \Delta_j. \quad (2.75)$$

Построим график поправок V_i (по горизонтальной оси откладываются номера измерений i) и график величин $(-g_{ij} \Delta_j)$ и наложим второй график на первый. Их несовпадение в каждой точке графика равно величине ε_i , следовательно, можно вычислить среднее квадратическое отклонение несовпадения этих графиков

$$\delta_j = \sqrt{\frac{\sum p_i \cdot \varepsilon_i^2}{n}}. \quad (2.76)$$

Истинная ошибка Δ_j вычисляется с некоторой ошибкой из формулы (2.75) при $i = j$ и $M(\varepsilon_j) = 0$

$$\Delta_j = -\frac{V_j}{g_{j,j}}. \quad (2.77)$$

Ввиду того, что величина ε_i является случайной составляющей поправок V_i , для δ_j существует предел δ_0 , вычисляемый по формуле

$$\delta_0 = \mu_0 \cdot \sqrt{\frac{r}{n}}, \quad (2.78)$$

где μ_0 – проектное значение ошибки единицы веса;
 r – количество избыточных измерений ($r = n - k$).

Вычисление Δ и δ по формулам (2.47) и (2.48) можно выполнить для любого другого i -го измерения. Но поскольку грубая ошибка Δ_j содержится только в одном j -ом измерении, то величина ε_i любого другого измерения будет включать влияние грубой ошибки Δ_j , и величина δ_j будет превышать предел δ_0 .

Практически это означает, что, если вычислить Δ_i и δ_i для всех n измерений, то для j -го измерения, содержащего грубую ошибку Δ_j , значение δ_j будет минимальным.

Если среди n измерений имеется два грубых измерения с истинными ошибками Δ_j и Δ_l , то формула (2.75) запишется в виде

$$V_i = -g_{i,j} \cdot \Delta_j - g_{i,l} \cdot \Delta_l + \varepsilon_i,$$

где ε_i – по-прежнему является случайной составляющей поправок V_i

$$\varepsilon_i = V_i + g_{i,j} \cdot \Delta_j + g_{i,l} \cdot \Delta_l.$$

В этом случае на базовый график поправок V_i нужно наложить график величины $(-g_{i,j} \cdot \Delta_j - g_{i,l} \cdot \Delta_l)$ и подсчитать СКО уклонения графиков. Значения истинных ошибок Δ_j и Δ_l следует получить из решения системы двух уравнений

$$g_{j,j} \cdot \Delta_j + g_{j,l} \cdot \Delta_l = -V_j; \quad (2.79)$$

$$g_{l,j} \cdot \Delta_j + g_{l,l} \cdot \Delta_l = -V_l. \quad (2.80)$$

Если вычислить истинные ошибки и величину δ для всех комбинаций измерений по два, то минимальное значение δ будет иметь комбинация j -го и i -го измерений, содержащих грубые ошибки. Понятно, что значение $\delta_{j,i}$ будет меньше предела δ_0 , а для всех остальных пар измерений значение δ будет больше предела δ_0 .

Тест на грубые ошибки измерений можно продолжать для комбинаций из трёх, четырёх и так далее измерений, пока не будет найдена искомая комбинация, содержащая грубые ошибки. Теоретически наибольшее количество грубых ошибок в геодезической сети не должно превышать $(r - 1)$, однако, практически оно не должно быть больше одной трети от r .

Может случиться, что по условию $\delta < \delta_0$ в разряд грубых попадёт больше одной комбинаций измерений. Значит, вследствие геометрических параметров конкретной сети вектору поправок V соответствует несколько альтернативных комбинаций грубых ошибок измерений, и для выделения верного решения необходимо привлекать дополнительную информацию (например, о невязках условных уравнений и т.п.).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Селиханович В.Г. Геодезия: учебник для вузов. – М.: Недра, 2000. – 544с.
2. Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов. Федеральная служба геодезии и картографии России. – М.: Картгеоцентр-Геодезиздат, 2004. – 244 с.
3. Геодезические приборы. Теодолиты. Нивелиры: учеб. пособие / Г.А. Уставич, А.М. Олейник, А.М. Попов, Я.Г. Пошивайло. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2005. – 130 с.