ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Высшая геодезия и фотограмметрия»

Практикум

к выполнению лабораторных работ
на тему: «Теория погрешностей»
по дисциплине

«Геодезия»

для обучающихся по направлению подготовки 21.03.02 «Землеустройство и кадастры»

Автор
Гермак О.В.

Ростов-на-Дону, 2017

Аннотация

Методические указания предназначены для обучающихся по направлению подготовки 21.03.02 «Землеустройство и кадастры».

Даны задания к лабораторным работам, разработаны варианты и подробно пояснено выполнение всех этапов работ, приведены примеры.

Авторы

ассистент кафедры «ВГиФ» Гермак О.В.

Оглавление

1. ТЕОРИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ. ВИДЫ ОШИБОК

Все используемые в геодезии величины получают из измерений или из вычислений функций измеренных величин. Сравнение какой-либо величины с принятой единицей называют *измерением*, а полученное при этом численное значение — *результатом измерения.* В процессе измерения участвуют объект измерения, измерительный прибор, оператор (наблюдатель) и среда, в которой выполняют измерения.

Измерения бывают различного вида:

– непосредственные (прямые) измерения - когда мерный прибор, отображающий единицу измерения, непосредственно сравнивается с объектом измерения;

– посредственные (косвенные) измерения – когда искомая величина не измеряется, а получается вычислением по результатам измерений других величин.

Из-за несовершенства измерительных приборов, оператора, изменения среды и измеряемого объекта во времени результаты измерений содержат ошибки. Ошибки подразделяют на грубые, систематические и случайные.

Грубые ошибки возникают вследствие неисправности прибора, небрежности наблюдателя или аномального влияния внешней среды. Контроль работ позволяет выявить и устранить грубые ошибки из результатов измерений.

Систематические ошибки являются результатом действия одного или группы факторов и могут быть выражены функциональной зависимостью между факторами и результатом измерения. Необходимо найти эту функциональную зависимость и с ее помощью определить и исключить основную часть систематической ошибки из результата измерения, чтобы остаточная ошибка была пренебрегаемо малой.

Случайные ошибки неизвестны для конкретного результата измерения, зависят от точности прибора, квалификации оператора, неучтенного влияния внешней среды; их закономерность проявляется в массе. Случайные ошибки не могут быть устранены из результата конкретного измерения, их влияние можно только ослабить путем повышения количества и качества измерений и соответствующей математической обработкой результатов измерений.

2. СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Случайная **истинная ошибка** измерения Δ – это разность между измеренным значением величины x_i и ее истинным значением X, т.е.:

$$\Delta = x_i - X. \tag{1}$$

Случайные ошибки имеют следующие свойства:

1) ***Ограниченность:*** по абсолютной величине они не превосходят определенного предела:

$$|\Delta_i| \leq \Delta_{ПРЕД.}, \tag{2}$$

где $\Delta_i = x_i - X$ – абсолютное значение случайной ошибки;
x_i – результат измерений;
X – истинное значение измеряемой величины;
$\Delta_{ПРЕД.}$ – предел (допуск).

2) ***Симметричность:*** положительные и отрицательные их значения равновозможны;

3) ***Плотность:*** малые по абсолютной величине случайные ошибки встречаются чаще, чем большие;

4) ***Компенсированность:*** среднее арифметическое значение случайных ошибок при неограниченном увеличении числа измерений стремится к нулю (свойство компенсации случайных ошибок), т. е.:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n} = 0, \tag{3}$$

где [ ] – знак Гауссовой суммы;
n – число измерений.

5) ***Рассеивание:*** предел отношения среднего арифметического из квадратов случайных ошибок не равен нулю, т.е.:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta^2]}{n} = \sigma^2, \tag{4}$$

где σ – стандарт

6) ***Пропорциональность:*** допуск пропорционален стандарту, т.е.:

$$\frac{\Delta_{ПРЕД.}}{\sigma} = const. \tag{5}$$

Вывод: Если ошибки ряда измерений обладают свойствами с 1 по 6, то их считают случай- ными.

3. ПОНЯТИЕ О КРИТЕРИЯХ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Точность измерений **–** их качество, определяющее близость результатов измерений к точному значению измеряемой величины.

Точное значение измеряемой физической величины, если оно не определяется теоретически, неизвестно. В отдельных случаях за точное значение величины может быть принято ее измеренное значение, максимально близкое к истинному значению. В геодезии такие величины называют действительными или исходными.

Имея значения Δ_i истинных или случайных ошибок результатов измерений одной и той же величины, можно получить следующие ***количественные характеристики*** точности измерений:

- **средняя квадратическая ошибка** m – величина, определяемая по формуле Гаусса:

$$m = \sqrt{\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n}{n}} = \sqrt{\frac{[\Delta]}{n}}, \tag{6}$$

где истинные ошибки $\Delta_i = x_i - X (i=1, 2, 3, \ldots, n)$; x_i - результат измерения величины, истинное значение которой равно X.

- **средняя ошибка** υ – среднее арифметическое из абсолютных значений случайных ошибок, т.е.:

$$\upsilon = \frac{|\Delta_1| + |\Delta_2| + \cdots |\Delta_n|}{n} = \frac{[|\Delta|]}{n}; \tag{7}$$

- **вероятная или срединная ошибка** r находится в середине ряда, в котором все ошибки располагают по убыванию или возрастанию их абсолютных значений.

Кроме того, к критериям точности измерений относятся:

- σ **– стандарт** (основная мера точности результатов геодезических измерений):

а) σ определяет величину рассеивания (разброса) отдельных случайных ошибок Δ относительно их среднего арифметического;

б) предельное значение случайной ошибки $\Delta_{\text{ПРЕД.}}$ пропорционально стандарту σ.

Средняя квадратическая ошибка более предпочтительна, чем средняя и вероятная, так как на ее величину большее влияние оказывают большие по абсолютной величине ошибки и она более устойчива, т.е. довольно надежно определяется при небольшом n числе ошибок. Среднюю квадратическую ошибку самой средней квадратической ошибки определяют по формуле:

$$m_m = m/\sqrt{2n}. \tag{8}$$

Фактически величина m_m позволяет количественно оценить точность замены стандарта σ на СКО m.

Примеры: $n = 1 \rightarrow m_m = 0{,}7m$; $n = 2 \rightarrow m_m = 0{,}5m$;
$n = 8 \rightarrow m_m = 0{,}25m$; $n = 50 \rightarrow m_m = 0{,}1m$.

Вывод: Оценка точности по ограниченному числу измерений считается надежной, если $m_m \leq 0{,}25m$. Это условие выполнимо при $n \geq 8$. Минимальное число наблюдений для надежной оценки точности $n = 8$.

Предельное значение ошибки служит для отбраковки грубых ошибок и является допуском для величин Δ_i:

$$\Delta_{пред} \leq 3m. \tag{9}$$

Величина предельной ошибки зависит от степени ответственности измерений. В качестве служебного допуска принимают $\Delta_{ПРЕД.} \leq 2m$, для теоретических расчетов $\Delta_{ПРЕД} \leq 3m$.

Средняя квадратическая ошибка m связана со средней ошибкой υ и вероятной ошибкой r приближенными формулами:

$$\begin{gathered} m \approx 1.253\upsilon;\ m \approx 1.48r, \\ r \approx 0.789m;\ \upsilon \approx 0.674m. \end{gathered} \tag{10}$$

Все приведенные выше ошибки называют абсолютными. Кроме абсолютных имеются *относительные ошибки* $f_{отн.}$, которыми называют отношение абсолютной ошибки m к среднему значению измеряемой величины l. Относительную погрешность принято выражать в виде простой дроби с единицей в числителе, например:

$$f_{отн} = \frac{m}{l} = \frac{1}{N}, \tag{11}$$

где l – значение измеряемой величины, а N – знаменатель дроби.

В зависимости от используемой абсолютной ошибки относительные ошибки называют: средней квадратической относительной, средней относительной, вероятной относительной, предельной относительной.

В геодезии относительной ошибкой характеризуют точность линейных измерений и точность определения площадей и объемов фигур.

ЗАДАНИЕ 1

3.1 В табл. 1 приведены значения истинных ошибок результатов измерения угла. Найти среднюю, среднюю квадратическую, вероятную и предельную ошибки измерения угла. Проанализировать свойства случайных ошибок на данном примере.

Таблица 1

№ п/п	Ошибки Δ, с	№ п/п	Ошибки Δ, с	№ п/п	Ошибки Δ, с	№ п/п	Ошибки Δ, с
1	-2,42	12	-0,12	23	0,64	34	0,95
2	0,82	13	-1,45	24	0,17	35	0,15
3	-0,3	14	0,66	25	0,1	36	-0,02
4	0,13	15	0,24	26	1,27	37	-0,88
5	1,65	16	-0,11	27	-0,58	38	-0,5
6	0,71	17	1,29	28	-0,17	39	-0,14
7	0,28	18	-0,65	29	0,08	40	0,02
8	0,12	19	-0,22	30	1,12	41	2,31
9	-1,55	20	-0,1	31	0,16	42	-0,31
10	-0,67	21	0,18	32	-0,05	43	0,06
11	-0,25	22	-1,28	33	-0,56	44	-0,07

Указание: каждому студенту от исходных данных отнять №варианта/100 (например: -2,42-(1/100) = -2,43, где 1 – № варианта студента).

Решение:

1. Вычисляем среднюю ошибку υ=0,71с (формула 7).
2. Вычисляем среднюю квадратическую ошибку m=0,96 с (формула 6).
3. Распределив все ошибки по убыванию или возрастанию их абсолютных значений, определим середину данного ряда, которая и будет являться вероятной ошибкой r=0,51с.
4. $\Delta_{ПРЕД}$=2,89с (формула 9).

Проанализируем свойства случайных ошибок:

1. ***Ограниченность:*** по абсолютной величине угловые ошибки Δ не превосходят предела $\Delta_{ПРЕД}$=2,89с;
2. ***Симметричность:*** положительные и отрицательные ошибки Δ равновозможны: (–Δ)=22шт, (+Δ)=22шт;
3. ***Плотность:*** малые по абсолютной величине случайные ошибки встречаются чаще, чем большие:

от 0 до m	от 0 до 0,96	38
от m до 2m	от 0,96 до 1,93	4
от 2m до 3m	от 1,93 до 2,89	2
		44

4. ***Компенсированность:*** среднее арифметическое значение случайных ошибок при неограниченном увеличении числа измерений стремится к нулю (свойство компенсации случайных ошибок), т. е.:

$$\frac{[\Delta]}{n} = -0{,}02c \approx 0.$$

5. ***Рассеивание:*** предел отношения среднего арифметического из квадратов случайных ошибок не равен нулю, т.е.:

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \sigma^2 = 0{,}93c \neq 0.$$

6. ***Пропорциональность:*** допуск пропорционален стандарту, т.е.:

$$\frac{\Delta_{ПРЕД.}}{\sigma} = \frac{2{,}89}{0{,}96} = 3 = const.$$

Вывод: Все ошибки ряда измерений обладают свойствами с 1 по 6, следовательно, являются *случайными.*

4. ИССЛЕДОВАНИЕ РЯДОВ ОШИБОК НА НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Опыт показывает, что случайные составляющие истинной ошибки измерений, хотя это и случайные величины, в массе подчиняются определенным закономерностям (см. раздел 3).

Зная закон распределения случайной величины *x*, можно найти ее количественные характеристики, важнейшими из которых являются математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание – одна из количественных характеристик положения, по определению математическое ожидание непрерывной случайной величины равно:

$$M(x) = a_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx. \tag{12}$$

Дисперсия – одна из количественных характеристик рассеивания, разброса случайной величины около математического ожидания. По определению дисперсия случайной величины *x* равна математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания, т.е.:

$$D(x) = \sigma_x^2 = M((x - a_x)^2). \tag{13}$$

Функции случайной величины – случайные величины, закон распределения функции случайной величины зависит от закона распределения аргумента и вида функции.

Если случайная величина *y* – функция случайного аргумента *x*,

$$y = \varphi(x); \tag{14}$$

то математическое ожидание случайной величины *y* равно:

$$M(y) = b_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f(x)dx. \tag{15}$$

Для вычисления дисперсии случайной величины *x:*

$$D(x) = \sigma_x^2 = M((x - a_x)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a_x)^2\, f(x)dx. \tag{16}$$

Корень квадратный из дисперсии называется среднеквадратическим отклонением σ_x случайной величины:

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)}. \qquad (17)$$

Математическое ожидание *k*-ой степени случайной величины *x* называется начальным моментом порядка *k:*

$$\sigma_x = M(x^k). \qquad (18)$$

Таким образом, математическое ожидание – начальный момент первого порядка:

$$M(x) = a_1. \qquad (19)$$

Центральным моментом порядка *k* называется математическое ожидание *k*-ой степени разности случайной величины и ее математического ожидания:

$$v_k = M((x - a_1)^2). \qquad (20)$$

Следовательно, дисперсия – центральный момент второго порядка:

$$\sigma_x^2 = D(x) = v_2. \qquad (21)$$

Дисперсия неслучайных величин X и δ равна нулю, поэтому дисперсии результатов измерений, истинных ошибок и случайной составляющей истинной ошибки равны, т.е.:

D(x) = D(Δ) = D(d) поэтому удобно их обозначать символом σ , т.е.:

$$\sigma_x^2 = \sigma_\Delta^2 = \sigma_d^2 = \sigma, \qquad (22)$$

соответственно равны и их среднеквадратические отклонения:

$$\sigma_x = \sigma_\Delta = \sigma_d = \sigma. \qquad (23)$$

Напомним, что закон распределения элементов случайной выборки равен закону распределения генеральной совокупности, поэтому количественные характеристики элементов случайной выборки равны соответствующим количественным характеристикам генеральной совокупности.

Следовательно, если М (х) = Х, $D(x) = \sigma_x^2 = \sigma^2$, то и $M(x_i) = M(x) = X$,

$$D(x_i) = D(x) = \sigma_x^2 = \sigma^2 .$$

Соответственно,

$$M(\Delta_i) = M(\Delta), \qquad D(\Delta_i) = D(\Delta) = \sigma_\Delta^2 = \sigma^2$$
$$M(d_i) = M(d) = 0, \; D(d_i) = D(d) = \sigma_\Delta^2 = \sigma^2.$$

Используя таблицы, легко найти, что:

$$p(|\Delta| < 2\sigma) = \Phi(t = 2) = 0{,}95,$$
$$p(|\Delta| < 3\sigma) = \Phi(t = 3) = 0{,}997.$$

Такие соотношения очень важны.

Из них следует, что вероятность того, что случайная ошибка превысит по абсолютной величине

удвоенное СКО равна 0.05,

утроенное СКО равна 0.003.

Эти вероятности малы, поэтому события $|\Delta|>2\sigma$ и $|\Delta|>3\sigma$ практически невозможны при одиночном измерении, следовательно, удвоенное или утроенное среднее квадратическое отклонение можно считать предельным значением ошибки, предельно возможным значением ошибки измерений.

Отсюда правило двух и трех сигм – ошибку измерений, которая превысила удвоенное и тем более утроенное СКО (среднее квадратическое отклонение) следует считать грубой, недопустимой ошибкой.

ЗАДАНИЕ 2
Исследование рядов ошибок на нормальное распределение

В табл. 2 даны невязки 40 треугольников. Невязки $f = \Sigma\beta - 180^\circ$ можно считать истинными ошибками Δ, так как сумму углов в треугольнике можно рассматривать как измеренную величину, истинное значение которой равно 180°. Выполнить исследование ряда невязок (Δ_i) на нормальный закон распределения.

Таблица 2

№ п/п	Δ, с	№ п/п	Δ, с	№ п/п	Δ, с	№ п/п	Δ, с
1	1,38	11	-0,29	21	-1,58	31	-0,6
2	0,68	12	-0,01	22	1,11	32	-0,13
3	0,27	13	1,55	23	0,45	33	-1,74
4	0	14	-0,99	24	-0,07	34	1,29
5	-1,44	15	0,33	25	1,6	35	-0,63
6	-0,74	16	0,04	26	1,17	36	-0,15
7	-0,28	17	1,56	27	0,51	37	-1,85
8	0	18	-1,05	28	0,11	38	-1,33
9	-1,5	19	-0,38	29	1,67	39	0,64
10	0,94	20	0,06	30	-1,24	40	0,23

Указание: каждому студенту к исходным данным прибавить №варианта/100 (например: 1,38+(1/100) = 1,39, где 1 – № варианта).

Решение:

Найдём ряд сумм, необходимых для дальнейшего исследования:

$[\Delta > 0] = +15{,}59$; $[\Delta < 0] = -16{,}0$; $[\Delta] = -0{,}41$; $[|\Delta|] = 31{,}59$;
$[\Delta^2]=39{,}14$; $[\Delta^3] = -3{,}55$; $[\Delta^4]=81{,}87$.

1. Вычисление оценок параметров нормального распределения M_Δ , σ_Δ , кривая плотности которого определяется выражением:

$$M_\Delta{}^* = \frac{[\Delta]}{n} = \frac{-0{,}41}{40} = -0{,}010'',$$

где $|M_\Delta^*| \le t\sigma_\Delta^*/\sqrt{n}$, а t выбирается из таблиц прил. А (при $n > 30$) по вероятности $\beta = \Phi(t)$.

Находим для β =0,95: t =1, 96 и $t\sigma_\Delta^*/\sqrt{n} = 1{,}96 \text{ x } \frac{0{,}99''}{\sqrt{40}} = 0{,}31''$

Как видно из результатов вычислений, критерий выполняется, так как:

$$\sigma_\Delta^* = m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{39{,}14}{40}} = 0{,}99''.$$

2. Вычисление средней ошибки υ^* и коэффициента $k_{1практ.}$:

$$\upsilon^* = 31{,}59 / 40 = 0{,}79'';$$

$$k_{1практ.} = m / \upsilon^* = 0{,}99'' / 0{,}79'' = 1{,}25; \; k_{1теор.} = 1{,}25.$$

3. Определение вероятной ошибки r_* и коэффициента $k_{2практ.}$

Располагаем истинные ошибки в ряд по возрастанию их абсолютных величин.

Находим:

$$r_* = (|\Delta|_{20} + |\Delta|_{21})/2 = (0{,}64'' + 0{,}68'')/2 = 0{,}66'';$$

$$k_{2практ.} = m / r_* = 0{,}99'' / 0{,}66'' = 1{,}50; \; k_{2теор.} = 1{,}48.$$

4. Построение статистического группированного ряда.

Распределим невязки (табл. 3) в двенадцати интервалах (длину интервала примем равной половине среднеквадратической ошибки, т.е. 0,5m).

Таблица 3

Обработка статистического группированного ряда ошибок

№ п/п	длины интервалов в долях m		Длина интервала t=Δ/m				число ошибок m_i	частоты $Q_i = m_i/n$	высоты прямоугольников $h_i = Q_i /(0{,}5m)$
			t_{i-1}	t_{i-1}	t_{i-1}	t_{i-1}			
1	2		3				4	5	6
1	–3,0m	–2,5m	0	0,5	0,0	0,5	8	0,200	0,000
2	–2,5m	–2,0m	0,51	1,00	0,5	1,0	4	0,100	0,000
3	–2,0m	–1,5m	1,01	1,50	1,0	1,5	4	0,100	0,150
4	–1,5m	–1,0m	1,51	2,00	1,5	2,0	4	0,100	0,250
5	–1,0m	–0,5m	2,01	2,50	2,0	2,5	0	0,000	0,200
6	–0,5m	0	2,51	3,00	2,5	3,0	0	0,000	0,400
7	0	+0,5m	0,00	-0,50	0,0	-0,5	8	0,200	0,400
8	+0,5m	+1,0m	-0,51	-1,00	-0,5	-1,0	4	0,100	0,200
9	+1,0m	+1,5m	-1,01	-1,50	-1,0	-1,5	5	0,125	0,200
10	+1,5m	+2,0m	-1,51	-2,00	-1,5	-2,0	3	0,075	0,200
11	+2,0m	+2,5m	-2,01	-2,50	-2,0	-2,5	0	0,000	0,000
12	+2,5m	+3,0m	-2,51	-3,00	-2,5	-3,0	0	0,000	0,000
Σ							40	1,000	

m_i — число ошибок, попавших в *i*-й интервал, подсчитывается непосредственно. Если значение ошибки совпадает с границей интервала, то эту ошибку следует поместить в тот интервал, в котором теоретически ожидается большее число ошибок (см. рис.1):

$$|M_{\Delta}^{*}| = -0{,}010'' < 0{,}31'',$$

следовательно, с вероятностью 0,95 постоянной систематической ошибкой можно пренебречь и считать, что $M_{\Delta}^{*} = 0$.

5. Построение гистограммы и выравнивающей её кривой распределения. По данным табл.3 (столбцы 2 и 6) строим гистограмму (рис. 1) — график эмпирического распределения.

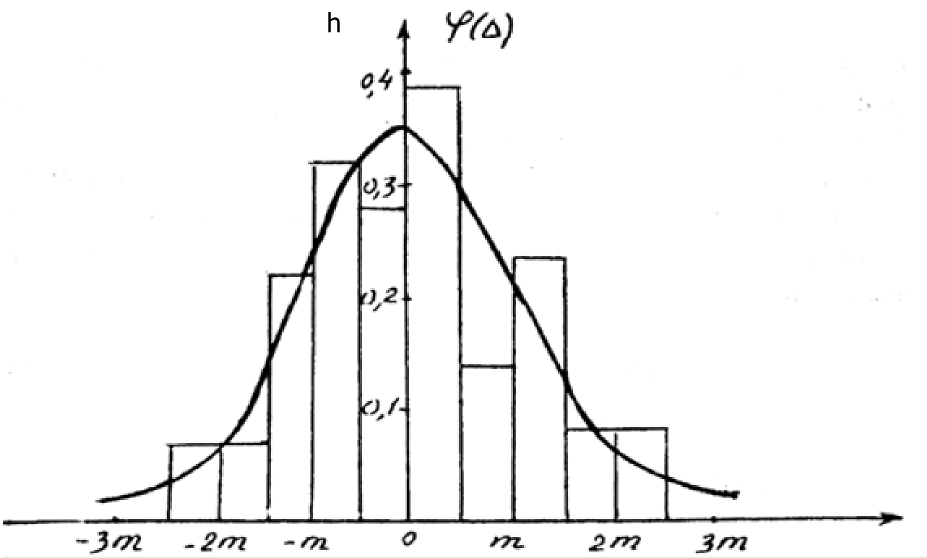

Рис. 1. Гистограмма и выравнивающая кривая φ(Δ)

Вид гистограммы позволяет действительно предположить нормальный закон распределения ошибок Δ_i. Теоретическая кривая, наилучшим образом выравнивающая (сглаживающая) гистограмму, определяется уравнением:

$$\varphi\,(\Delta) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\Delta^2/2m^2} = hy, \qquad (24)$$

где $m = \sigma^*_\Delta = 0{,}99''$, $M^*(\Delta) \approx 0$, $t = \frac{\Delta}{m}$; $h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$; $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Результаты вычислений поместим в табл. 4.

Таблица 4

Обработка ошибок измерений

№ п/п	Длина интервала t=Δ/m				высоты прямоугольников $h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$	y_i	$\varphi(\Delta_i) = hy$
	t_{i-1}	t_i	t_{i-1}	t_i			
1	2				3	4	5
1	0	0,5	0,0	0,5	0,000	*0,017*	*0,000*
2	0,51	1,00	0,5	1,0	0,000	*0,053*	*0,000*
3	1,01	1,50	1,0	1,5	0,150	*0,129*	*0,019*
4	1,51	2,00	1,5	2,0	0,250	*0,242*	*0,060*
5	2,01	2,50	2,0	2,5	0,200	*0,354*	*0,071*
6	2,51	3,00	2,5	3,0	0,400	*0,403*	*0,161*
7	0,00	-0,50	0,0	-0,5	0,400	*0,403*	*0,161*
8	-0,51	-1,00	-0,5	-1,0	0,200	*0,354*	*0,071*
9	-1,01	-1,50	-1,0	-1,5	0,200	*0,242*	*0,048*
10	-1,51	-2,00	-1,5	-2,0	0,200	*0,129*	*0,026*
11	-2,01	-2,50	-2,0	-2,5	0,000	*0,053*	*0,000*
12	-2,51	-3,00	-2,5	-3,0	0,000	*0,017*	*0,000*
Σ							

По данным табл. 4 (столбцы 2 и 4) на графике (рис. 1) наносим ряд точек, которые соединяем плавной кривой. Как видно из графика, кривая $\varphi(\Delta)$ удовлетворительно сглаживает гистограмму.

6. Применение *критерия* χ^2 *-Пирсона.*

Для оценки степени приближения статистического распределения (гистограммы) к теоретическому нормальному закону (кривой распределения) вычисляем величину:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathrm{k}} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \qquad (25)$$

где n=40, $p_i = \frac{\Delta\Phi(t_i)}{2} = \big(\Phi(t_{i-1}) - \Phi(t_i)\big)/2$,

$$\Delta\Phi(t_i) = 0.79788 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}^2}{2}} \mathrm{dt} = 0.13298\,(t_{i-1} - \\ - t_i)(\mathrm{e}^{-\frac{{t_{i-1}}^2}{2}} + 4\mathrm{e}^{-\frac{{t_{ci}}^2}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{{t_i}^2}{2}}). \qquad (26)$$

Например, для третьего интервала (см. табл. 5) по формуле (26) имеем $t_{i-1} = t_2 = 1{,}0$; $t_i = t_3 = 1{,}5$; t_{ci} $(t_{i-1} + t_i)/2 = (t_2 + t_3)/2 = 1{,}25$.

С учетом этих значений

$$\Delta\Phi(t_3) = 0.132988 \cdot 0{,}5 \left(\mathrm{e}^{-\frac{1^2}{2}} + 4\mathrm{e}^{-\frac{1{,}25^2}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{1{,}5^2}{2}}\right) = \\ = 0{,}06649 \cdot (0{,}6005 + 4 \cdot 0{,}4550 + 0{,}3247) = \\ = 0{,}1826\,,$$

$$p_i = \frac{\Delta\Phi(t_i)}{2} = 0{,}0913.$$

Результаты вычислений поместим в табл.5.

Таблица 5

Расчет теоретических параметров распределения

№ п/п	Длина интервала t=Δ/m				$e^{-\frac{1^2}{2}}$	$e^{-\frac{1{,}25^2}{2}}$	$e^{-\frac{1{,}5^2}{2}}$	p_i	m_i	np_i	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
	t_{i-1}	t_i	t_{i-1}	t_i							
1	2				3	4	5	6	7	8	9
1	0	0,5	0,0	0,5	1,0000	0,9692	0,8825	0,1915	8	8	0,000
2	0,51	1,00	0,5	1,0	0,8781	0,7520	0,6065	0,1494	4	6	0,667
3	1,01	1,50	1,0	1,5	0,6005	0,4550	0,3247	0,0913	4	4	0,000
4	1,51	2,00	1,5	2,0	0,3198	0,2144	0,1353	0,0436	4	2	2,000
5	2,01	2,50	2,0	2,5	0,1326	0,0787	0,0439	0,0163	0	0	0,000
6	2,51	3,00	2,5	3,0	0,0428	0,0225	0,0111	0,0048	0	0	0,000
7	0,00	-0,50	0,0	-0,5	1,0000	0,9692	0,8825	0,1915	8	8	0,000
8	-0,51	-1,00	-0,5	-1,0	0,8781	0,7520	0,6065	0,1494	4	6	0,667
9	-1,01	-1,50	-1,0	-1,5	0,6005	0,4550	0,3247	0,0913	5	4	0,250
10	-1,51	-2,00	-1,5	-2,0	0,3198	0,2144	0,1353	0,0436	3	2	0,500
11	-2,01	-2,50	-2,0	-2,5	0,1326	0,0787	0,0439	0,0163	0	0	0,000
12	-2,51	-3,00	-2,5	-3,0	0,0428	0,0225	0,0111	0,0048	0	0	0,000
Σ								0,9937	40	40	4,08

Число степеней свободы определяется формулой $r=k-s-1$. Находим $r=12-1-1=10$ (k — число интервалов, $s=1$, так как только один параметр $\sigma(\Delta)$ оценивался по выборке, а $M(\Delta)$ принято равным нулю).

По таблице Приложения В по числу степеней свободы $r=10$ для $\chi 2 = 3,94$ находим вероятность $P = 0,95$, а для $\chi 2 = 18,3$ находим $P = 0,05$. Интерполируя, для $\chi 2 = 4,08$ получим $P(\chi 2 = 4,08) = 0,941$.

7. Вычисление оценок скошенности Sk^* и эксцесса E^* и проверка соотношений [1, стр.81]:

$$|Sk^*| \le 3\sigma_{Sk};\ E^* \le 5\sigma_E\ ,$$

которые являются критериями нормального закона.

Находим:

1) $\mu^*_3 = [\Delta^3]/\ n = -4,38/\ 32 = -0,137$;
2) $Sk^* = \mu^*_3\ /(\sigma^*_\Delta)^3 = -0,137/\ (1,10)^3 = -0,103$
3) $\mu^*_4 = [\Delta^4]/\ n = 120,7/\ 32 = 3,77$;
4) $E^* = \mu^*_4\ /(\sigma^*_\Delta)^4 - 3 = 3,77/\ (1,10)^4 - 3 = -0,42$;
5) $\sigma_{Sk} = \sqrt{(6/n)} = 0,43$; $\sigma_E = \sqrt{(24/n)} = 0,86$

Как видно из вычислений, соотношения выполняются.

В результате исследования приходим к выводу о том, что рассматриваемый ряд истинных ошибок является действительно рядом случайных ошибок, подчиняющихся приближенно нормальному закону, так как:

1) выполняются свойства случайных ошибок:

а) среднее арифметическое $M^*(\Delta)$ практически равно нулю;

б) положительные и отрицательные ошибки, равные по абсолютной величине (см. гистограмму), примерно одинаково часто встречаются в данном ряде;

в) малые по абсолютной величине ошибки встречаются чаще, чем большие,

г) случайные ошибки Δ с заданной вероятностью β не превосходят определенного предела, равного $t \cdot m$, ни одна из ошибок ряда не превышает предельной ошибки, равной Δпред. $=3m=3,30''$;

2) коэффициенты $k_{1\text{практ.}}$ и $k_{2\text{практ.}}$ совпадают с их теоретическими значениями ($k_1 = 1,25$; $k_2 = 1,48$);

3) вероятность $P(\chi 2) = 0,94$ велика, так как значительно больше критического уровня значимости, равного 0,1;

4) величины скошенности и эксцесса незначительно отличаются от нуля.

ЛИТЕРАТУРА

Основная учебная литература

1. Куштин Е.Ф. Геодезия: математическая обработка измерений. – Ростов-на-Дону, 2006.

Дополнительная учебная и справочная литература

1. Загибалов А.В., Охотин А.Л. Основы математической обработки результатов измерений : учеб. пособие. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2001. –
120 с.
2. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений : учеб. пособие для вузов. - М: Недра, 1985. - 423с.
3. Беляев Б.И. Практикум по математической обработке маркшейдерско-геодезических измерений : учеб. пособие для вузов. - М.: Недра, 1989. - 316 с.
4. Олзоев Б.Н. Основы математической обработки геодезических измерений: учеб. пособие. - Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2012.

Ресурсы сети Интернет

1. Методические указания по курсу «Теория математической обработки геодезических измерений. - М.: Изд. МИИГАиК, 2010, сост. Русяева Е.А. Режим доступа [http://library.miigaik.ru/search/met_uk/].
2. Литература, статьи, методические указания. Режим доступа [http://www.synergy-gis.com/lib.php].

ПРИЛОЖЕНИЕ А
КОЭФФИЦИЕНТЫ СТЬЮДЕНТА *t* ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ОДНОЙ ИЗМЕРЕННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

p N	0,950	0,990	0,997
2	4,3	9,9	18,5
3	3,2	5,8	9,2
4	2,8	4,6	6,6
5	2,6	4,0	5,5
6	2,4	3,7	4,9
8	2,3	3,4	4,3
10	2,2	3,2	4,0
20	2,1	2,8	3,4

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

$n - 2$	Коэффициенты Стьюдента при доверительной вероятности β								
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
4	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
6	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
14	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
16	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	2,9	4,0
20	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
30	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
∞	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Число степеней свободы	Значение χ^2 при вероятности p					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,56	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0