ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Робототехника и мехатроника»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий по дисциплине

«Управление мехатронными системами»

Автор

Круглова Т.Н.

Ростов-на-Дону, 2015

Аннотация

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 15.03.06 (221000) «Мехатроника и робототехника».

В методическом пособии представлены примеры задач проектирования систем управления мехатронными системами.

Автор

к.т.н., доцент, доцент кафедры «Диагностика мехатронных систем» Круглова Т.Н.

Оглавление

ПРИМЕР 1

Найти изображение $F^*(p)$ соответствующее изображению по Лапласу $F(s)=\dfrac{1}{S+\beta}$

Решение:

$$F^*(p)=\overline{D}\left\{\frac{1}{S+\beta}\right\}=\operatorname{Re}s\,\frac{1}{s+\beta}\,\frac{1}{1-e^{-Tp}\cdot e^{TS}}\Big|_{S=-}$$

$$\operatorname{Re}s\,\frac{p(x)}{Q(x)}\Big|_a=\frac{p(a)}{Q'(a)}$$ a -полюс $Q(x)$

ПРИМЕР 2

Задано $F(z)=\dfrac{z}{z-2}$ найти образующую решетчатую функцию

Решение получим делением многочлена на многочлен

$$\begin{array}{r|l} z & z-2 \\ \cline{2-2} -\;\; z-2 & 1+2z^{-1}+4z^{-2}\;\ldots\ldots \\ \cline{1-1} 2 & \\ -\;\; 2-4z^{-1} & \\ \cline{1-1} 4z^{-1} & \\ \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Таким образом, $F(z)=1+\dfrac{2}{z}+\dfrac{4}{z^2}+\dfrac{8}{z^3}+\ldots$ и, соответственно

$$f[0]=1;\ f[1]=2;\ f[2]=4\ldots$$

Другой вариант решения заключается в применении теории вычетов:

$$f[k]=Res\frac{z}{z-2}\cdot z^{k-1}\Big|_{z=2}=\frac{2}{1}\cdot 2^{k-1}=2^k.$$

$$f[0]=1;\ f[1]=2;\ f[2]=4\ldots$$

ПРИМЕР 3

Найдем Z-ПФ разомкнутой дискретной системы, состоящей из АИЭ с экстраполятором нулевого порядка и непрерывной части с ПФ

$$W_{нч}(p)=\frac{k}{T_i p+1}.$$

Решение:

ПФ ПНЧ: $W(p)=\dfrac{k\left(1-e^{-Tp}\right)}{p(T_1 p+1)}$

Воспользуемся вычетами для определения $W(z)$:

$$W(z)=k\frac{z-1}{z}\sum Res\frac{1}{s(T_1 s+1)}\frac{1}{1-e^{-T(p-s)}}\Big|_{s_i}=$$

$$=k\frac{z-1}{z}\left\{\sum\frac{1}{2T_1 s+1}\frac{1}{1-e^{-T(p-s)}}\right\}_{\substack{s_i=0\\ s_i=-1/T_1}}=$$

$$=k\frac{z-1}{z}\left\{\frac{z}{z-1}+(-1)\frac{z}{z-e^{-T/T_1}}\right\}=k\left\{1-\frac{z-1}{z-e^{-T/T_1}}\right\}=$$

$$=\frac{k\left(1-e^{-T/T_1}\right)}{z-e^{-T/T_1}}$$

В случае, если воспользоваться разложением $W_{нч}(s)$ на простые дроби:

$$W(z)=\frac{A(p_1)}{B^{'}(p_1)}\frac{e^{p_1 T}-1}{z-e^{p_1 T}}$$

$$W(z)=\frac{k}{T_1}\frac{1}{\left(-1/T_1\right)}\frac{e^{-T/T_1}-1}{z-e^{-T/T_1}}=\frac{k\left(1-e^{-T/T_1}\right)}{z-e^{-T/T_1}};$$

$$W(z)=\sum_i \frac{A(s_i)}{B^{'}(s_i)}\frac{ze^{\varepsilon T s_i}}{z-e^{T s_i}}.$$

$$p_1=-1/T_1,$$

ПРИМЕР 4

$$W(z)=\frac{a}{z+1}$$

Решение:

$$y(z)=W(z)\cdot f(z)$$

$$(z+1)\cdot y(z)=a\cdot f(z)$$

Перейдем к оригиналам, учитывая теорему о смещении аргумента решетчатой функции:

$$y[k+1]+y[k]=a\cdot f[k]$$

отсюда:

$$y[k+1]=af[k]-y[k]$$

тогда при известных начальных условиях: $y[0]=0,\ f[0]=f_0$

$$y[1]=af_0-0;$$

$$y[2]=af[1]-y[1]\ldots\ldots$$

$$w(z)=\frac{k}{z-0.2};k=1;f=4$$

$$y(z)=w(z)\cdot F(z);F(z)=\frac{z}{z-1}4$$

$$y[k]=\sum_{(i)}Res\,y(z)\cdot z^{k-1}\Big|_{z_i};$$

$$y[k]=Res\frac{4}{z-0.2}\cdot\frac{z}{z-1}z^{k-1}\Big|_{z=0.2}+Res\frac{4z^k}{(z-0.2)(z-1)}\Big|_{z=1}=$$

$$=\frac{4\cdot(0.2)^k}{-0.8}+\frac{4}{0.8}=5\left(1-0.2^k\right),$$

Численные значения:

$$k=0\qquad y=0$$

$$k=1\qquad y=4$$

$$k=2\qquad y=4.8$$

2.Переход к конечноразностному уравнению:

$$\frac{y(z)}{f(z)}=W(z)=\frac{1}{z-0.2};$$

$$z\cdot y(z)-0.2y(z)=f(z)$$

$$y[k+1]=0.2y[k]=f[k]$$

$$y[k+1]=f[k]+0.2y[k]$$

$$y[0]=0$$

$$y[1]=4+0.2\cdot 0=4$$

$$y[2]=4+0.2\cdot 4=4.8$$

Пусть линейная стационарная дискретная система описывает разностным уравнением:

$$Y[k+2]+Y[k+1]-6Y[k]=3u[k+1]-3u[k].$$

Найти выходную функцию при условии, что система сначала находится в покое и входное воздействие есть:

$$u[k]=\begin{cases} k & \text{при} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{при} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$Y[z]=w[z]\cdot u[z]$$

$$\{z^2\cdot Y[z]+z\cdot Y[z]-6Y\}=3zu-3u$$

$$Y(z)=\frac{3(z-1)}{z^2+z-6}u(z)=\frac{3(z-1)}{(z+3)(z-2)}u(z)$$

$$u(z)=z\{k\}=\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$Y(z)=\frac{3z}{(z+3)(z-2)(z-1)}$$

Обратное преобразование найдем по теореме о вычетах.
Полюсы:

$$z_i=-3; \quad 2; \quad 1$$

$$Y[k]=\sum_i \mathrm{Res}\cdot Y(z)z^{k-1}=\sum \mathrm{Res}\frac{3z^k}{(z+3)(z-2)(z-1)}$$

Вычеты $z^{k-1}Y(z)$ в точках z_i:

$$\left.\frac{3z^{k}}{(z-2)(z-1)}\right|_{z=-3}=\frac{(-3)^{k+1}}{20};$$

$$\left.\frac{3z^{k}}{(z+3)(z-1)}\right|_{z=2}=\frac{3z^{k}}{5};$$

$$\left.\frac{3z^{k}}{(z+3)(z-2)}\right|_{z=1}=-\frac{3}{4};$$

Следовательно: $Y(k)=-\frac{(-3)^{k+1}}{20}+\frac{3}{5}2^{k}-\frac{3}{4}; \quad k\geq 0.$

ПРИМЕР 5

Рассмотрим пример построения логарифмических ПЧХ дискретной системы, структурная схема которой представлена на рис. 1:

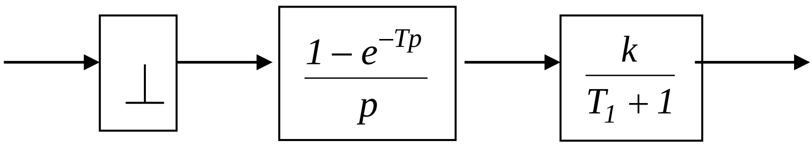

Рис.1

Решение:

Z-ПФ системы была получена ранее.Она имеет вид:

$$W(z)=\frac{k\left(1-e^{\frac{-T}{T_1}}\right)}{z-e^{\frac{-T}{T_1}}}$$

Сведем обозначения: $d = e^{\frac{-T}{T_1}}$

$$W(z) = \frac{k(1-d)}{z-d}$$

Выполним подстановку: $z = \dfrac{1+w}{1-w}$

$$w = j\lambda \, T/2$$

$$W^*(j\lambda) = \frac{k(1-d)}{\dfrac{1+j\lambda\, T/2}{1-j\lambda\, T/2} - d} = \frac{k(1-d)\left(1-j\lambda \frac{T}{2}\right)}{1+j\lambda\, T/2 - d + j\lambda T\, d/2} =$$

$$= \frac{k(1-d)\left(1-\dfrac{T}{2}j\lambda\right)}{(1+d)j\lambda\, T/2 + 1 - d} = \frac{k\left(1-\dfrac{T}{2}j\lambda\right)}{\dfrac{1+d}{1-d}\dfrac{T}{2}j\lambda + 1} = \frac{k\left(1-\dfrac{T}{2}j\lambda\right)}{T_э j\lambda + 1},$$

где $T_э = \dfrac{T}{2}\dfrac{1+d}{1-d}$.

Отметим, что в числителе полученного выражения имеется неминимально-фазовое звено, что типично для дискретных систем.

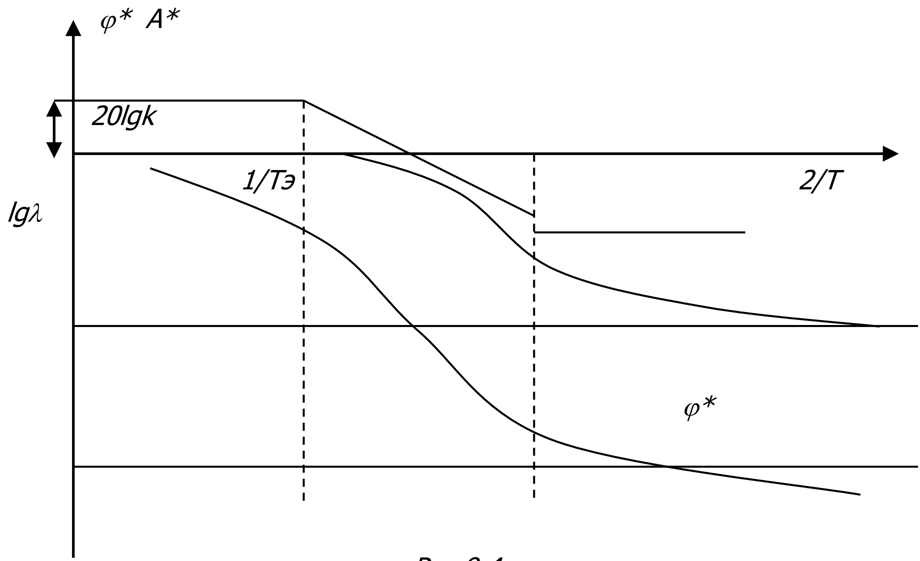

Рис.9.4.

$$\frac{1+d}{1-d} > 1, \qquad \text{следовательно} \qquad T_э > T/2$$

Фаза числителя: $arctg\left(-\lambda\frac{T}{2}\right)$; $\quad 0 \to -\frac{\pi}{2}$

Логарифмические ПЧХ импульсной системы представлены на рис.9.4. Качественно эти характеристики совпадают с ЛАФЧХ непрерывных звеньев, что позволяет применить для исследования импульсных систем хорошо разработанный частотный аппарат непрерывных систем.

При необходимости определения ЧХ замкнутой системы по АФЧХ разомкнутой и наоборот, возможно использование номограмм замыкания.

Таким образом, для дискретных систем введены понятия частотных характеристик и рассмотрены некоторые способы их построения. С формальной точки зрения АФЧХ дискретных и непрерывных систем совпадают в том, что все они характеризуют прохождение гармонического сигнала через систему. Однако, следует понимать, что при этом для дискретных систем мы рассматривали дискретный гармонический сигнал, не затрагивая вопрос о спектре его непрерывной огибающей.

При прохождении непрерывного гармонического сигнала частотные свойства импульсных систем будут существенно отличаться от свойств непрерывных систем. Рассмотрению особенностей частотных свойств импульсных систем будет посвящена следующая тема.

ПРИМЕР 6

Задано характеристическое уравнение системы:

$B(z) = z^3 + 0.5z^2 + 0.1z + 0.5 = 0$, требуется проанализировать ее устойчивость.

Решение:

$$B(z) = z^3 + 0.5z^2 + 0.1z + 0.5 = 0$$

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 + 0.5\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + 0.1\frac{1+w}{1-w} + 0.5 = 0$$

$$(1+w)^3 + 0.5(1+w)^2(1-w) + 0.1(1+w)(1-w)^2 +$$
$$0.5(1-w)^3 = 0$$

$$(1+w)^3 + 0.5(1+w)\left(1-w^2\right) + 0.1(1-w)\left(1-w^2\right) +$$
$$+0.5(1-w)^3 = 0$$
$$1 + 3w + 3w^2 + w^3 + 0.5 - 0.5w^2 + 0.5w - 0.5w^3 + 0.1 -$$
$$-0.1w^2 - 0.1w + 0.1w^3 + 0.5 - 3w \cdot 0.5 + 1.5w^2 - 0.5w^3 =$$
$$= 2.1 + 1.9w + 3.9w^2 + 0.1w^3 = 0$$

Для оценки расположения корней последнего уравнения применим критерий Гурвица, который формулируется следующим образом:

Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы были положительными n – главных определителей матрицы Гурвица, составленной из коэффициентов характеристического уравнения:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & & & \dots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}$$

В нашем примере:

$$a_0 = 0.1 \qquad a_1 = 3.9 \qquad a_2 = 1.9 \qquad a_3 = 2.1$$

$$\begin{bmatrix} 3.9 & 2.1 & 0 \\ 0.1 & 1.9 & 0 \\ 0 & 3.9 & 2.1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = 3.9 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3.9 & 2.1 \\ 0.1 & 1.9 \end{vmatrix} = 3.9 \cdot 1.9 - 2.1 \cdot 0.1 > 0$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 a_3 > 0$$

ПРИМЕР 7

Рассмотрим пример исследования устойчивости дискретной системы. Структурная схема системы приведена на рис.2

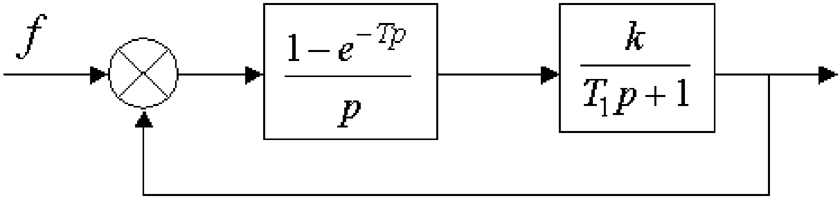

Рис.2

ПФ получена ранее: $W(z)=\frac{k(1-d)}{z-d}, d=e^{-T/T_1}$.

Построим псевдочастотные ЛАФЧХ системы. С этой целью заменим переменную z:

$$z=\frac{1+w}{1-w};\quad w=\frac{j\lambda T}{2}; z=\frac{1+j\lambda T/2}{1-j\lambda T/2}$$ и тогда:

$$W*(j\lambda)=\frac{k\left(1-j\lambda T/2\right)}{j\frac{T}{2}\frac{1+d}{1-d}\lambda+1}=\frac{k(1-j\lambda T_2)}{jT_3\lambda+1};$$

где $T_2=T/2; T_3=\frac{T}{2}\frac{1+d}{1-d}$;

Построим ЛАФЧХ, учитывая, что $\frac{1+d}{1-d}>1$ и следовательно $T_2<T_3$ (рис.3):

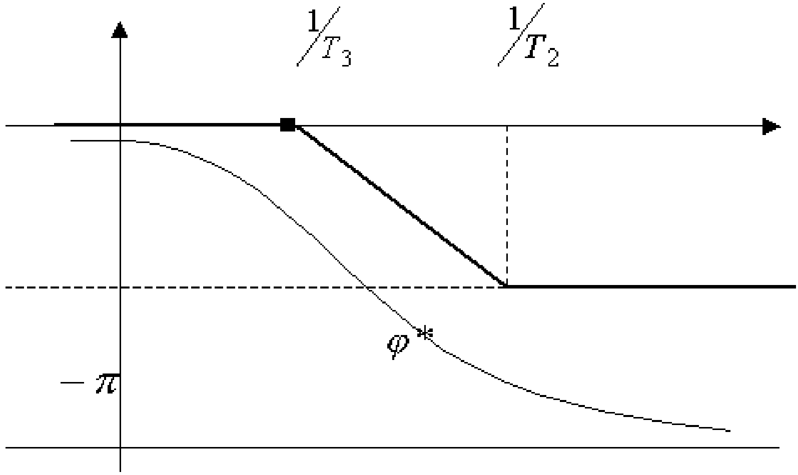

Рис. 3

Из построенных характеристик можно заключить, что устойчивость замкнутой системы зависит от величины коэффициента передачи разомкнутой системы (рис.4).

Условие устойчивости:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \varphi^*(\lambda) \to -\pi$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left| W^*(j\lambda) \right| = \alpha < 1$$

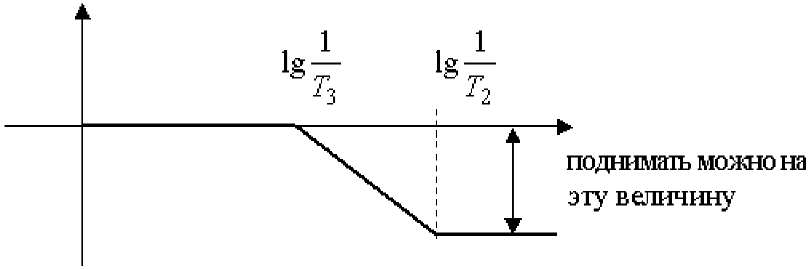

Рис.4.

$$\left(\lg\frac{1}{T_2}-\lg\frac{1}{T_3}\right)\cdot 20 = 20\lg k$$

$$\lg k = \lg T_3/T_2$$

$$k = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T}{2}\frac{1+d}{1-d}\cdot\frac{2}{T} = \frac{1+d}{1-d}; \quad k < \frac{1+d}{1-d}.$$

Пример вычисления z-ПФ силовой системы привода:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega \\ \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{1}{J}M_{дв.}; \end{cases}$$

$$M_{дв.} = c_M i_{дв.};$$

$$i_{дв.} = \frac{1}{r}\left(u - c_e\omega\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = \omega \\ &\frac{d\omega}{dt} = \frac{c_M}{Jr}u - \frac{c_e c_M}{Jr}\omega \end{aligned}\right\}$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{1}{T_1}\omega + \frac{k}{T_1}u \end{aligned}\right\}$$

$$T_1 = \frac{Jr}{c_e c_M};\ k = \frac{1}{c_e}.$$

где φ - угол поворота вала двигателя; ω - скорость; управляющее напряжение; k и T_1 - параметры ОУ.

Выберем вектор состояния $x = \begin{pmatrix}\varphi & \omega\end{pmatrix}$. Тогда

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{k}{T_1} \end{pmatrix} u.$$

Применим для вычисления переходной матрицы Ф - аналитический способ, основанный на использовании преобразования Лапласа.

$$\Phi = L^{-1}\left\{ \left(pE - A\right)^{-1} \right\}\Big|_{t=T},$$

при этом

$$\left(pE - A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 0 & p + \dfrac{1}{T_1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} p + \dfrac{1}{T_1} & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix}}{p\left(p + \dfrac{1}{T_1}\right)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p} & \dfrac{1}{\left(p + \dfrac{1}{T_1}\right)p} \\ 0 & \dfrac{1}{p + \dfrac{1}{T_1}} \end{pmatrix}$$

Найдем обратное преобразование:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{p} & \dfrac{1}{p\left(p+\dfrac{1}{T_1}\right)} \\ 0 & \dfrac{1}{p+\dfrac{1}{T_1}} \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} 1(t) & T_1\left(1-e^{-t/T_1}\right) \\ 0 & e^{-t/T_1} \end{pmatrix}\right|_{t=T}$$

Подставляя в (18.4) t=T (интервал квантования), получим переходную матрицу состояния дискретной системы:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & T_1\left(1-e^{-T/T_1}\right) \\ 0 & e^{-T/T_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Перейдем к нахождению z- ПФ. Пусть y[k]=x[k], то есть e=E, R=0.

Тогда выражение для матричной ПФ примет вид:

$$\overline{W}(z) = c(zE-\Phi)^{-1}H = \begin{pmatrix} z-1 & -a_{12} \\ 0 & z-a_{22} \end{pmatrix}^{-1} H .$$

Для определения элементов матрицы H найдем решение дифференциальных уравнений объекта при нулевых начальных условиях и u=1:

$$\varphi(t) = kt - kT_1\left(e^{-t/T_1}-1\right);\; \omega(t) = k\left(1-e^{-t/T_1}\right)$$

Подставив в полученные зависимости t=T, найдем матрицу H:

$$H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kT - kT_1\left(e^{-T/T_1}-1\right) \\ k\left(1-e^{-T/T_1}\right) \end{pmatrix}.$$

Матрица ПФ $\overline{W}(z)$ в данном случае характеризует связь напряжения u с координатами φ, ω. Вычислим матрицу:

$$\overline{W}(z)=\frac{\begin{pmatrix} z-a_{22} & a_{12} \\ 0 & z-1 \end{pmatrix}H}{(z-1)(z-a_{22})}; \qquad H=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{W}(z)=\frac{\begin{pmatrix} (z-a_{22})h_1+a_{21}h_2 \\ (z-1)h_2 \end{pmatrix}}{(z-1)(z-a_{22})}$$

окончательно получим:

$$W(z)=\begin{pmatrix} \dfrac{\varphi(z)}{u(z)} \\ \dfrac{\omega(z)}{u(z)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{(z-a_{22})h_1+a_{12}h_2}{(z-1)(z-a_{22})} \\ \dfrac{h_2}{z-a_{22}} \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 8

Допустим, задана ИСУ, структурная схема которой имеет вид (рис.5).

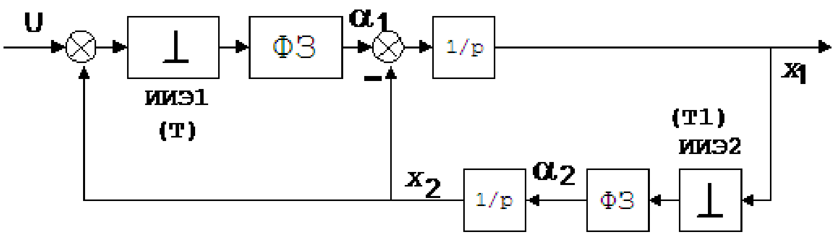

Рис.5

Данная система является асинхронной. Периоды повторения первого ИЭ- T, и второго T_1 - кратные числа, причем $T=2T_1$. Формирующие звенья обоих ИЭ представляют собой экстраполяторы нулевого порядка. Временная диаграмма работы импульсных элементов представлена на рис.5.

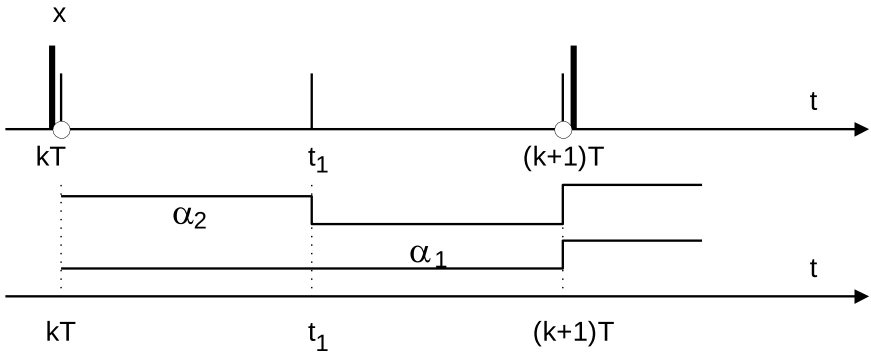

Рис.6.

Примем за переменные состояния координаты x_1, x_2. Входное воздействие u(t) будем считать непрерывной функцией. Рассмотрим временной интервал (kT,t_1) и запишем дифференциальные уравнения, соответствующие переходу $kT^+ \to t_1^-$:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u\left[kT^+\right] - x_2[kT^+] - x_2(t), \\ \dot{x}_2 &= x_1[kT^+] \end{aligned}\right\}$$

Решив заданную систему, получим при $kT<t<t_1$:

$$x_2(t)= x_2[kT^+]+x_1[kT^+](t-kT);$$

$$\dot{x}_1(t) = u[kT^+] - x_2[kT^+] - x_2[kT^+] - x_1[kT^+](t-kT);$$

$$x_1(t) = x_1[kT^+] - x_1[kT^+]\frac{(t-kT)^2}{2} - 2x_2[kT^+](t-kT) + u[kT^+](t-kT);$$

Подставив в полученные зависимости $t = t_1 = kT + \dfrac{T}{2}$,

получим:

$$\begin{cases} x_1[t_1^-] = x_1[kT^+]\left\{1 - \dfrac{T^2}{8}\right\} - Tx_2[kT^+] + \dfrac{T}{2}u[kT^+]; \\ x_2[t_1^-] = \dfrac{T}{2}x_1[kT^+] + x_2[kT^+]; \end{cases}$$

Эту систему можно представить в виде:

$x[t_1^-]=\Phi_0 x[kT^+]+H_0 u[kT]$,
где

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \Phi_0=\begin{pmatrix} 1-T^2/8 & -T \\ T/2 & 1 \end{pmatrix}; H_0=\begin{pmatrix} T/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим далее дискретный переход $kT^- \to kT^+$:
$x_1[kT^+]= x_1[kT^-]$;
$x_2[kT^+]= x_2[kT^-]$;
то есть $x[kT^+]=F_0\, x[kT^-]$,
где

$$F_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Объединив результаты двух рассмотренных переходов, получим:
$x[t_1^-]=\Phi_0 F_0 x[kT^-]+H_0 u[kT^+]$
или $x[t_1^-]=\Phi_0 x[kT^-]+H_0 u[kT^+]$, так как для данного случая $F_0 \equiv E$.

Рассмотрим следующий временной интервал $(t_1,(k+1)T)$.

Запишем дифференциальные уравнения, соответствующие переходу $(t_1,(k+1)T)$. При этом следует иметь в виду, что в момент времени t_1 срабатывает только второй ИИЭ, а выходной сигнал первого ИИЭ не изменяется. Уравнения имеют вид:

$$\dot{x}_1(t)=u[kT^+]-x_2[kT^+]-x_2(t);$$

$$\dot{x}_2(t)=x_1[t_1^+].$$

Решив заданную систему, получим при $t_1<t<(k+1)T$:

$$x_2(t)=x_2[t_1^+]+x_1[t_1^+](t-t_1);$$

$$x_1(t)=x_1[t_1^+]-x_1[t_1^+]\frac{(t-t_1)^2}{2}-x_2[t_1^+](t-t_1)-x_2[t_1^+](t-t_1)+u[kT](t-t_1);$$

При $t=(k+1)T$ имеем $t-t_1=T/2$ и тогда:

$$\begin{cases} x_1[(k+1)T^-] = x_1[t_1^+]\left(1-\dfrac{T^2}{8}\right) - x_2[t_1^+]\dfrac{T}{2} - x_2[t_1^+]\dfrac{T}{2} + u[kT]; \\ x_2[(k+1)T^-] = \dfrac{T}{2}x_1[t_1^+] + x_2[t_1^+] \end{cases}$$

или, переходя к матричной форме записи:

$x[(k+1)T^-]=\Phi_1 x[t_1^+]+Rx[kT^+]+H_1u[kT]$,

где

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{T^2}{8} & -\dfrac{T}{2} \\ \dfrac{T}{2} & 1 \end{pmatrix};\; R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\; H_1 = \begin{pmatrix} T/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Дискретный переход $t_1^- \to t_1^+$ аналогичен рассмотренному переходу $kT^- \to kT^+$, то есть:

$x[t_1^+]= x[t_1^-]$.

Объединив все переходы, получим:

$x[(k+1)T^-]=\Phi_1 x_1[t_1^-]+Rx[kT^-]+H_1u[kT]$

$x[(k+1)T^-]=\Phi_1\{\Phi_0 x[kT^-]+H_0u[kT]\}+ Rx[kT^-]+H_1u[kT]=$

$=[\Phi_1 \Phi_0+R]\, x[kT^-]+[\Phi_1 H_0+H_1]u[kT^-]$

или

$x[(k+1)T^-]=\Phi x[kT^-]+Hu[kT]$,

где

$\Phi=\Phi_1\Phi_0+R;\; H=H_1+\Phi_1 H_0$.

Таким образом, получена система разностных уравнений, определяющая связь между значениями переменных состояния на интервале основного квантования T. Устойчивость рассматриваемой дискретной системы определяется собственными числами матрицы Ф. Полученные зависимости позволяют провести расчет переходных процессов в данной системе.

Рассмотрим пример:

Определим ошибку, устанавливающуюся в импульсной системе, если:

$$\Phi_\varepsilon(z)=\frac{(z-0{,}5)(z-1)}{z^2-0{,}5z+0{,}8}$$

и $f[kT]=a_0+a_1kT$, $a_0=2$, $a_1=4$, $T=1$.

Введем новую переменную $\alpha=z-1$, получим:

$$\Phi_\varepsilon(\alpha)=\frac{(\alpha+0{,}5)\alpha}{\alpha^2+1{,}5\alpha+1{,}3}$$

(21.18)

Разделив числитель и знаменатель, найдем разложение функции (21.18) в ряд по степеням α (запишем только два первых члена):

$$\left(0{,}5\alpha+\alpha^2\right)/\left(1{,}3+1{,}5\alpha+\alpha^2\right)=0{,}384\alpha+0{,}326\alpha^2+\ldots$$

$$\Phi_\varepsilon(\alpha)==0{,}384\alpha+0{,}326\alpha^2+\ldots$$

Откуда следует, что $c_0=0$; $c_1=0{,}384$; $c_2=0{,}326$ и тогда:

$$\varepsilon_{-}[kT]=c_0 f[kT]+c_1\Delta f[(k-1)T]+\frac{c_2\Delta^2 f[(k-2)T]}{2}+\ldots=c_1a_1T=0{,}384\cdot4\cdot1=1{,}536$$

.

ПРИМЕР 9

Рассмотрим пример синтеза дискретного корректирующего устройства, включаемого последовательно с неизменяемой частью системы. Передаточная функция приведенной непрерывной части исходной системы имеет вид:

$$W(p)=\frac{k}{p(1+T_1p)}\frac{1-e^{-Tp}}{p},$$

где

$k=20, T_1=0.1c, T=0.02c\cdot$

Желаемая ЛАЧХ ($W^*_{ж}(j\lambda)$) системы представлена на рис.23.8. .

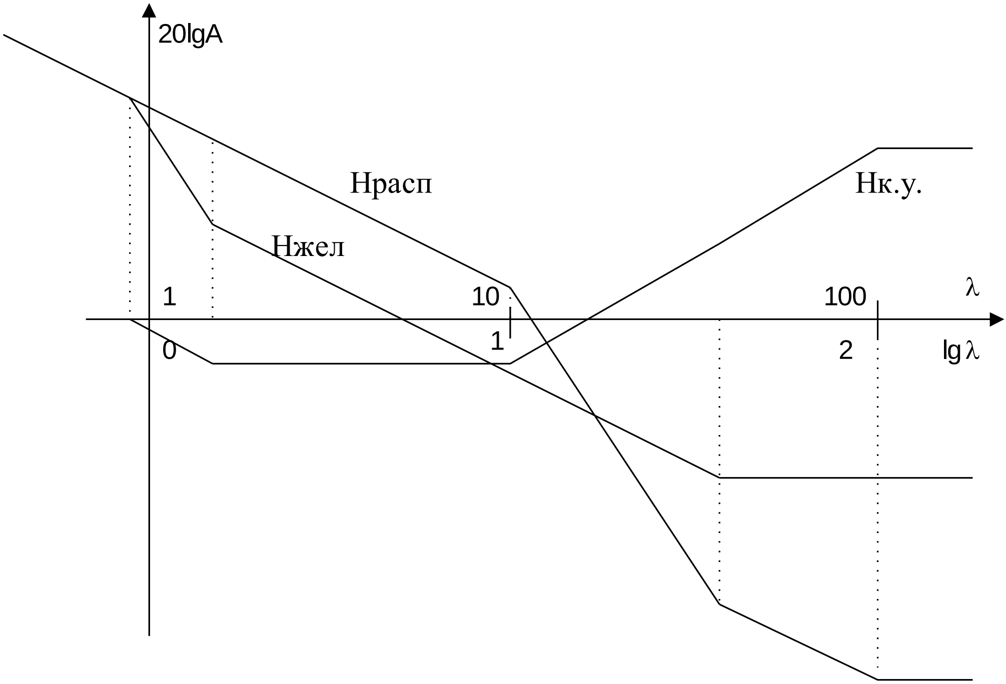

Рис.7

Найдем располагаемую ЛАЧХ импульсной системы, для чего по передаточной функции:

$$W(p) = \frac{k}{p(1+T_1 p)} \frac{1-e^{-Tp}}{p}$$

определим w - передаточную функцию $W(z)$.

$$\frac{1}{7.94} = 0.126 \qquad \frac{1}{0.4} = 2.5 \qquad \frac{1}{0.103} = 9.7$$

$$\lg 0.126 = -0.9 \qquad \lg 2.5 = 0.4 \qquad \lg 9.7 = 0.987$$

$$\frac{1}{0.003}=333.33$$

$$\lg 333.33=2.52$$

$$W(z)=\frac{z-1}{z}\overline{D}\left\{\frac{k}{p^2(\ T_1p+1\ )}\right\}=$$

$$=\frac{z-1}{z}-k\left\{\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{T_1(1-d)z}{(z-1)(z-d)}\right\}=$$

$$\frac{kT}{z-1}-\frac{kT_1(z-1)}{z-d};$$

Подставляем $z=\dfrac{1+w}{1-w}$, получим:

$$\frac{kT(1-w)}{1+w-1+w}-\frac{kT_1(1-d)(1-w)}{1+w-d+dw}=\frac{kT(1-w)}{2w}-\frac{kT_1(1-d)(1-w)}{1-d+(1+d)w}=$$

$$\frac{kT(1-w)}{2w}-\frac{kT_1(1-w)}{1+\frac{1+d}{1-d}w}=$$

Введем обозначение : $T_1^{'}=\dfrac{1+d}{1-d}$.

$$=\frac{kT(1-w)(1+T_1^{'}w)-kT_1(1-w)\cdot 2w}{2w(1+T_1^{'}w)}=\frac{[kT(1+T_1^{'}w)-kT_1 2w](1-w)}{2w(1+T_1^{'}w)}=$$

$$=\frac{[kT+(kTT_1^{'}-2kT_1)w](1-w)}{2w(1+T_1^{'}w)}=$$

$$= \frac{kT}{2}\frac{\left(1+T_1^{'}w\right)\left(1-w\right)}{w\left(1+T_1^{'}w\right)} = \frac{kT}{2}\frac{\left(1+T_1^{''}w\right)\left(1-w\right)}{w\left(1+T_1^{'}w\right)},$$

где

$$d = e^{-T/T_1};$$

$$T_1^{''} = \frac{1}{kT}\left(kT\frac{1+d}{1-d} - 2kT_1\right) = \frac{1+d}{1-d} - \frac{2T_1}{T}$$

Далее вместо выполним замену: $w = \dfrac{j\lambda T}{2}$.

$$W\left(j\lambda\right) = k\frac{\left(1+T_1^{''}\frac{T}{2}j\lambda\right)\left(1-j\frac{\lambda T}{2}\right)}{j\lambda\left(1+T_1^{'}T/_2\, j\lambda\right)}$$

в числах:

$$W\left(\omega\right) = 20\frac{\left(1-j0.01\lambda\right)\left(1+j0.003\omega\right)}{j\lambda\left(1+j0.103\lambda\right)}$$

Располагаемая ЛАЧХ представлена на рис.7.12.:

Тогда ω - передаточная функция коррекционного устройства имеет вид:

$$D_\omega\left(\omega\right) = \frac{\omega\left(1+j0.4\lambda\right)\left(1-0.01j\lambda\right)j\lambda\left(1+0.103j\lambda\right)}{j\lambda\left(1+7.97j\lambda\right)\cdot 20\left(1-0.001j\lambda\right)\left(1+0.003j\lambda\right)}$$

или

$$D\left(\omega\right) = \frac{\left(1+j0.4\lambda\right)\left(1+j0.103\lambda\right)}{\left(1+7.94j\lambda\right)\left(1+0.003j\lambda\right)}$$

Переходим с помощью билинейного преобразования к переменной Z:

$$\omega = j\lambda \, {}^{T}\!/_{2};$$

$$j\lambda = {}^{2\omega}\!/_{T}$$

$$\omega = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = 100\,\frac{z-1}{z+1}$$

Получим:

$$D(z) = 0.448\,\frac{z^2 - 1.77z + 0.783}{z^2 - 0.459z - 0.537}.$$

Рассмотрим пример реализации данного дискретного фильтра ЦВУ.

Схема моделирования фильтра методом прямого программирования:

Запишем ПФ КУ в общем виде:

$$W_{ку}(z) = D(z) = K_{ку}\,\frac{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

$$\frac{y(z)}{U(z)} = D(z)$$

Введем в промежуточную функцию $e(z)$:

$$y(z) = \left[\frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \cdot U(z)\right] \cdot \left(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}\right)$$

$$e(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}U(z)$$

$$e(z) = U(z) - b_1 z^{-1} e(z) - b_2 z^{-2} e(z)$$

$$y(z) = K_{ку} \cdot \left(e(z) + a_1 z^{-1} - e(z) + a_2 z^{-2} e(z)\right).$$

Структурная схема приведена на рис.8.:

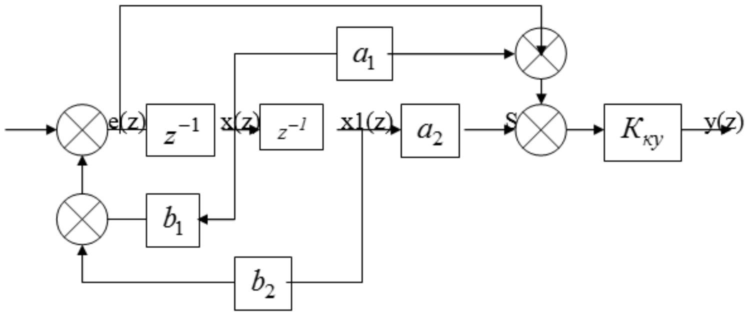

Рис. 8.

Обозначим переменные:

$$\begin{cases} x_1[k+1] = x_2[k] \\ x_2[k+1] = U[k] - x_1[k]\cdot b_2 - x_2[k]\cdot b_1 \end{cases}$$

$$y[k] = k_{ку}\{x_1[k]\cdot a_2 + x_2[k]\cdot a_1 + U[k] - b_2 x_1[k] -$$
$$- b_1 x_2[k]\} =$$
$$= k_{ку}\{(a_2 - b_2)x_1[k] + (a_1 - b_1)\cdot x_2[k] + U[k]\}.$$

ПРИМЕР 10

Рассмотрим пример перехода от аналогового прототипа к цифровому фильтру. Пусть

$$D(p) = \frac{0.4p + 1}{0.1p + 1}$$

эта ПФ соответствует часто применяемому интегро-дифференцирующему фильтру.Тогда:

$$D(p) = \frac{0.4 + p^{-1}}{0.1 + p^{-1}}.$$

$$D(z) = \frac{0.4 + \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}}{0.1 + \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}},$$

или

$$D(z) = \frac{(T+0.8)z + T - 0.8}{(T+0.2)z + T - 0.2},$$

где Т-период квантования.

В заключение отметим, что кроме перечисленных методов существуют и другие многочисленные методы синтеза КУ.