



Управление мехатронными системами

СКИФ



Кафедра «Робототехника и мехатроника»

Лекционный курс

Автор

Круглова Т.Н.

Аннотация

Лекционный курс предназначен для студентов направления 15.03.06 «Мехатроника и робототехника».

Автор

Круглова Татьяна Николаевна –

КАНДИДАТ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК, ДОЦЕНТ

Сфера научных интересов – интеллектуальные мехатронные системы. Диагностирование мехатронных систем.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛЕКЦИЯ № 1	5
ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЦИФРОВЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ АППАРАТЕ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ	5
ЛЕКЦИЯ № 2	13
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА КВАНТОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ. ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА.....	13
ЛЕКЦИЯ № 3	18
СВОЙСТВА Z- ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.....	18
ЛЕКЦИЯ № 4	22
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОСНОВНЫХ СТРУКТУР ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ.....	22
ЛЕКЦИЯ №5.....	26
УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ	26
ЛЕКЦИЯ № 6	33
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ Z- ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ В ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМА.	33
ЛЕКЦИЯ № 7	39
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОСНОВНЫХ СТРУКТУР ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ.....	39
ЛЕКЦИЯ №8.....	46
ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ.	46
ЛЕКЦИЯ № 9	53
ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ (продолжение).....	53
ЛЕКЦИЯ №10.....	59
УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ.	59
ЛЕКЦИЯ №11.....	64
ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ.	64
ЛЕКЦИЯ № 12	71

Управление мехатронными системами

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ЛПЧХ.....	71
ЛЕКЦИЯ № 13.....	76
УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ В МОМЕНТЫ КВАНТОВАНИЯ И МЕЖДУ НИМИ.	76
ЛЕКЦИЯ №14.....	78
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ОПИСАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ.....	78
ЛИТЕРАТУРА.....	83

ЛЕКЦИЯ № 1

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЦИФРОВЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ АППАРАТЕ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ

План лекции

1. Общие замечания.
2. Рассмотрение обобщенной функциональной схемы цифровой автоматической системы.
3. Квантование сигналов в цифровых системах автоматического управления.
4. Цифроаналоговое преобразование сигналов.

1.1. Предисловие

Курс " Компьютерное управление" посвящен изучению методов анализа и синтеза наиболее перспективного, и в настоящее время достаточно обширного, класса цифровых систем автоматического управления (ЦСАУ).

Цифровой способ управления находит все более широкое применение в практике создания систем управления самыми различными техническими объектами. Это объясняется значительными успехами, достигнутыми в разработке цифровых вычислительных устройств (ЦВУ) (микропроцессоры (МП), микроконтроллеры, бортовые цифровые вычислительные машины (БЦВМ) и т. д.); их большими вычислительными и логическими возможностями, способностью запоминать значительные объемы информации, структурной гибкостью и унифицируемостью цифровых автоматических систем.

Появление высокопроизводительных МП вызвало большие перемены в области построения систем управления и их алгоритмической базы. Однако, уже первые попытки практической реализации на ЦВУ традиционно используемых алгоритмов управления показали, что включение цифровых вычислителей, в замкнутый контур системы само по себе не влечет за собой улучшения, например, таких показателей системы, как ее характеристики устойчивости и управляемости по сравнению с ее аналоговым прототипом.

Наиболее полно достоинства цифрового способа управления проявляются при использовании оптимальных и адаптивных алгоритмов обработки информации и управления. Для практической реализации адаптивных цифровых систем современные МП открывают широкие перспективы. Микропроцессорные системы автоматического управления (МПСУ) позволяют реализовать сложные нелинейные алгоритмы управления, оптимизирующие работу системы по различным критериям качества: быстродействию, характеру переходного процесса, энергопотреблению, грубости к измерению параметров, а также по совокупности указанных критериев.

Кроме того производительность современных процессоров позволяет параллельно решать задачи восстановления объекта управления по измеряемым координатам, идентифицировать параметры объекта и т.д., т.е. получать информацию, которая необходима для построения высокоточных, быстродействующих и надежных автоматических систем.

Однако, включение ЦВУ в замкнутые контуры управления, особенно в

Управление мехатронными системами

высокодинамичные контуры управления следящими системами, наряду с большими возможностями по формированию оптимальных и адаптивных управлений, часто приводит к возникновению в таких системах нежелательных побочных эффектов, связанных с динамическими особенностями ЦВУ как звена системы автоматического управления.

Это является следствием того, что цифровые системы относятся к классу дискретных систем и характеризуются квантованием сигналов по времени, так как ЦВУ является устройством с импульсной формой съема и переработки информации; запаздыванием, обусловленным конечным быстродействием арифметического устройства и устройств ввода-вывода данных; квантованием сигналов по уровню, вызванным ограниченностью разрядной сетки ЦВУ и преобразующих устройств.

Дискретизация сигналов приводит к появлению совершенно новых явлений, которые не могут возникнуть в непрерывных системах:

- переходные процессы конечной длительности;
- периодические частотные характеристики и т.д.

Указанные особенности не позволяют непосредственно использовать методы непрерывных систем к анализу дискретных систем, каковыми и цифровые и импульсные системы являются .

Таким образом, цифровые автоматические системы представляют собой специальный класс систем автоматического управления, и их изучение составляет один из важнейших разделов современной теории автоматического управления.

1.2. Общие сведения о цифровых автоматических системах.

Обобщенная схема цифровой автоматической системы (ЦАС) представлена на рис. 1.1. Она включает в себя непрерывную часть, состоящую из управляемого объекта, силовой системы, датчиков, и цифровую часть — бортовую ЦВМ.

Центральным звеном ЦАС является бортовая ЦВМ, которая состоит из двух основных устройств: цифрового вычислительного устройства (ЦВУ) и устройства ввода-вывода данных (УВВ)—преобразователей типа аналог-цифра (А/Ц) и цифра-аналог (Ц/А) (рис. 1.2)

Управление мехатронными системами

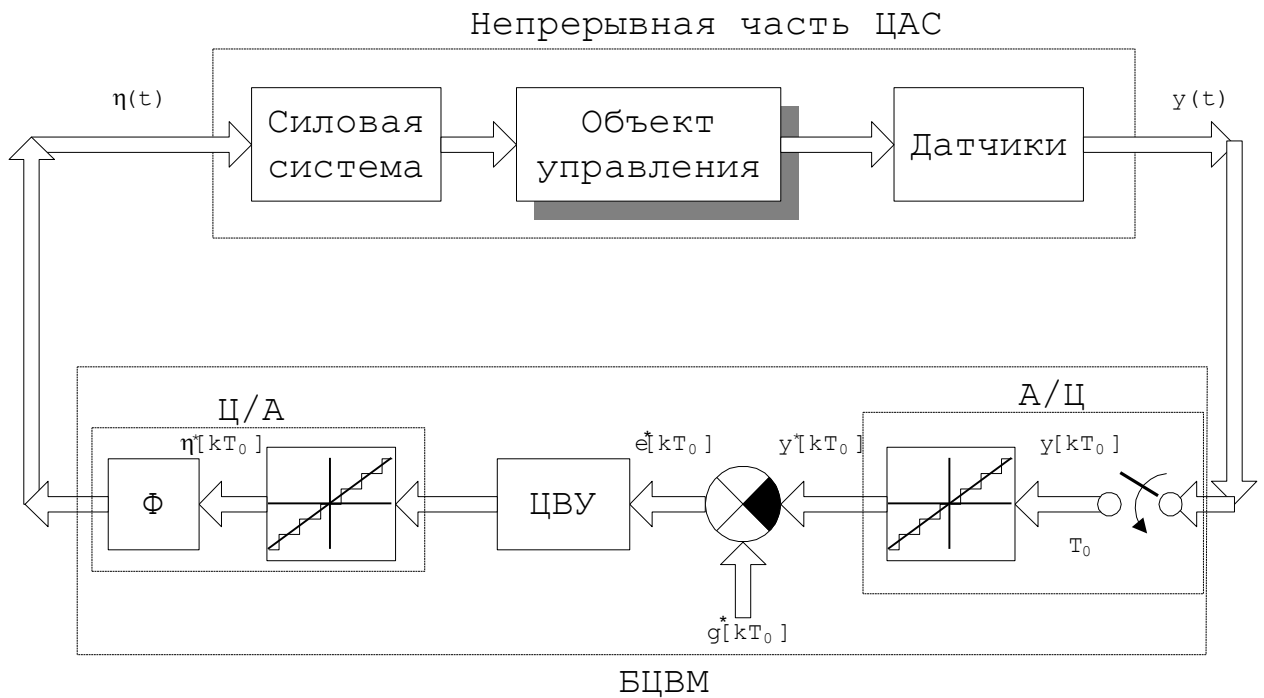


Рис. 1.1.

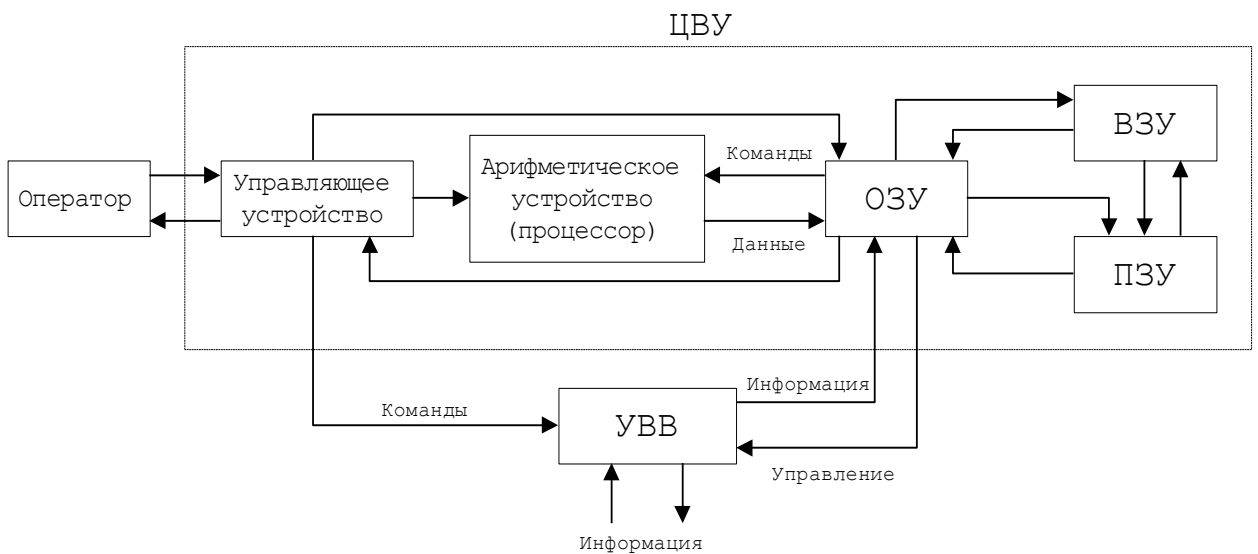


Рис.1.2.

Цифровое вычислительное устройство является основной вычислительной частью БЦВМ и предназначено для хранения программ, приема внешней информации из устройств ввода, арифметических и логических вычислений по программам, хранения всех промежуточных и конечных результатов вычислений и выдачи их в определенные моменты времени в устройства вывода. ЦВУ включает в себя арифметическое устройство с устройством управления (микропроцессор), а также оперативное (ОЗУ), постоянное (ПЗУ) и внешнее (ВЗУ) запоминающие устройства. Устройство управления предназначено для координации всех вычислительных процессов и обмена информацией между подсистемами БЦВМ при выполнении последовательности операций в соответствии с программой. Специфической особенностью БЦВМ является наличие счетчиков единого времени (таймеров), предназначенных для обеспечения работы БЦВМ в реальном

масштабе времени. ОЗУ предназначено для хранения входной, выходной и промежуточной информации, ПЗУ—для хранения программ и констант, ВЗУ—для ввода и хранения исходных данных (резерв ОЗУ и ПЗУ).

Бортовая ЦВМ, используемая для управления, осуществляет преобразование входных информационных сигналов о состоянии объекта управления в выходные управляющие сигналы в соответствии с заложенными в ней алгоритмами и программами. В цифровых системах управления, в зависимости от сложности объекта управления, БЦВМ может работать в режиме разделения времени, т. е. обслуживает в определенной последовательности отдельные каналы управления. Очередность обслуживания может осуществляться как по жесткой программе в соответствии с временной диаграммой работы БЦВМ, так и по мере поступления заявок от отдельных каналов с использованием принципа приоритетного обслуживания. В первом случае периоды T_{oi} повторения решений в БЦВМ алгоритмов, соответствующих i -му каналу управления, можно считать постоянными, хотя, возможно, и различными для разных каналов. Такие системы можно классифицировать как *периодические ЦАС*. Во втором случае интервалы T_{oi} повторения обслуживания оказываются случайными величинами. Такие системы могут классифицироваться как *непериодические ЦАС*.

На вход БЦВМ в общем случае поступает весьма разнообразная информация, одна часть которой представляется дискретным способом (в виде кодов), а другая часть аналоговым способом (в виде токов, напряжений, временных интервалов, углов поворота осей и т. п.). Поэтому БЦВМ содержит устройства, обеспечивающие преобразование кодов входных сигналов в цифровой код машины (преобразователи типа «код-код»), а также преобразование аналоговых сигналов в цифровой код (преобразователи типа «аналог-цифра»). Преобразование «код-код» обычно осуществляется непосредственно в цифровом вычислительном устройстве БЦВМ. Для преобразования аналоговых сигналов в цифровую форму необходимы специальные устройства.

1.3. Преобразование непрерывных сигналов в цифровой код.

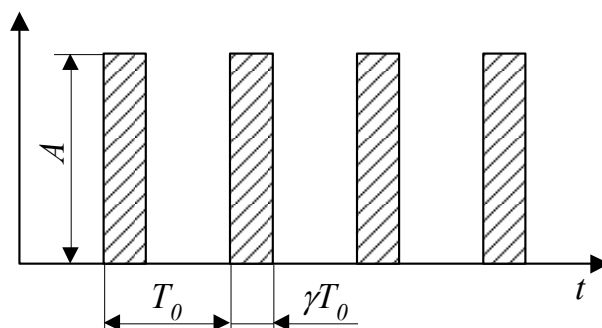
Квантование по времени и уровню.

Процесс преобразования совокупности управляемых координат объекта, представляемых непрерывной функцией времени $y(t)$ в цифровой код машины условно можно разделить на три этапа: **квантование по времени, квантование по уровню и кодирование.**

Квантование по времени соответствует фиксации мгновенных значений непрерывно изменяющейся функции $y(t)$ в дискретные моменты времени kT_0 ($k=0, 1, 2, \dots$ —дискретное время, T_0 —период дискретности по времени).

Схему процесса квантования сигналов по времени (импульсной модуляции) можно представить в виде последовательного включения в цепь преобразуемого сигнала $y(t)$ *импульсного элемента (ИЭ)*, замыкающегося через интервалы времени T_0 и модулирующего элемента. На выходе ИЭ образуется последовательность импульсов, модулированная сигналом $y(t)$.

Основными параметрами немодулированной последовательности импульсов (рис. 1.3) являются высота или амплитуда импульса A , длительность или ширина



Управление мехатронными системами

импульса γT_0 , расстояние между импульсами или период повторения T_0 . Величина $y(t)$, определяющая закон модуляции, называется *модулирующей величиной*. Таким образом, процесс импульсной модуляции состоит в изменении по определенному временному закону какого-либо параметра периодически повторяющихся импульсов.

Рис.1.3.

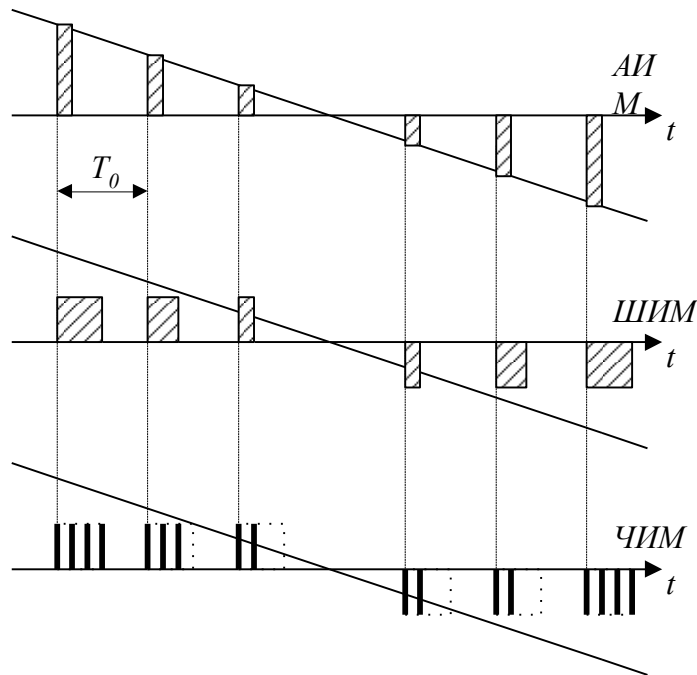


Рис.1.4..

В соответствии с тем, какой из параметров импульсов варьируется по закону изменения модулирующей величины, различают:

- амплитудно-импульсную модуляцию (АИМ) — варьируется высота A ;
- широтно-импульсную модуляцию (ШИМ) — варьируется параметр γ ;
- времяимпульсную модуляцию (ВИМ) — варьируется один из временных параметров последовательности импульсов.

Времяимпульсная модуляция включает в себя фазоимпульсную модуляцию (ФИМ) и частотно-импульсную модуляцию (ЧИМ). Характерные типы импульсной модуляции иллюстрируются рис. 1.4.

Квантование по уровню состоит в замене в соответствующие моменты времени мгновенных значений непрерывной величины y ближайшими разрешенными дискретными значениями y^* в соответствии со статической характеристикой преобразователя А/Ц, изображенной на рис. 1.5 для случая скалярной переменной y .

Число уровней $\mu_1 = 2^{N_1} - 1$ этой характеристики однозначно связано с числом N_1 двоичных разрядов преобразователя А/Ц и, в свою очередь, через цену Δ_1 младшего разряда преобразователя определяет величину его «зоны линейности»:

$$|y_{\max}| \leq \mu_1 \Delta_1.$$

При *одновременном квантовании по времени и уровню* непрерывный

Управление мехатронными системами

сигнал $y(t)$ заменяется ближайшими к значениям непрерывного сигнала в дискретные моменты времени kT_0 разрешенными дискретными уровнями $y^*[kT_0]$ (рис. 1.6).

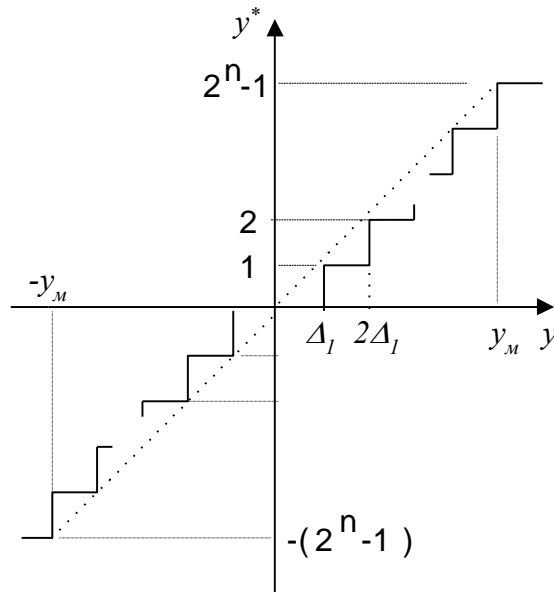


Рис. 1.5.

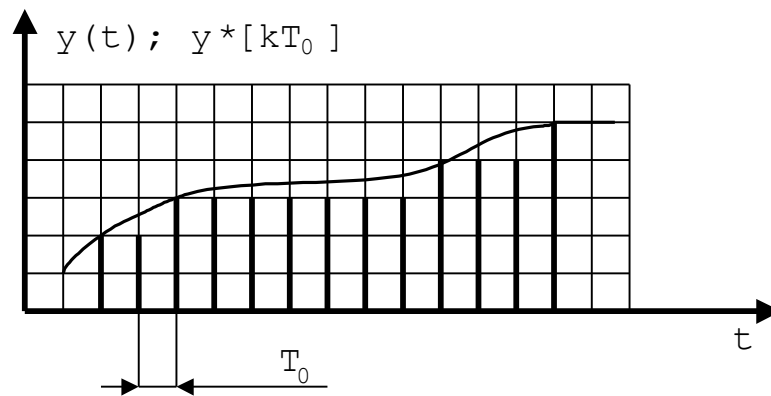


Рис. 1.6.

Кодирование состоит в преобразовании сигнала $y^*[kT_0]$ в цифровой код БЦВМ.

Преобразование сигналов во входных устройствах БЦВМ осуществляется с некоторым конечным быстродействием и вносит в цифровую систему некоторое временное запаздывание τ_1 , определяемое временем, необходимым для установления выходного сигнала преобразователя А/Ц с заданной точностью.

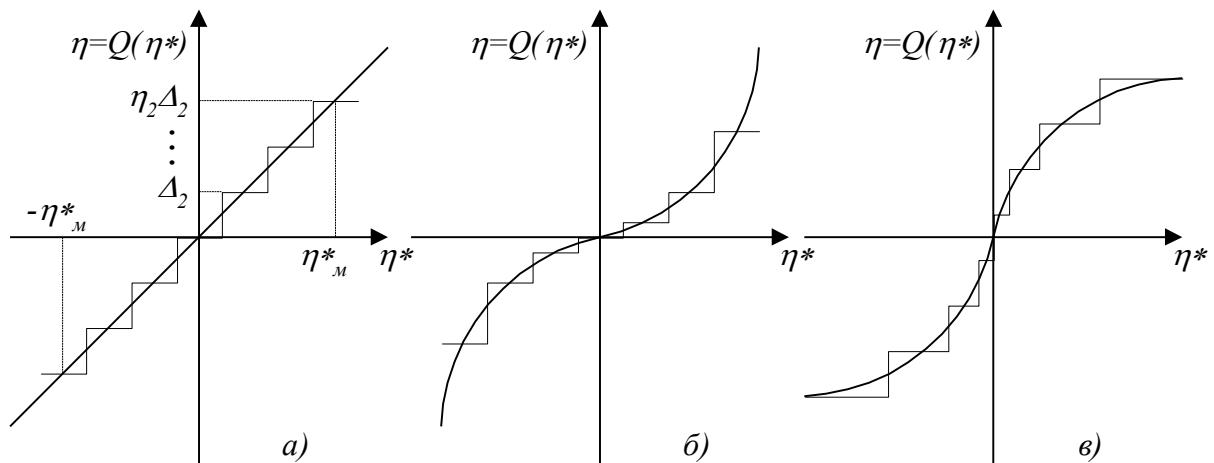
Цифровое вычислительное устройство в ЦАС в соответствии с заложенными в нем алгоритмами и программами (идентификации, фильтрации, управления) вычисляет сигнал ошибки $e[kT_0]$, сравнивая на каждом шаге величину $y^*[kT_0]$ с задающим воздействием $g^*[kT_0]$ на систему, и осуществляет соответствующее преобразование сигнала $e^*[kT_0]$ в сигнал $\eta^*[kT_0]$, являющийся цифровым представлением сигнала управления.

При управлении объектом непрерывного действия из сигнала $\eta^*[kT_0]$, представляющего собой короткие или в предельном случае — {бесконечно малой длительности импульсы, необходимо сформировать непрерывный управляющий сигнал $\eta(t)$. Для этой цели служат выходные преобразователи БЦВМ, являющиеся усилителями мощности, преобразующими цифровой код машины в аналоговые величины, мощность которых достаточна для управления исполнительными органами. Процесс преобразования цифрового кода в непрерывный сигнал обычно включает в себя две операции: декодирование и экстраполяцию.

Декодирование состоит в преобразовании числового кода в импульсный сигнал с амплитудно-импульсной модуляцией.

Экстраполяция заключается в преобразовании импульсного сигнала $\eta[kT_0]$ в аналоговый -сигнал $\eta(t)$.

Декодирование сопровождается квантованием сигналов по уровню в соответствии со статической характеристикой преобразователя Ц/А, изображенной на рис. 1.7 для случая скалярной переменной η . Его нелинейная характеристика $Q(\eta)$ может иметь в рабочем диапазоне (до насыщения) как



постоянный средний коэффициент передачи, так и переменный.

Рис. 1.7.

В первом случае имеет место *равномерное квантование*, при котором шаг квантования по уровню не зависит от величины преобразуемого сигнала (см. рис. 1.7, а). В этом случае число μ_2 уровней характеристики $Q(\eta)$ определяется соотношением $\mu_2 = 2^{N_2} - 1$, а ее «диапазон линейности» — соотношением $|\eta_{\max}| \leq \mu_2 \Delta_2$, где N_2 — число двоичных разрядов, а Δ_2 — цена младшего разряда выходного преобразователя БЦВМ. Обычно в БЦВМ $N_2 < N_1$.

В ряде случаев может потребоваться с большей точностью воспроизводить либо малые, либо, наоборот, большие уровни сигналов. Обоим этим случаям соответствует *неравномерное квантование* сигналов по уровню в преобразователе Ц/А, статические характеристики которого изображены на рис. 1.7, б, в.

Процесс декодирования дополнительно сопровождается некоторым временным запаздыванием τ_2 .

Экстраполяция, как правило, представляет собой фиксацию выходного сигнала БЦВМ на постоянном уровне в течение периода дискретности по времени T_0 . В ряде случаев для лучшего сглаживания выходных сигналов БЦВМ могут использоваться и другие виды экстраполяции — линейная, квадратичная и т. п. Кроме амплитудно-импульсной модуляции в выходных устройствах БЦВМ находят

Управление мехатронными системами

применение и другие виды импульсной модуляции: ШИМ, ЧИМ, ФИМ и т. п. Процесс преобразования сигналов в этих случаях также сопровождается квантованием сигналов по уровню и времени, а также временным запаздыванием.

Квантование сигналов по уровню, а также широтно-импульсная и времяимпульсная типы модуляции осуществляют нелинейные преобразования сигналов. Однако, учитывая высокую разрядность современных входных преобразователей (АЦП) и вычислителей, используемых для реализации алгоритма управления, влияние указанных нелинейностей на характеристики ЦАС в данном курсе не рассматривается. Основное внимание уделяется линейным системам с амплитудно-импульсной модуляцией, которые поддаются исследованию линейными методами.

ЛЕКЦИЯ № 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА КВАНТОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ. ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА.

План лекции:

1. Понятие решетчатой функции. Смещенная решетчатая функция.
2. Переход от непрерывной функции и обратно.
3. Математическое описание процесса квантования по времени.

Как указывалось выше, характерным этапом преобразования сигналов в ЦАС является процесс квантования этих сигналов по времени. В связи с этим процессы в дискретных системах, в отличие от непрерывных систем автоматического управления, описываются так называемыми решетчатыми функциями.

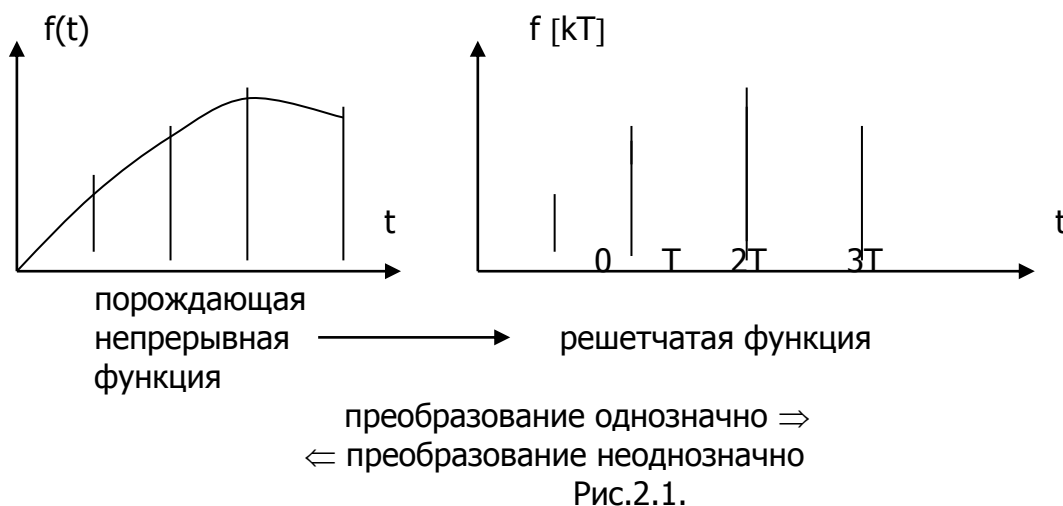
Решетчатая функция – это функция, значения которой определены лишь в некоторые, тактовые моменты времени (рис.2.1):

$$f[kT] = f(t); \quad t=kT, \quad k=0, 1, 2 \dots,$$

где: k - номер дискреты, T -период дискретизации.

Дискреты функции $f(t)$ могут быть также определены для смещенных моментов времени $t=kT + \varepsilon T$, где $0 \leq \varepsilon < 1$. Определяемая таким образом функция называется **смещенной решетчатой функцией**:

$$f[kT, \varepsilon T] = f(t); \quad t=kT + \varepsilon T, \quad k=0, 1, 2 \dots; \quad 0 \leq \varepsilon < 1.$$



Как и в непрерывных системах, исследование динамики дискретных систем может проводиться либо с использованием переменных состояния, либо с использованием входных и выходных переменных системы.

В первом случае исследование обычно проводят во временной области, рассматривая систему разностных уравнений и анализируя свойства ее решений. Указанный подход, и разработанные в его рамках методы, являются весьма

Управление мехатронными системами

плодотворными. Они позволяют рассматривать нелинейные многомерные дискретные системы, проводить исчерпывающее исследование их свойств, решать задачи синтеза в различной постановке.

Во втором случае исследуют не весь набор переменных состояния, а лишь поведение некоторых величин, по изменению которых и оценивается качество САУ – выходные переменные системы. В задачу исследования может входить анализ зависимости выходных переменных от входных величин, решение вопроса, как придать системе требуемые свойства по этим переменным. При этом для линейных импульсных систем наиболее простым и распространенным математическим аппаратом описания и исследования является аппарат дискретного преобразования Лапласа, позволяющий получить уравнение САУ в изображениях и найти дискретные передаточные функции.

Вспомним, чем же было удобно применение преобразования Лапласа к исследованию непрерывных систем?

Используя \mathcal{L} -преобразование, можно каждой преобразуемой по Лапласу функции $f(t)$ (оригиналу), поставить в соответствие функцию $F(s)$ комплексной переменной s (при этом $F(s)$ называется изображением).

Преобразование Лапласа обладает рядом замечательных свойств, например, дифференцированию оригинала $f(t)$ по переменной t соответствует операция умножения функции $F(s)$ на комплексную переменную s , а интегрированию оригинала $f(t)$ соответствует операция деления $F(s)$ на s . Таким образом, операции дифференцирования и интегрирования оригинала заменяются в пространстве изображений более простыми операциями алгебры – соответственно умножением и делением изображения $F(s)$ на s . Это позволяет дифференциальное уравнение, записанное относительно искомой функции $f(t)$, заменить в пространстве изображений на алгебраическое уравнение относительно изображения $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Решив это алгебраическое уравнение и найдя $F(s)$, получим изображение решения исходного дифференциального уравнения. Для определения самого решения можно воспользоваться обратным преобразованием Лапласа (\mathcal{L}^{-1} -преобразованием), устанавливающим связь между изображением $F(s)$ и ему соответствующим оригиналом $f(t)$. Во многих практических случаях при нахождении решения $f(t)$ можно воспользоваться таблицами соответствия “оригинал- изображение”.

Т.о. решение дифференциального уравнения сводится к схеме, приведенной на рис.2.2.

Управление мехатронными системами

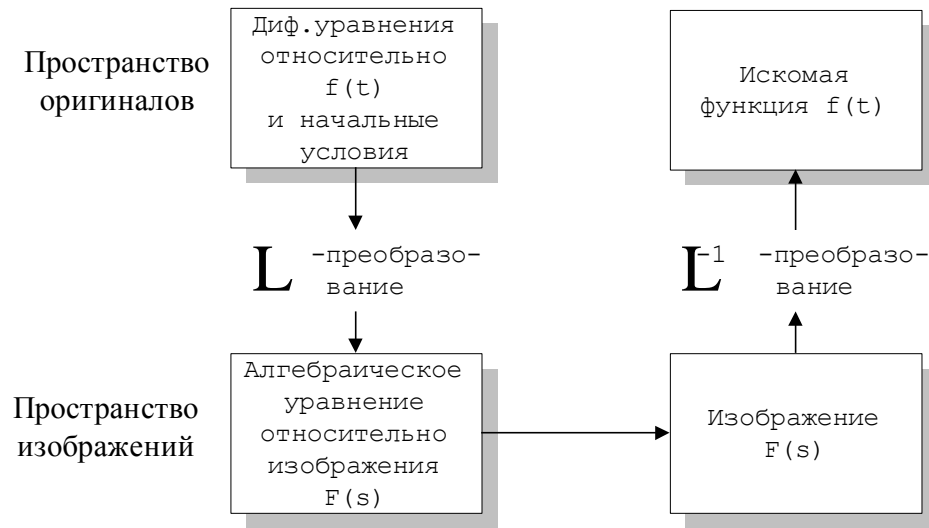


Рис. 2.2.

Функция, преобразуемая по Лапласу называется оригиналом. Пусть $f(t)$ -оригинал, а $F(p)$ - соответствующее ей изображение:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

где $p = c + j\omega$ - комплексная переменная, $c \geq \sigma_a$ - абсцисса абсолютной сходимости.

Обратное преобразование Лапласа (L^{-1}):

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt} dp$$

Рассмотрим теперь основы дискретного преобразования Лапласа и связь дискретного и непрерывного преобразований Лапласа.

Дискретным преобразованием Лапласа называется преобразование решетчатой функции $f[kT]$ в функцию $F^*(p)$ комплексного переменного p , определяемого соотношением:

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT] \cdot e^{-pkT}, \tag{2.1}$$

где $p = c + j\omega$; $f[kT]$ - решетчатая функция (оригинал); $F^*(p)$ -изображение.

Для обозначения операции дискретного преобразования Лапласа используется символ D :

$$F^*(p) = D\{f[kT]\}.$$

Дискретное преобразование Лапласа можно трактовать как обычное преобразование непрерывной функции $f(t)$, модулирующей периодическую последовательность δ -функций:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT).$$

Обозначим результат этой модуляции через $f_T(t)$:

$$f_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - kT)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} L\{f_T(t)\} &= \int_0^{\infty} f_T(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - kT) e^{-pt} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) \delta(t - kT) e^{-pt} dt = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT] e^{-pkT} = F^*(p) = \\ &= D\{f[kT]\}. \end{aligned}$$

Для смещенной решетчатой функции $f[k, \varepsilon]$ имеем:

$$F^*(p, \varepsilon) = D\{f[k, \varepsilon]\} = \sum_{k=0}^{\infty} f[k, \varepsilon] \cdot e^{-pkT}.$$

Из формулы (2.1) непосредственно следует, что изображение решетчатой функции является периодическим с чисто мнимым периодом:

$$\frac{2\pi j}{T},$$

в силу периодичности экспоненциальной функции. Таким образом:

$$F^*\left(p + \frac{2\pi j}{T} n\right) = F^*(p), \quad n=0,1,2,\dots$$

Вследствие этого, обычно изображение $F^*(p)$ рассматривают в полосе частот:

$$-\frac{\pi}{T} < \text{Im } p \leq \frac{\pi}{T},$$

которая называется основной полосой.

Изображение $F^*(p)$ решетчатой функции $f[kT]$, связано с изображением $F(p)$ порождающей непрерывной функции $f(t)$ следующей зависимостью:

$$F^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(p + j \frac{2\pi}{T} m\right) + \frac{f(0)}{2},$$

для сокращенной записи которой, используют следующее обозначение:

$$F^*(p) = \bar{D}\{F(p)\}.$$

Связь между изображениями $F^*(p)$ и $F(p)$ может быть выражена другой, более удобной для непосредственного использования, зависимостью:

$$F^*(p) = \sum_{i=1}^r \text{Res}F(s) \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(p-s)}} \Big|_{s_i} = \sum_{i=1}^r \text{Res}F(s) \frac{z}{z - e^{TS}} \Big|_{s_i}$$

где:

$s_i, \quad i = 1 \dots, r$ — полюсы изображения $F(s), Z = e^{pT}$.

Для смещенного оригинала имеем:

$$F(p, \varepsilon) = \bar{D}\{F(p)\} \Big|_{e^{pT} = z} = \sum_{i=1}^r \text{Res}F(s) \frac{e^{\varepsilon s}}{1 - e^{TS} \cdot z^{-1}} \Big|_{s=s_i},$$

Управление мехатронными системами

здесь $0 \leq \varepsilon < 1, S_i, i = 1, \dots, r$ – полюсы изображения $F(s)$.

В инженерных расчетах импульсных систем наибольшее распространение получило так называемое **Z-преобразование**, получающееся из (2.1) заменой $Z = e^{pT}$:

$$F(z) = Z\{f[kT]\} = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT]z^{-k}. \quad (2.2)$$

Для смещенной решетчатой функции:

$$F(z, \varepsilon) = Z\{f[kT, \varepsilon E]\} = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT, \varepsilon T]z^{-k}. \quad (2.3)$$

Преобразование (2.3) - называется модифицированным Z-преобразованием.

С учетом (2.1) и (2.2), Z-изображение получается как результат применения к оригиналу $f[kT]$ или изображению $F(p)$, D или, соответственно - \bar{D} , преобразования с последующей заменой $e^{pT} = Z$.

Для смещенного оригинала имеем:

$$F(z, \varepsilon) = \bar{D}\{F(p)\} \Big|_{e^{pT}=z} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(p + j \frac{2\pi}{T} m\right) e^{\left(p + j \frac{2\pi}{T} m\right) \varepsilon} \Big|_{e^{pT}=z} + \frac{f(0)}{2}.$$

Для Z-преобразования несмещенной функции получим:

$$F(z) = \frac{f(0)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(p + j \frac{2\pi}{T} m\right) \Big|_{e^{pT}=z}.$$

ЛЕКЦИЯ № 3

СВОЙСТВА Z- ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

План лекции:

1. Свойства линейности.
2. Смещение аргумента решетчатой функции.
3. Изображение разностей.
4. Свертка оригиналов.
5. Начальное и конечное значения решетчатой функции.

При использовании Z-преобразования важную роль играют теоремы, устанавливающие связь между операциями с оригиналами и изображениями. Приведем формулировки основных теорем:

Теорема 1 *Линейность Z-преобразования.*

$$Z\left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i[kT]\right\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i Z\{f_i[kT]\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(z).$$

Теорема 2 *Смещение аргумента решетчатой функции.*
(теорема о запаздывании, упреждении.)

$f[k - m]$ -запаздывание на m -тактов.

$f[k + m]$ -упреждение на m -тактов.

Рассмотрим преобразование:

$$Z\{f[(k - m)T]\}.$$

Введем обозначение: $r = k - m$, тогда:

$$\begin{aligned} Z\{\dots\} &= \sum_{r=-m}^{\infty} f[rT] \cdot z^{-(m+r)} = z^{-m} \left[\sum_{r=0}^{\infty} f[rT] z^{-r} + \sum_{r=-m}^{-1} f[rT] z^{-r} \right] = \\ &= z^{-m} F(z) + z^{-m} \cdot \sum_{r=-m}^{-1} f[rT] \cdot z^{-r} \end{aligned}$$

если значение решетчатой функции равно 0 при отрицательных значениях аргумента, то:

$$Z\{f[(k - m)T]\} = z^{-m} F(z).$$

Аналогично для случая упреждения:

$$Z\{f[(k + m)T]\} = z^m F(z).$$

Теорема 3 *Изображение разностей.*

Первая обратная разность:

$$\nabla f[kT] = f[kT] - f[(k - 1)T]$$

На основании предыдущей теоремы:

$$z\{\nabla f[kT]\} = F(z) - z^{-1}F(z) = \frac{z - 1}{z} F(z).$$

Для обратной разности m -ого порядка:

$$z\{\nabla^m f[kT]\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^m F(z)$$

Для прямой разности:

$$\begin{aligned} \Delta f[kT] &= f[(k+1)T] - f[kT]; \\ z\{\Delta f[kT]\} &= (z-1)F(z) - zf[0]; \\ z\{\Delta^n f[kT]\} &= (z-1)^n F(z). \end{aligned}$$

Последнее выражение записано в предположении, что $f[kT] = 0$ для всех $0 \leq k < n$.

Теорема 4 \bar{D} преобразование произведения изображений непрерывной и решетчатой функции.

$$\bar{D}\{F_1(p) \cdot F_2^*(p)\} = \bar{D}\{F_1(p)\} \cdot F_2^*(p) = F_1^*(p)F_2^*(p)$$

Теорема 5 **Конечное значение решетчатой функции.**

Предварительно определим сумму ординат решетчатой функции:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] \cdot z^{-k}$$

Положим $z = 1$, отсюда: $F(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k]$

Далее, учитывая, что

$$z\{\Delta f[k]\} = (z-1)F(z) - z \cdot f(0),$$

найдем сумму ординат решетчатой функции:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta f[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) - f(0)$$

с другой стороны:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta f[k] = \lim_{k \rightarrow \infty} f[k] - f[0]$$

Приравнявая правые части уравнений получим:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z).$$

Теорема 6 **Начальное значение решетчатой функции.**

Напомним, что первая прямая разность определяется выражением:

$$\Delta f[k-1] = f[k] - f[k-1].$$

Тогда:

$$\begin{aligned} z\{\Delta f[k-1]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta f[k-1] \cdot z^{-k} = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta f[k-1] z^{-(k-1)} = \\ &= z^{-1} \{(z-1)(F(z)) - z \cdot f[0]\} = \frac{z-1}{z} F(z) - f[0]; \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь предел выражения:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \{ \Delta f[k-1] \} = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta f[k-1] \cdot z^{-k} = 0;$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} F(z) = f[0].$$

Приведенные зависимости являются аналогами для нахождения конечного и начального значений непрерывной функции $f[t]$ по ее изображению Лапласа:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

Теорема 7 Свертка решетчатой функции.

$$Z \left\{ \sum_{m=0}^k f_1[k-m] f_2[m] \right\} = Z \{ f_1[k] \} \cdot Z \{ f_2[k] \} = F_1(z) \cdot F_2(z).$$

Наряду с прямым дискретным преобразование при анализе цифровых систем управления широкое применение находит и обратное дискретное преобразование Лапласа определяемое формулой:

$$f[kT] = \frac{T}{j2\pi} \int_{c-j\frac{\pi}{T}}^{c+j\frac{\pi}{T}} F^*(p) e^{pkT} dp, \quad (3.1)$$

где $c > \sigma_a$, σ_a - абсцисса абсолютной сходимости оригинала $f[kT]$.

Замена $e^{pT} = z$ преобразует отрезок интегрирования в плоскости "P" в окружность $|z| = e^{cT}$ плоскости "Z". При этом выражение (3.1) трансформируется в формулу обращения Z-преобразования:

$$f[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(z) z^{k-1} dz \quad (3.2)$$

где: $c : |z| = e^c, c > \sigma_a$.

Пояснения:

$$z = e^{pT}, \quad dz = T e^{pT} dp;$$

$$dp = dz \cdot \frac{1}{T} z^{-1}$$

Выражения (3.1), (3.2) достаточно сложные и непосредственно применяются редко, т.к. существуют более простые способы вычисления решетчатых функций.

Применяя для вычисления контурного интеграла (3.2) теорию вычетов, получим:

$$f[k] = \sum_i Res F(z) \cdot z^{k-1} |_{z = z_i} \quad (3.3)$$

где z_i - особые точки подынтегрального выражения. Обычно F(z)-дробно-рациональная функция, и тогда выражение (3.3) может быть доведено до конечных зависимостей:

Управление мехатронными системами

$$F(z) = \frac{p(z)}{Q(z)}; \quad \text{Res}F(z_i) = \frac{p(z_i)}{Q'(z_i)}; \quad Q'(z_i) = \frac{dQ(z)}{dz}.$$

Обратное Z-преобразование можно вычислять также и методом степенных рядов. Запишем формулу Z-преобразования в виде:

$$F(z) = f[0] + f[1] \cdot z^{-1} + \dots + f[k] \cdot z^{-k} + \dots$$

Тогда вычисление обратного Z-преобразования сводится к определению коэффициентов разложения $F(z)$ в ряд Лорана.

Преимущество метода степенных рядов заключается в том, что при этом не требуется находить полюса $F(z)$. Если $F(z)$ -дробно-рациональная функция, то значения $f[k]$ находятся делением полинома числителя на полином знаменателя.(см. пример).

Недостаток метода состоит в том, что вычисления ведутся по рекуррентной процедуре. Кроме того, алгоритм деления многочлена при реализации на ЭВМ может приводить к накоплению вычислительных ошибок.

ЛЕКЦИЯ № 4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОСНОВНЫХ СТРУКТУР ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

План лекции:

1. Импульсный элемент и его уравнения.
2. Идеальный импульсный элемент.
3. Формирующее звено.
4. Экстраполятор нулевого порядка.

Простейшую ИС можно представить в виде соединения импульсного элемента (ИЭ) и непрерывной части (рис.4.1).

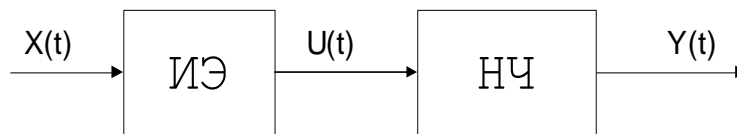


Рис.4.1

Рассмотрим амплитудно-импульсный элемент (АИЭ), представляющий собой устройство, на выходе которого в момент времени $t=0, T, 2T...$ наблюдается последовательность импульсов произвольной формы с амплитудами, пропорциональными дискретам входного сигнала $X[nT]$ (рис.4.2).

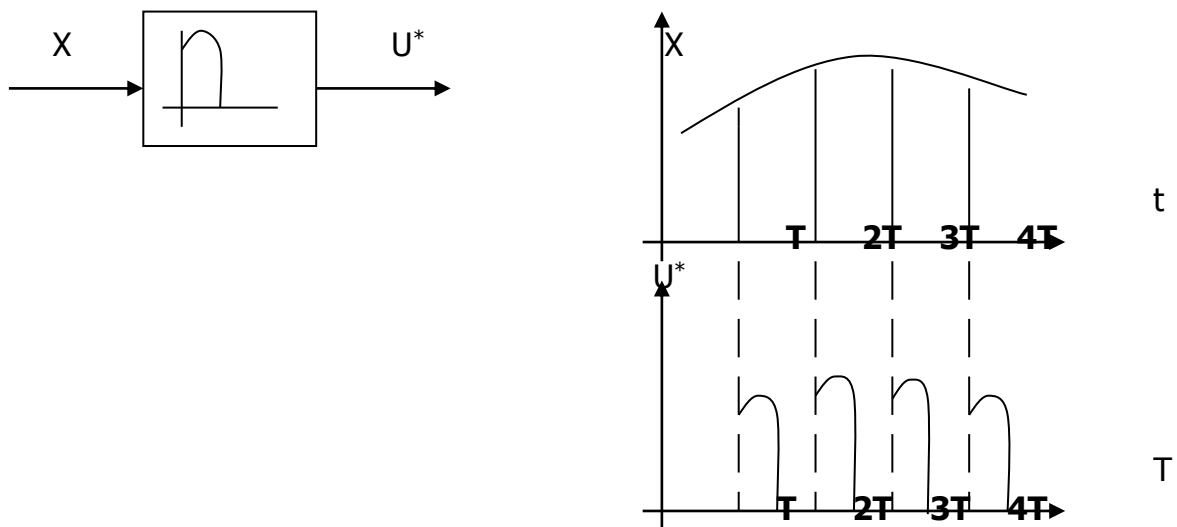


Рис. 4.2

Пусть функция $S(t)$ – задает форму импульса на выходе ИЭ, соответствующего единичной дискрете входного сигнала, приложенной в момент времени $t=0$. Тогда, в силу свойства линейности, дискрете $X[nT]$ соответствует импульс:

$$U(t) = X[nT] \cdot S(t-nT). \quad (4.1)$$

Сдвиг аргумента t на nT объясняется тем, что импульс возникает при $t=nT$ и не раньше.

При математическом описании ИЭ оказывается удобным понятие ИИЭ. Под идеальным ИЭ понимают звено, выходная величина $X^*(t)$ которого, представляет

Управление мехатронными системами

собой последовательность δ -функций с площадями равными дискретам входной величины $X[nT]$.

Определим реакцию на дискрету $X[nT]$ последовательного соединения ИИЭ и непрерывного звена с импульсной переходной функцией $S(t)$:

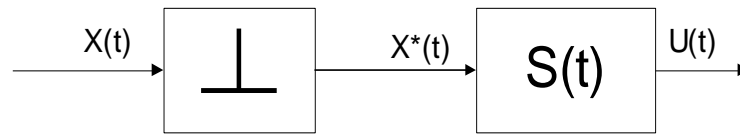


Рис.4.3.

$$\text{При этом: } X^*(t) = X[nT] \cdot \delta(t - nT).$$

Пройдя через непрерывное звено, дельта-функция в силу свойства импульсной переходной характеристики развернется в сигнал $S(t - nT)$ и, таким образом, на выходе цепочки будет получена функция :

$$U(t) = X[nT] \cdot S(t - nT), \tag{4.2}$$

совпадающую с функцией (2.1). Отсюда следует, что ИЭ с произвольной формой импульса $S(t)$ можно представить как последовательное соединение ИИЭ и непрерывного звена с импульсной переходной функцией $S(t)$. Это непрерывное звено может быть задано своей передаточной функцией (ПФ):

$$S(p) = L\{S(t)\}. \tag{4.3}$$

Такое звено называют формирующим звеном или экстраполятором. Его обычно присоединяют к непрерывной части системы. Т.о. в линейной импульсной системе с одним ИЭ можно выделить идеальный ИЭ и непрерывную часть.

Рассмотрим ИИЭ. В соответствии с определением, уравнение, связывающее входной $X(t)$ и выходной $X^*(t)$ сигналы для произвольного момента времени, имеет вид:

$$\begin{aligned} X^*(t) &= X(0) \cdot \delta(t) + X[T] \cdot \delta(t - T) + \dots \\ &+ X[nT] \cdot \delta(t - nT) + \dots = X(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Т.е. выходная переменная есть последовательность δ -функций, пропорциональных входным сигналам. При этом:

$$\begin{aligned} L[X^*(t)] &= \int_0^{\infty} x(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \cdot e^{-pt} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x[nT] \cdot e^{-pnT} = x^*(p) = x(e^{pT}) = x(z) \Big|_{z=e^{pT}}. \end{aligned}$$

Т.е. преобразование Лапласа выходной величины ИИЭ равно дискретному преобразованию Лапласа решетчатой функции $x^*[nT]$.

Связь между изображениями непрерывной $x(t)$ и решетчатой $x[nT]$ функцией устанавливается зависимостью:

$$x^*(p) = \frac{x(0)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x\left(p + jm \frac{2\pi}{T}\right) \tag{4.5}$$

Управление мехатронными системами

В итоге ИИЭ может быть описан зависимостями (4.4) и (4.5). Первая зависимость устанавливает связь между входной непрерывной величиной $x(t)$ и выходной величиной $x^*(t)$, вторая – между соответствующими изображениями.

В отличие от обычных элементов, для ИИЭ не существует понятия передаточной функции как отношения изображений входной и выходной величины.

Формирующее звено порождает из δ -импульсов ИИЭ последовательность физических импульсов, характерную для данного вида устройств. Для определения его передаточной функции $s(p)$ необходимо найти весовую характеристику $s(t)$ (форму импульса) и взять от нее преобразование Лапласа. Так, если выходная последовательность импульсов имеет вид, представленный на рис.4.3, то передаточная функция формирователя будет следующая:

$$s(p) = L\{s(t)\}$$

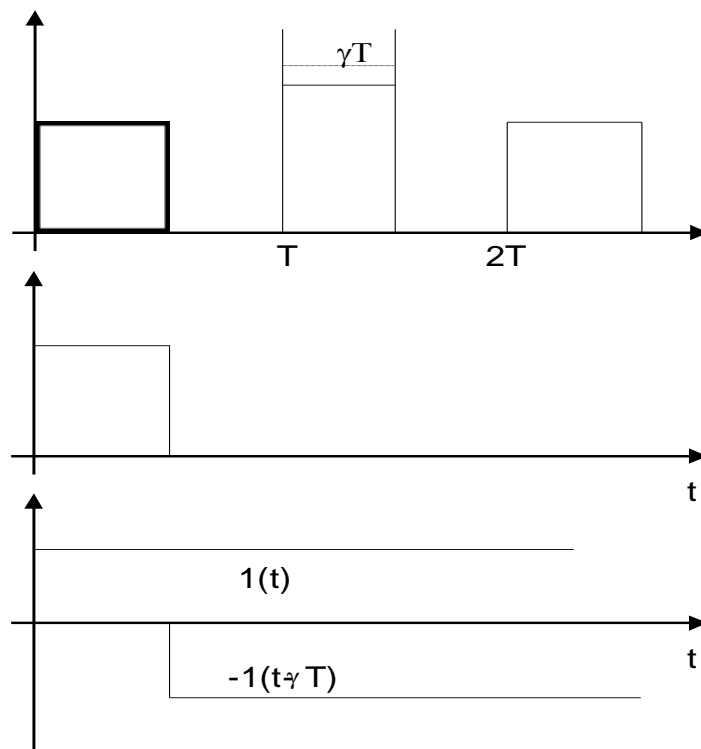


Рис.4.3

Как видно из приведенного рисунка форма импульса $s(t)$ может быть получена в результате разности двух ступенчатых функций:

$$s(t) = 1(t) - 1(t - \gamma T)$$

Преобразование Лапласа, соответственно:

Управление мехатронными системами

$$\begin{aligned}
 s(p) &= \int_0^{\infty} [I(t) - I(t - \gamma T)] e^{-pt} dt = -\frac{I}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{I}{p} e^{-pt} \Big|_{\gamma T}^{\infty} = \\
 &= \frac{I}{p} - \frac{I}{p} e^{-\gamma T p} = \frac{I - e^{-\gamma T p}}{p}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$s(p) = K_u \frac{1 - e^{-pT\gamma}}{p}$$

где K_u - коэффициент пропорциональности амплитуды выходного импульса и соответствующей дискреты входного сигнала.

Если выходная величина АИЭ остается постоянной в течение всего интервала квантования T , то соответствующее формирующее звено называется экстраполятором нулевого порядка. Его передаточная функция имеет вид:

$$s(p) = K_u \frac{1 - e^{-pT}}{p}$$

В дальнейшем будем считать $K_u = 1$

ЛЕКЦИЯ №5

УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

План лекции:

1. Приведенная непрерывная часть системы.
2. Уравнения разомкнутой импульсной системы.
3. Z-передаточные функции разомкнутых импульсных систем.

5.1. Уравнения разомкнутой импульсной системы.

Рассмотрим разомкнутую ИС, состоящую из АИЭ и непрерывной части. Ранее было показано, что ИЭ может быть представлен в виде последовательного соединения ИИЭ и ФЗ. Т.о. ИС всегда может быть приведена к соединению ИИЭ и непрерывных звеньев, как это показано на рис.5.1.

При таком представлении используют понятие приведенной непрерывной части, состоящей из собственно непрерывной части, соединенной с формирователем импульсного элемента. Ее ПФ определяется выражением:

$$W(p) = s(p) \cdot W_{НЧ}(p)$$

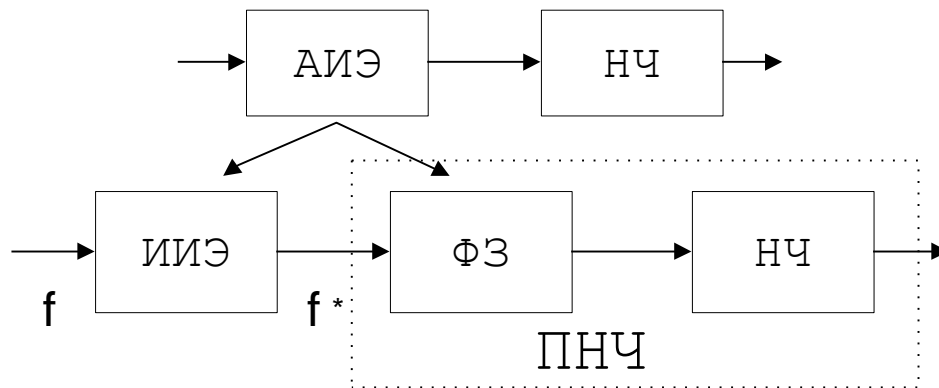


Рис. 5.1.

Приведенная непрерывная часть может также исчерпывающим образом характеризоваться своей весовой функцией $\omega(t)$:

$$W(p) = L\{\omega(t)\}.$$

В соответствии с определением ИИЭ имеем:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT] \cdot \delta(t - kT).$$

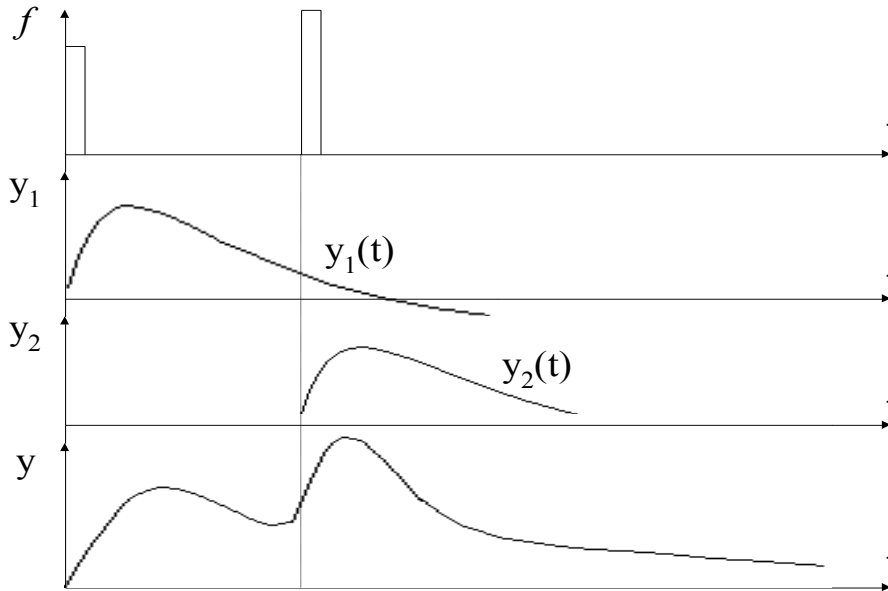
Выходной сигнал $y(t)$ в силу линейности можно рассматривать как сумму реакций приведенной непрерывной части на модулированную последовательность δ -функций (рис.5.2).

Управление мехатронными системами

Так как реакция системы на δ -функцию представляет собой весовую характеристику $\omega(t)$ этой системы, то для выходной переменной получим зависимость:

$$y(t) = \sum_{k=0}^n f[kT] \cdot \omega(t - kT) \quad , \quad nT \leq t < (n+1)T \quad (5.1)$$

Рис.5.2.



$$y(t) = f[0] \cdot \omega(t) + f[1] \cdot \omega(t - T) + \dots + f[n] \cdot \omega(t - nT),$$

причем, $nT \leq t < (n+1)T$.

Изменение верхнего предела суммирования объясняется необходимостью учитывать при определении реакции системы лишь импульсы, предшествующие данному моменту времени. Рис. 5.3 поясняет формулу.

В дискретные моменты съема сигнала ($t=nT$), при нулевых начальных условиях, будем иметь:

$$y[nT] = \sum_{k=0}^n f[kT] \omega[(n-k)T]. \quad (5.2)$$

Зависимость (5.2) представляет собой уравнение движения системы во временной области. Получим теперь уравнение системы в изображениях. Применяя к зависимости (5.2) Z-преобразование, будем иметь:

$$y(z) = F(z) \cdot W(z), \quad (5.3)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} y(z) &= z\{y[nT]\}; \\ W(z) &= z\{\omega[nT]\}; \\ F(z) &= z\{f[nT]\}. \end{aligned}$$

Определим Z-передаточную функцию импульсной системы как отношение Z-изображения выходной величины при нулевых начальных условиях:

Управление мехатронными системами

$$W(z) = \frac{y(z)}{F(z)} = \frac{z\{y[nT]\}}{z\{t[nT]\}}. \quad (5.4)$$

$$W(z) = z\{\omega[nT]\}. \quad (5.5)$$

Z - ПФ характеризует связь между входом и выходом только в тактовые моменты времени.

Из уравнения (5.5) следует, что Z-передаточная функция разомкнутой системы равна Z-преобразованию весовой характеристики $\omega[nT]$ приведенной НЧ.

Итак, в соответствии с (5.3), можно записать:

$$W(z) = z\{\omega[nT]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega[nT] \cdot z^{-n} = L\{\omega(t)\delta_T(t)\} \quad (5.5)$$

Напомним, что $\delta_T(t)$ представляет собой последовательность δ -функций:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Иногда возникает необходимость в определении реакции системы в смещенные дискретные моменты времени $t = nT + \varepsilon T$, где $n=0,1,\dots$

$$0 \leq \varepsilon < 1.$$

В этом случае в зависимость для расчета реакции системы $y(z)$ (5.2):

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT] \cdot \omega(t - kT)$$

подставляют: $t = nT + \varepsilon T$:

$$y[nT + \varepsilon T] = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT] \cdot \omega[(n - k)T + \varepsilon T]$$

Переходя к уравнению в изображениях, получают:

$$y(z, \varepsilon) = F(z) \cdot W(z, \varepsilon) \quad (5.6)$$

Здесь изображения $y(z, \varepsilon)$, $W(z, \varepsilon)$ соответствуют модифицированному Z-преобразованию решетчатых функций $y[z]$, $\omega[n]$

$$W(z, \varepsilon) = \frac{y(z, \varepsilon)}{F(z)}.$$

При изменении ε от 0 до 1 зависимость (5.6) позволяет определить значение выходной величины в любой промежуточный момент времени.

5.2. Вычисление Z-передаточной функции разомкнутой дискретной системы.

Рассмотрим вычисление Z-передаточной функции простейшего соединения, показанного на рис. 5.3.

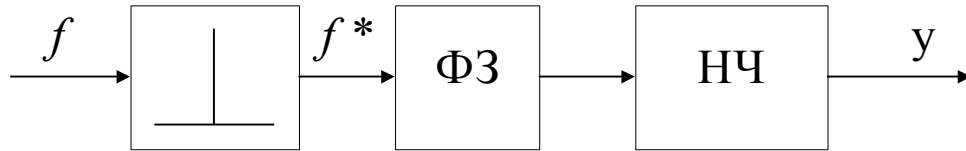


Рис.5.3.

В соответствии с зависимостью (2.12) и свойствами Z-преобразования Z-ПФ $W(z)$ может быть найдена непосредственно из преобразования Лапласа весовой функции ПНЧ, или по ее передаточной функции $W(p)$.

Существует несколько способов получения Z-передаточной функции систем:

1. Прямой – с использованием Z-преобразования по весовой характеристике $\omega(t)$.

2. С использованием \bar{D} - преобразования устанавливающего связь между $W(s)$ - ПФ непрерывной системы и $W(z)$ - Z-ПФ.

$$W(z) = \sum_{i=1}^n Res W(s) \frac{1}{1 - e^{-T(p-s)}} \Big|_{s_i}$$

с последующей заменой $e^{Tp} \rightarrow z$.

Для $W(s)$ – дробно-рациональной функции, т.е., когда $W(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ и корни

$B(s)$ простые, предыдущее выражение трансформируется:

$$W(z) = \sum_{i=1}^n \frac{A(s_i)}{B'(s_i)} \frac{z}{z - e^{s_i T}}, \quad (5.7)$$

$$B'(s) = \frac{dB(s)}{dS}.$$

В случае если необходимо определить Z- ПФ для расчета значений выходной переменной в промежуточные значения по времени используют модифицированное Z- преобразование:

$$W(z, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n Res W(s) \cdot \frac{z \cdot e^{s \varepsilon T}}{z - e^{s T}} \Big|_{s_i} \quad 0 \leq \varepsilon < 1 \quad (5.8)$$

Для простых полюсов $B(s)$, аналогично:

$$W(z, \varepsilon) = \sum \frac{A(s_i)}{B'(s_i)} \cdot \frac{z \cdot e^{s_i \varepsilon T}}{z - e^{s_i T}} \quad (5.9)$$

Рассмотрим пример использования вычетов для определения ПФ $w(z)$:

Задана ПФ $W(p) = \frac{1}{p}$, найти $W(z)$?

$$W(z) = \text{Res} \frac{z}{z - e^{Ts}} \Big|_{s=0} = \frac{z}{z - 1} \Big|_{s=0}$$

Известен набор наиболее часто используемых $W(p)$, естественно предположить, что преобразование $W(p) \rightarrow W(z)$ для указанных $W(p)$ уже найдены и сведены в таблицы соответствия (таблица 5.1).

Таблица 5.1.

№	$W(p)$	$W(z)$
1	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z - 1}$
2	$\frac{1}{p + \alpha}$	$\frac{z}{z - d}, \quad d = e^{-\alpha T}$
3	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$\frac{Tzd}{(z - d)^2}, \quad d = e^{-\alpha T}$
4	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
5	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$

3. Итак, третий путь заключается в использовании таблиц соответствия.

Так как \bar{D} -преобразование обладает свойством линейности, то в случае, если $W(p)$ - дробно-рациональное выражение, вычисление Z- ПФ можно производить следующим образом:

3.1. ПФ $W(p)$ необходимо разложить на простейшие дроби:

$$W(p) = W_1(p) + \dots + W_2(p)$$

3.2. Для каждой простейшей дроби $W_i(p)$ $i = 1, 2, \dots, r$ с помощью таблицы

\bar{D} определяют \bar{D} - преобразование:

$$W_i(z) = \bar{D}\{W_i(p)\}, i = 1, r$$

3.3. По теореме линейности \bar{D} - преобразование определяют искомую Z- ПФ:

$$W(z) = W_1(z) + \dots + W_2(z).$$

Полученные зависимости справедливы для случая, когда $W(p)$ есть дробно-рациональная функция переменной p . Однако ПФ ПНЧ:

$$W(p) = s(p) \cdot W_{нч}(p),$$

включает в себя и ПФ $s(p)$ - ПФ фиксирующего звена. Наиболее часто в дискретных системах в качестве ФЗ используется экстраполятор нулевого порядка, передаточная функция которого имеет вид:

$$s(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}.$$

Таким образом $s(p)$ и $W(p)$ в целом не являются дробно-рациональными функциями. Рассмотрим этот случай и определим для него порядок нахождения Z- ПФ $W(z)$.

Допустим, что ПФ непрерывной части по-прежнему является дробно-рациональной функцией:

$$W_{нч}(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

где, $B(p)$ -многочлен n -ой степени.

Пусть p_1, \dots, p_n -простые полюсы $W_{нч}(p)$

$$W(z) = \bar{D} \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p} W_{нч}(p) \right\} \Big|_{e^{Tp}=z}.$$

В соответствии со свойствами \bar{D} -преобразования, множитель:

$$1 - e^{-Tp} = 1 - z^{-1} = \frac{z - 1}{z}$$

может быть вынесен за знак преобразования. Тогда:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{z - 1}{z} \bar{D} \left\{ \frac{1}{p} W_{нч}(p) \right\} \Big|_{e^{Tp}=z} = \\ &= \frac{z - 1}{z} \sum_{i=1}^{n+1} Res \left[W(s) \frac{1}{s} \right] \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(p-s)}} \Big|_{s_i} \end{aligned}$$

Можно воспользоваться также известной формулой разложения $W_{нч}(p)$ на простейшие дроби

$$W_{нч}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \frac{1}{p - p_i},$$

тогда:

Управление мехатронными системами

$$\begin{aligned}
 W(z) &= \overline{D} \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \frac{1}{p - p_i} \right\} = \\
 &= (1 - z^{-1}) \overline{D} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \frac{1}{p(p - p_i)} \right\} = \\
 &= \frac{z - 1}{z} \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \cdot \overline{D} \left\{ \frac{1}{p(p - p_i)} \right\}
 \end{aligned}$$

Найдем преобразование:

$$\overline{D} \left\{ \frac{1}{p(p - p_i)} \right\}.$$

Очевидно, что:

$$\frac{1}{p(p - p_i)} = \frac{1}{p_i} \left(\frac{1}{p - p_i} - \frac{1}{p} \right).$$

Пользуясь таблицей \overline{D} преобразования, с учетом теоремы линейности, получим:

$$\overline{D} \left\{ \frac{1}{p(p - p_i)} \right\} = \frac{1}{p_i} \left[\frac{z}{z - e^{p_i T}} - \frac{z}{z - 1} \right] = \frac{1}{p_i} \frac{z(e^{p_i T} - 1)}{(z - e^{p_i T})(z - 1)}.$$

Окончательное выражение для расчета $W(z)$:

$$\begin{aligned}
 W(z) &= \frac{z - 1}{z} \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \frac{1}{p_i} \frac{z(e^{p_i T} - 1)}{(z - e^{p_i T})(z - 1)} = \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i) p_i} \frac{e^{p_i T} - 1}{z - e^{p_i T}}
 \end{aligned}$$

ЛЕКЦИЯ № 6**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ Z- ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ В ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ.**

План лекции:

1. Свойства Z- передаточных функций (ПФ).
2. Пример получения Z-ПФ дискретной системы.
3. Определение процессов в импульсных системах.
4. Примеры расчета процессов в дискретных системах.

6.1.Свойства Z-ПФ.

1.Z-ПФ есть дробно-рациональная функция переменного Z. При использовании модифицированного Z-преобразования числитель этой функции зависит от ε , причем всегда соблюдается условие физической реализуемости (степень числителя не превосходит степень знаменателя).

2.Полюсы $z_i, i = \overline{1, n}$ Z-ПФ $w(z)$ и $w(z, \varepsilon)$ связаны с полюсами S_j ПФ НЧ соотношениями:

$$z_i = e^{s_i T}, i = 1, 2, \dots, n \quad (6.1)$$

3.Степень знаменателя $W(z)$ (порядок дискретной ПФ) равна степени полинома знаменателя исходной ПФ:

$$W(z) = \sum_{i=1}^n c_i \frac{z}{z - e^{s_i T}}$$

4. Функция $W(z)$ конечна при $z=1$, если ПФ $W(p)$ не имеет полюсов в начале координат. При $z \rightarrow 1$ $W(z)$ стремится к вещественному числу.

Пример №5.1:

Найдем Z-ПФ разомкнутой дискретной системы, состоящей из АИЭ с экстраполятором нулевого порядка и непрерывной части с ПФ $W_{нч}(p) = \frac{k}{T_i p + 1}$.

Решение:

$$\text{ПФ ПНЧ: } W(p) = \frac{k(1 - e^{-Tp})}{p(T_i p + 1)}$$

Воспользуемся вычетами для определения $W(z)$:

$$\begin{aligned}
 W(z) &= k \frac{z-1}{z} \sum \operatorname{Res} \frac{1}{s(T_1 s + 1)} \frac{1}{1 - e^{-T(p-s)}} \Big|_{s_i} = \\
 &= k \frac{z-1}{z} \left\{ \sum_{\substack{s_i=0 \\ s_i=-1/T_1}} \frac{1}{2T_1 s + 1} \frac{1}{1 - e^{-T(p-s)}} \right\} = \\
 &= k \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{z}{z-1} + (-1) \frac{z}{z - e^{-T/T_1}} \right\} = k \left\{ 1 - \frac{z-1}{z - e^{-T/T_1}} \right\} = \\
 &= \frac{k \left(1 - e^{-T/T_1} \right)}{z - e^{-T/T_1}}
 \end{aligned}$$

В случае, если воспользоваться разложением $W_{\text{нч}}(s)$ на простые дроби:

$$\begin{aligned}
 W(z) &= \frac{A(p_1) e^{p_1 T} - 1}{B'(p_1) z - e^{p_1 T}} \\
 W(z) &= \frac{k}{T_1} \frac{1}{(-1/T_1)} \frac{e^{-T/T_1} - 1}{z - e^{-T/T_1}} = \frac{k \left(1 - e^{-T/T_1} \right)}{z - e^{-T/T_1}}; \quad p_1 = -1/T_1' \\
 W(z) &= \sum_i \frac{A(s_i)}{B'(s_i)} \frac{z e^{\varepsilon T s_i}}{z - e^{T s_i}}.
 \end{aligned}$$

6.2. Определение процессов в импульсных системах с помощью Z-преобразования.

Если известны ПФ импульсной системы $W(z)$ и изображения входного сигнала $F(z)$, то процесс на выходе системы может быть найден по формуле обратного Z-преобразования:

$$y[kT] = Z^{-1} \{ F(z) \cdot W(z) \}.$$

Обратное Z-преобразование можно определить с помощью вычетов:

$$y[kT] = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} \{ F(z) \cdot W(z) \} z^{k-1} \Big|_{z=z_i},$$

где z_i - полюсы функций, стоящих под знаком обратного преобразования.

Управление мехатронными системами

Для вычисления обратного Z-преобразования могут быть использованы рассмотренные выше методы степенных рядов (разложение в ряд Лорана, деление многочлена на многочлен и т. д.)

Наконец, по известной Z-ПФ, достаточно просто составить соответствующее разностное уравнение импульсной системы.

Пусть

$$W(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j z^j}{\sum_{i=0}^n b_i z^i} \quad m \leq n$$

Но, так как

$$W(z) = \frac{y(z)}{F(z)},$$

то

$$\frac{y(z)}{F(z)} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j z^j}{\sum_{i=0}^n b_i z^i}.$$

Тогда:

$$\sum_{i=0}^n b_i y(z) \cdot z^i = \sum_{j=0}^m a_j F(z) \cdot z^j.$$

Учитывая теорему о смещении аргумента решетчатой функции:

$$Z\{f[(k+m)T]\} = Z^m \left(F(z) - \sum_{n=0}^{m-1} f[n]z^{-n} \right)$$

(при нулевых начальных значениях), получим:

$$\sum_{i=0}^n b_i y[k+i] = \sum_{j=0}^m a_j f[k+j]$$

Это соотношение представляет собой рекуррентное уравнение. Оно позволяет рассчитывать процессы на выходе системы, в последующие моменты времени по известным предыдущим значениям.

Пример№5.2:

$$W(z) = \frac{a}{z+1}$$

Решение:

Управление мехатронными системами

$$y(z) = W(z) \cdot f(z)$$

$$(z + 1) \cdot y(z) = a \cdot f(z)$$

Перейдем к оригиналам, учитывая теорему о смещении аргумента решетчатой функции:

$$y[k + 1] + y[k] = a \cdot f[k]$$

отсюда:

$$y[k + 1] = af[k] - y[k]$$

тогда при известных начальных условиях: $y[0] = 0, f[0] = f_0$

$$y[1] = af_0 - 0;$$

$$y[2] = af[1] - y[1], \dots$$

Пример№5.3:

$$w(z) = \frac{k}{z - 0.2}; k = 1; f = 4$$

$$y(z) = w(z) \cdot F(z); F(z) = \frac{z}{z - 1} 4$$

$$y[k] = \sum_{(i)} \text{Res } y(z) \cdot z^{k-1} \Big|_{z_i};$$

$$y[k] = \text{Res} \frac{4}{z - 0.2} \cdot \frac{z}{z - 1} z^{k-1} \Big|_{z=0.2} + \text{Res} \frac{4z^k}{(z - 0.2)(z - 1)} \Big|_{z=1} =$$

$$= \frac{4 \cdot (0.2)^k}{-0.8} + \frac{4}{0.8} = 5(1 - 0.2^k),$$

Численные значения:

$$k = 0 \quad y = 0$$

$$k = 1 \quad y = 4$$

$$k = 2 \quad y = 4.8$$

.....

Пример№5.4:

2.Переход к конечноразностному уравнению:

Управление мехатронными системами

$$\frac{y(z)}{f(z)} = W(z) = \frac{1}{z - 0.2};$$

$$z \cdot y(z) - 0.2y(z) = f(z)$$

$$y[k + 1] - 0.2y[k] = f[k]$$

$$y[k + 1] = f[k] + 0.2y[k]$$

$$y[0] = 0$$

$$y[1] = 4 + 0.2 \cdot 0 = 4$$

$$y[2] = 4 + 0.2 \cdot 4 = 4.8$$

.....

Пример№5.5:

Пусть линейная стационарная дискретная система описывается разностным уравнением:

$$Y[k + 2] + Y[k + 1] - 6Y[k] = 3u[k + 1] - 3u[k].$$

Найти выходную функцию при условии, что система сначала находится в покое и входное воздействие есть:

$$u[k] = \begin{cases} k & \text{при } k \geq 0 \\ 0 & \text{при } k < 0 \end{cases}$$

$$Y[z] = w[z] \cdot u[z] \quad \{z^2 \cdot Y[z] + z \cdot Y[z] - 6Y\} = 3zu - 3u$$

$$Y(z) = \frac{3(z-1)}{z^2 + z - 6} u(z) = \frac{3(z-1)}{(z+3)(z-2)} u(z)$$

$$u(z) = z\{k\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$Y(z) = \frac{3z}{(z+3)(z-2)(z-1)}$$

Обратное преобразование найдем по теореме о вычетах.

Полюсы:

$$z_i = -3; \quad 2; \quad 1$$

$$Y[k] = \sum_i \text{Res} \cdot Y(z)z^{k-1} = \sum \text{Res} \frac{3z^k}{(z+3)(z-2)(z-1)}$$

Вычеты $z^{k-1}Y(z)$ в точках z_i :

Управление мехатронными системами

$$\left. \frac{3z^k}{(z-2)(z-1)} \right|_{z=-3} = \frac{(-3)^{k+1}}{20};$$

$$\left. \frac{3z^k}{(z+3)(z-1)} \right|_{z=2} = \frac{3z^k}{5};$$

$$\left. \frac{3z^k}{(z+3)(z-2)} \right|_{z=1} = -\frac{3}{4};$$

Следовательно: $Y(k) = -\frac{(-3)^{k+1}}{20} + \frac{3}{5}2^k - \frac{3}{4}; \quad k \geq 0.$

ЛЕКЦИЯ № 7

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОСНОВНЫХ СТРУКТУР ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ.

План лекции:

1. Уравнения и передаточные функции замкнутой импульсной системы.
2. Правила структурных преобразований в линейных импульсных системах.
3. Рассмотрение примера преобразования структуры линейной импульсной системы.

7.1. Уравнения и передаточные функции замкнутой импульсной системы.

Рассмотрим замкнутую систему с импульсным элементом в цепи сигнала ошибки и единой обратной связью. Структурная схема системы приведена на рис.7.1.

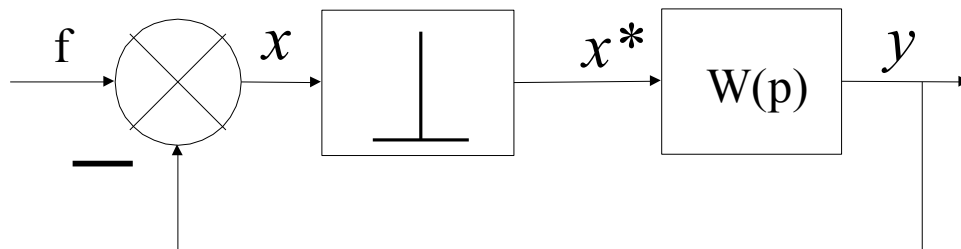


Рис.7.1.

Запишем уравнение замыкания для дискретных моментов времени:

$$t = nT, n = 0, 1, \dots$$

$$x[nT] = f[nT] - y[nT]. \quad (7.1)$$

Для получения уравнения замкнутой системы, воспользуемся уравнением разомкнутой системы:

$$y[nT] = \sum_{k=0}^n x[kT] \omega[(n-k)T]. \quad (7.2)$$

Подставляя (21) в (22), получим:

$$y[nT] = \sum_{k=0}^n f[kT] \cdot \omega[(n-k)T] - \sum_{k=0}^n y[kT] \cdot \omega[(n-k)T] \quad (7.3)$$

Отметим, что выходная величина $y(t)$ зависит только от значений входной величины $f(t)$ в момент квантования и не зависит от ее значений в промежуточные моменты времени. Это является одной из особенностей импульсных систем.

Для получения передаточной функции замкнутой импульсной системы применим Z-преобразование к обеим частям уравнения (7.3). С использованием свойств Z-преобразования (теоремы свертки в вещественной области), получим:

$$y(z) = F(z)W(z) - y(z) \cdot W(z) ,$$

откуда

$$y(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} \cdot F(z). \quad (7.4)$$

Выражение $\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)}$ определяет ПФ замкнутой импульсной системы для управляемой переменной по входному воздействию.

Из уравнения (7.4) и уравнения замыкания в изображениях

$$x(z) = F(z) - y(z),$$

получим для изображения ошибки:

$$x(z) = \frac{1}{1 + W(z)} \cdot F(z) \quad (7.5)$$

Выражение $\Phi_0(z) = \frac{1}{1 + W(z)}$ представляет собой ПФ замкнутой системы по ошибке.

7.2. Правила структурных преобразований в линейных импульсных системах.

При анализе сколько-нибудь сложных импульсных систем автоматического регулирования невозможно обойтись без структурных преобразований с целью определения эквивалентных передаточных функций отдельных элементов цепи.

Правила структурных преобразований дискретных систем имеют отличия от правил преобразования непрерывных систем, вызванные наличием импульсных элементов. Рассмотрим некоторые возможные структуры импульсных систем.

А) Система с импульсным элементом на входе.

Структурная схема, соответствующая этому случаю, представлена на рис.7.2.

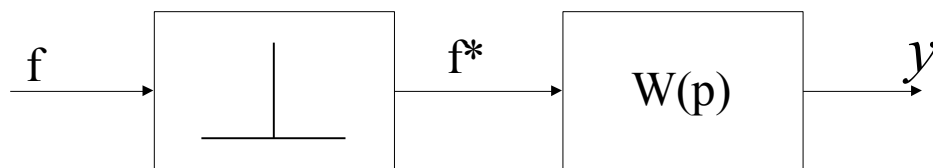


Рис.7.2.

Этот случай нами уже рассмотрен и получены соотношения:

$$y(z) = W(z) \cdot F(z) \quad \text{и} \quad W(z) = \frac{y(z)}{F(z)}$$

Если импульсный элемент включен на выходе непрерывной части, то Z-преобразование выходной величины определяется соотношением:

$$y(z) = \bar{D}\{W(p) \cdot F(p)\} \Big|_{e^{pT}=z},$$

т.е. z – ПФ в этом случае не может быть получена, т.к. ПФ $W(p)$ и $F(p)$ невозможно рассматривать отдельно. Кроме того, модифицированные Z –

преобразования $Y(z, \varepsilon)$ не имеет смысла, так как информация о переменной Y в промежуточные моменты времени отсутствует.

Б) Последовательное соединение непрерывных звеньев, разделенных импульсными элементами.

Структурная схема в этом случае представлена на рис.7.3.

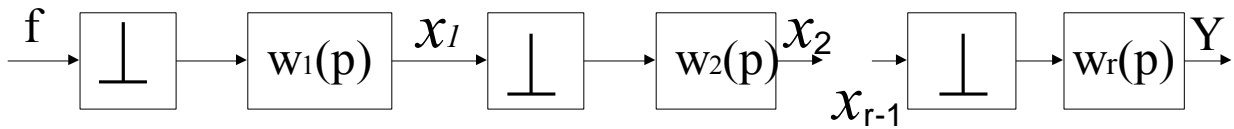


Рис.7.3.

Разбивая систему на части, каждая из которых состоит из одного непрерывного звена и импульсного элемента перед ним, получим:

$$\begin{aligned} \frac{X_1(z)}{F(z)} &= W_1(z) = \bar{D}\{W_1(p)\}_{z=e^{pT}} \dots \frac{Y(z)}{X_{r-1}(z)} = \\ &= w_r(z) = \bar{D}\{W_r(p)\}_{z=e^{pT}} \end{aligned}$$

Исключая промежуточные переменные, получим:

$$\frac{Y(z)}{F(z)} = \prod_{i=1}^r W_i(z) = W(z). \quad (7.6)$$

Таким образом, Z-ПФ последовательного соединения звеньев, разделенных импульсными элементами, равна произведению Z-ПФ этих звеньев.

В) Последовательное соединение непрерывных звеньев, не разделенных импульсными элементами.

Структурная схема системы представлена на рис. 7.4.

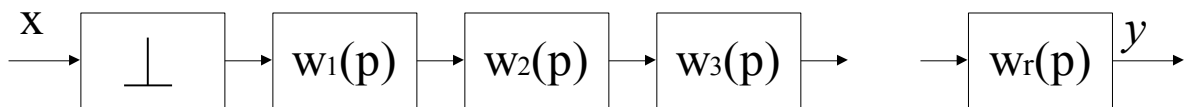


Рис.7.4.

В этом случае эквивалентная ПФ непрерывной части имеет вид:

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \dots W_r(p),$$

после чего это соединение сводится к схеме а), т.е.

$$\frac{y(z)}{x(z)} = W(z) = \bar{D}\left\{\prod_{i=1}^r W_i(p)\right\}_{e^{pT}=z}.$$

Г) Параллельное соединение непрерывных звеньев.

Структурная схема соединения показана на рис.7.5. В соответствии с определением передаточной функции и свойством линейности \overline{D} преобразования имеем:

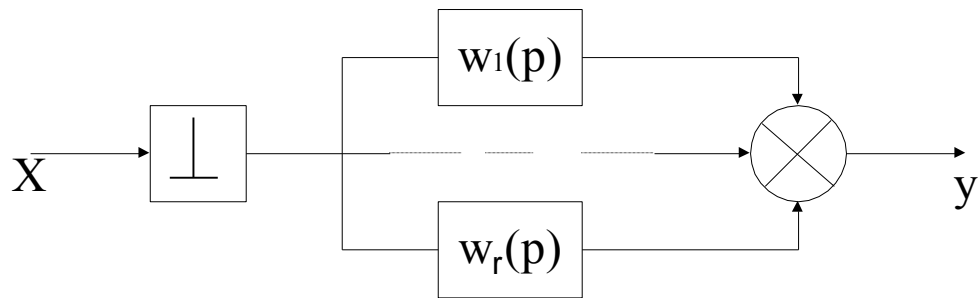


Рис.7.5.

$$\frac{y(z)}{x(z)} = W(z) = \overline{D} \left\{ \sum_{i=1}^r W_i(p) \right\} \Big|_{z=e^{pT}} = \sum_{i=1}^r \overline{D} \{ W_i(p) \} \Big|_{e^{pT}=z} = \sum_{i=1}^r W_i(z),$$

где $W_i(z) = \overline{D} \{ W_i(p) \} \Big|_{e^{pT}=z}$,

т.е. Z-ПФ равна сумме Z-ПФ отдельных звеньев, составляющих параллельное соединение.

Д) Элементарная структура с обратной связью (ОС).

Структурная схема системы представлена на рис.7.6.

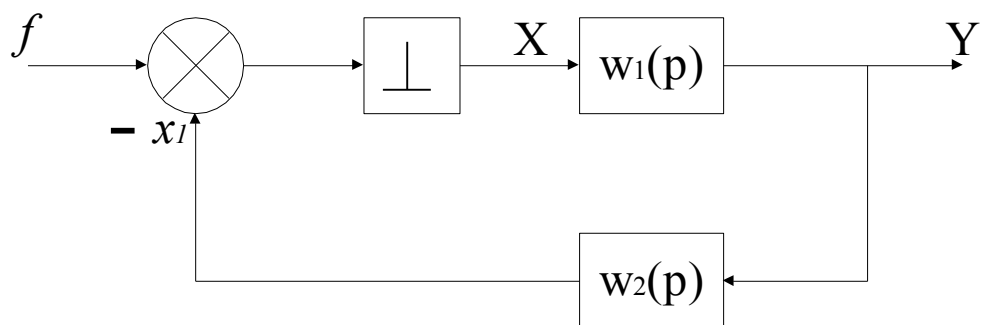


Рис.7.6.

С учетом результатов п.а) и в) запишем уравнение в изображениях:

$$\begin{aligned} y(z) &= x(z) \cdot W_1(z) \\ x_1(z) &= x(z) \cdot W_{12}(z) \end{aligned} \tag{7.7}$$

где:

Управление мехатронными системами

$$W_1(z) = \bar{D}\{W_1(p)\}\Big|_{e^{pT}=z}$$

$$W_{12}(z) = \bar{D}\{W_1(p) \cdot W_2(p)\}\Big|_{e^{pT}=z}$$

Уравнение замыкания в изображениях:

$$x(z) = F(z) - x_1(z) \tag{7.8}$$

Исключив из выражений (2.27) и (2.28) X_1 и X_2 получим зависимость для ПФ соединения:

$$x(z) = F(z) - x(z)W_{12}(z)$$

$$x(z) = \frac{1}{1 + W_{12}(z)} \cdot F(z) \quad ;$$

$$y(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W_{12}(z)} \tag{7.9}$$

Е) Соединение ИИЭ-экстраполятор нулевого порядка-непрерывное звено.

Структурная схема соединения представлена на рис.7.7.

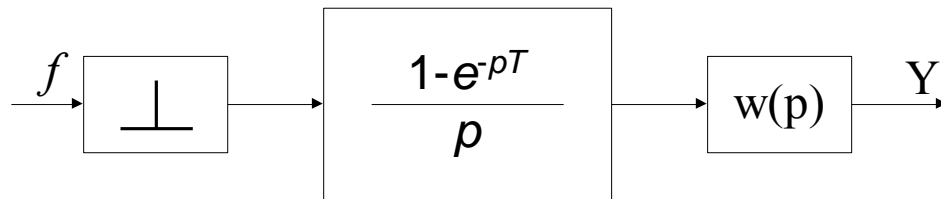


Рис.7.7.

$$W(z) = \bar{D}\left\{\frac{1 - e^{-pT}}{p} W(p)\right\}\Big|_{e^{pT}=z} = \frac{z - 1}{z} \bar{D}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}\Big|_{e^{pT}=z}$$

Ж).Определение Z-ПФ многоконтурной дискретной системы.

Для замкнутой дискретной системы с большим числом дискретно-непрерывных контуров Z-ПФ может определяться по следующей зависимости:

$$W(z) = \frac{W_{np}(z)}{1 + \sum_i W_i(z)} \tag{7.10}$$

где $W_{np}(z)$ - Z-ПФ прямой цепи с учетом расположения ИИЭ.

$W_i(z)$ – Z-ПФ i-ого разомкнутого дискретно-непрерывного контура. При этом контур размыкается в месте расположения ИИЭ. Входом контура является вход ИИЭ.

Пример:

В качестве примера рассмотрим дискретную систему, представленную на рис.7.8:

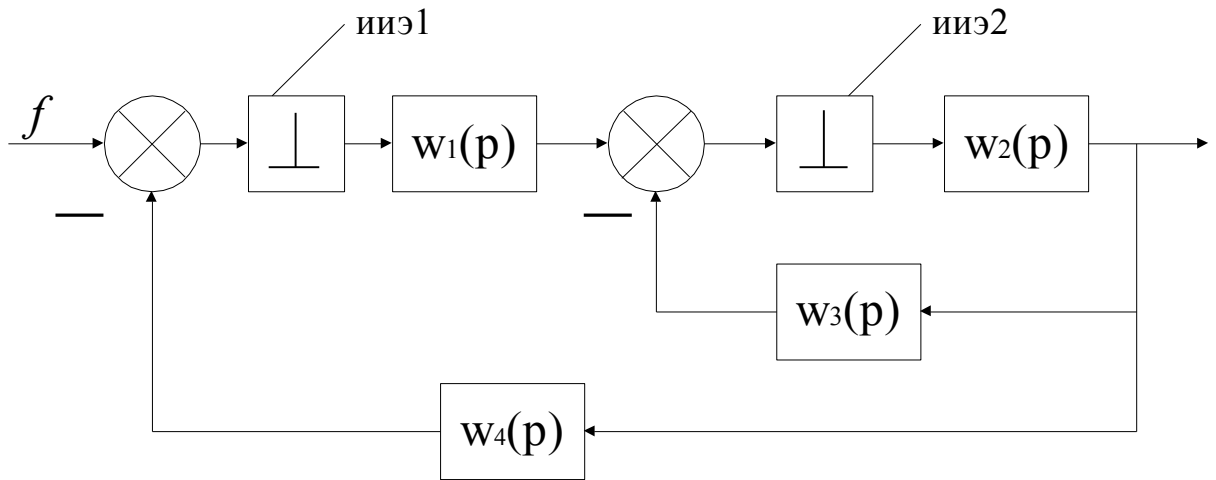


Рис.7.8.

В рассматриваемом случае:

$$W_{np}(z) = W_I(z) \cdot W_2(z),$$

где

$$W_I = D\{W_1(p)\}_{e^{pT}=z}; W_2 = \bar{D}\{W_2(p) \cdot W_3(p)\}_{e^{pT}=z}.$$

В системе можно выделить два дискретно-непрерывных контура.

В качестве первого рассмотрим контур, образованный ИИЭ2 и звеньями $W_2(p)$ и $W_3(p)$. Z-ПФ первого разомкнутого контура запишется в виде:

$$W_{23}(z) = W_I(z) = \bar{D}\{W_2(p) \cdot W_3(p)\}_{e^{pT}=z}.$$

Второй контур состоит из ИИЭ1, звена $W_1(p)$ и звеньев $W_2(p)$ и $W_4(p)$, и его ПФ имеет вид:

$$W_{24}(z) = \bar{D}\{W_2(p) \cdot W_4(p)\}_{e^{pT}=z};$$

$$W_{II}(z) = W_I(z) \cdot W_{24}(z).$$

Используя формулу (2.30) получим выражение для Z-ПФ схемы:

$$W(z) = \frac{W_I(z) \cdot W_2(z)}{1 + W_I(z) + W_{II}(z)}.$$

Если формулой (2.30) не удастся воспользоваться напрямую, необходимо выполнить следующие действия:

1. Обозначить сигналы на входах ИИЭ.
2. Связать введенные координаты с помощью Z-ПФ между собой.
3. Исключая промежуточные переменные, разрешить систему относительно входа и выхода и получить тем самым Z-ПФ системы.

Применим описанный алгоритм для получения Z-ПФ системы, структурная схема которой представлена на рис.7.9.

Управление мехатронными системами

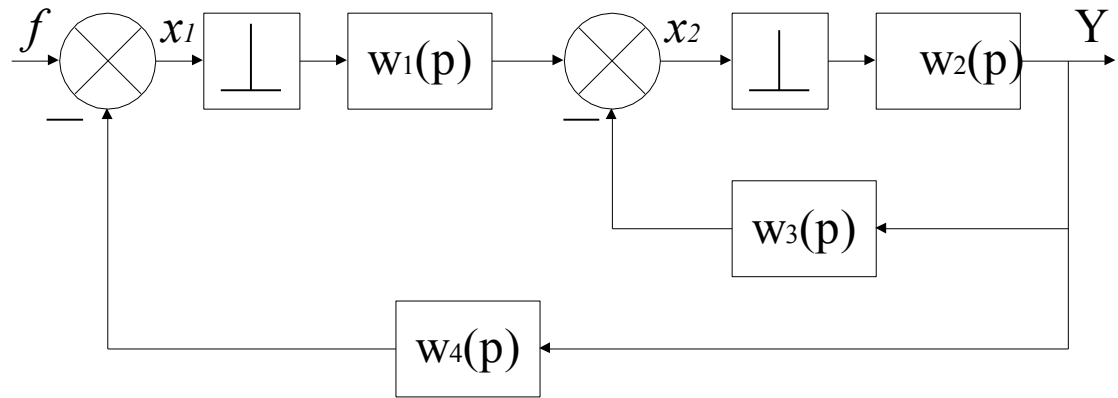


Рис.7.9.

$$\begin{aligned}
 x_1(p) &= F(z) - x_2(z) \cdot W_{24}(z) \\
 x_2(z) &= x_1(z) \cdot W_1(z) - x_2(z) \cdot W_{23}(z) \\
 y(z) &= x_2 \cdot W_2(z) \\
 x_2(z) &= W_1 \cdot F(z) - x_2(z) \cdot W_1(z) \cdot W_{24}(z) - x_2(z) \cdot W_{23}(z) \\
 x_2(z) &= \frac{W_1(z)}{I + W_1(z) \cdot W_{24}(z) + W_{23}(z)} F(z) \\
 y(z) &= \frac{W_1(z)W_2(z)}{I + W_1(z) \cdot W_{24}(z) + W_{23}(z)} F(z).
 \end{aligned}$$

Таким образом, нами рассмотрены ПФ дискретных систем и способы их вычисления. Аппарат Z- ПФ широко используется при описании дискретных систем, решении различных задач анализа и синтеза. Непосредственное использование передаточных функций при исследовании дискретных систем рассмотрим в последующих разделах.

ЛЕКЦИЯ №8

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ.

План лекции:

1. Определение изображения гармонического сигнала.
2. Прохождение дискретного гармонического сигнала через импульсную систему.
3. Частотные характеристики импульсных систем.
4. Свойства частотных характеристик импульсных систем.

8.1. Прохождение дискретного гармонического сигнала через импульсную систему.

Определим реакцию импульсной системы с ПФ $W(z)$ на гармонический сигнал

$$f[nt] = A \cos(\omega nT + \alpha).$$

При решении данной задачи удобно рассмотреть реакцию системы на воздействие:

$$f_1[nT] = A e^{j(\omega nT + \alpha)} = A \{ \cos(\omega nT + \alpha) + j \sin(\omega nT + \alpha) \} \quad (8.1)$$

и далее выделить действительную часть найденной реакции?

Найдем изображение сигнала (8.1). Преобразование по Лапласу функции:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= A e^{j(\omega t + \alpha)}. \\ F_1(p) &= \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-pt} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(p-j\omega)t} e^{j\alpha} dt = \\ &= A e^{j\alpha} \left[-\frac{1}{p-j\omega} e^{-(p-j\omega)t} \right]_0^{\infty} = A e^{j\alpha} \left[\frac{1}{p-j\omega} \right] = \\ &= \frac{A e^{j\alpha}}{p-j\omega}. \quad F_1(p) = \frac{A e^{j\alpha}}{p-j\omega}. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$F_1(p) = \frac{A e^{j\alpha}}{p-j\omega}.$$

С использованием теории вычетов:

$$F_1(z) = \sum_{i=1}^r \operatorname{Res} F(s) \frac{z}{z - e^{Ts}} \Big|_{s=s_i},$$

получим:

$$F_1(z) = \operatorname{Res} \frac{A e^{j\alpha}}{s-j\omega} \frac{z}{z - e^{Ts}} \Big|_{s=j\omega} = A e^{j\alpha} \frac{z}{z - e^{j\omega T}}.$$

Изображение выходной переменной системы имеет вид:

$$y(z) = W(z) \cdot F_1(z) = W(z) \cdot A e^{j\alpha} \frac{z}{z - e^{j\omega T}}.$$

Для получения реакции импульсной системы на заданный сигнал (8.1), выполним обратное Z- преобразование от последнего уравнения:

$$y[nT] = Z^{-1} \{W(z) \cdot F_1(z)\} = Z^{-1} \left\{ W(z) \cdot A e^{j\alpha} \frac{z}{z - e^{j\omega T}} \right\} =$$

$$= A e^{j\alpha} \sum_{i=1}^{r+1} \operatorname{Re} s \left\{ \frac{z^n}{z - e^{j\omega T}} W(z) \right\} \Big|_{z=z_i} . \quad (8.2)$$

Использована формула:

$$y[nT] = \sum_{i=1}^r \operatorname{Re} s \left\{ y(z) z^{n-1} \right\} \Big|_{z=z_i} , \text{ где } z_i - \text{ полюсы Z-изображения.}$$

В выражении (8.2) вычеты берутся в полюсах ПФ $W(z)$ и в точке $z=e^{j\omega T}$. Положим для простоты, что полюсы z_1, z_2, \dots, z_r передаточной функции простые и удовлетворяют условию:

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (8.3)$$

Тогда:

$$y[nT] = A e^{j\alpha} \sum_{i=1}^{r+1} \operatorname{Re} s \left\{ \frac{z^n}{z - e^{j\omega T}} W(z) \right\} \Big|_{z=z_i} =$$

$$= A e^{j\alpha} \operatorname{Re} s \frac{z^n}{z - e^{j\omega T}} W(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} + A e^{j\alpha} \sum_{i=1}^r \operatorname{Re} s \left\{ \frac{z^n}{z - e^{j\omega T}} W(z) \right\} \Big|_{z=z_i} =$$

$$= A e^{j\alpha} e^{j\omega n T} W(e^{j\omega T}) + A e^{j\alpha} \sum_{i=1}^r \frac{A(z_i)}{B'(z_i)} \frac{z_i^n}{z_i - e^{j\omega T}} =$$

$$= A W(e^{j\omega T}) e^{j(\omega n T + j\alpha)} + \sum_{i=1}^r c_i(z_i) z_i^n .$$

(8.4)

При выполнении условия (8.3) второе слагаемое в правой части (8.4) стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$ и в системе устанавливается вынужденное движение:

$$y_{I\%}[nT] = \lim_{n \rightarrow \infty} y[nT] = A W(e^{j\omega T}) e^{j(\omega n T + j\alpha)} . \quad (8.5)$$

Выделяя в выражении (8.5) действительную часть, получим реакцию системы на входной гармонический сигнал:

$$y_{I\%}[nT] = A \left| W(e^{j\omega T}) \right| \cos \{ \omega n T + \alpha + \arg W(e^{j\omega T}) \} . \quad (8.6)$$

$$\boxed{A \left| W(e^{j\omega T}) \right| e^{j \arg W} e^{j(\omega n T + \alpha)}}$$

Из полученной зависимости (8.6) видно, что при прохождении гармонического сигнала через импульсную систему его амплитуда изменяется в

$$\left| W(e^{j\omega T}) \right| - \text{раз, а фаза изменяется на } \arg W(e^{j\omega T}).$$

8.2 Частотные характеристики импульсных систем.

Функция $W^*(j\omega) = W(e^{j\omega T})$, получающаяся из Z-ПФ $W(z)$ в результате подстановки $z=e^{j\omega T}$, называется **амплитудно-фазовой частотной характеристикой** импульсной системы.

Функция $A^*(\omega) = |W(e^{j\omega T})|$, называется **амплитудно частотной характеристикой (АЧХ)**, а функция $\varphi^*(\omega)=\arg W(e^{j\omega T})$ – **фазо-частотная характеристика (ФЧХ)** импульсной системы.

Частотные характеристики импульсной системы имеют тот же смысл, что и соответствующие характеристики непрерывных систем и позволяют найти установившуюся реакцию на гармоническое воздействие.

Определение АФЧХ импульсной системы возможно с помощью формул:

$$W^*(j\omega) = W(e^{j\omega T}) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega[kT] e^{j(\omega T k + \alpha)} \quad (8.7)$$

$$F^*(p) = \sum f[kT] e^{-pkT}$$

либо с использованием формулы связи:

$$F^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(p + j \frac{2\pi}{T} m) + \frac{f(0)}{2}.$$

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W(j(\omega + \frac{2\pi}{T} m))$$

Пример

Рассмотрим пример определения АФЧХ импульсной системы. Пусть Z=ПФ системы имеет вид:

$$W(z) = \frac{z}{z - 0,5}.$$

Необходимо найти ЧХ звена.

Решение:

В соответствии с определением ЧХ, имеем:

$$W(j\omega) = \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - 0,5}$$

$$A^*(\omega) = \left| W(e^{j\omega T}) \right| = \frac{1}{\sqrt{(\cos \omega T - 0,5)^2 + \sin^2 \omega T}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \omega T - \cos \omega T + 0,25 + \sin^2 \omega T}} = \frac{1}{\sqrt{1,25 - \cos \omega T}}$$

$$\varphi^*(\omega) = \arg W(e^{j\omega T}) = \arg \alpha_0 - \arg \alpha_1,$$

где: α_0 - аргумент числителя;

α_1 - аргумент знаменателя.

$$\alpha_0 = \omega T;$$

$$\alpha_1 = \arctg \frac{\sin \omega T}{\cos \omega T - 0.5}.$$

Графики АФЧХ, построенные по приведенным зависимостям, показаны на рис.8.1, здесь $\bar{\omega} = \omega T$.

Из приведенного рисунка видно, что частотные характеристики импульсных систем существенно отличаются от АФЧХ непрерывных систем.

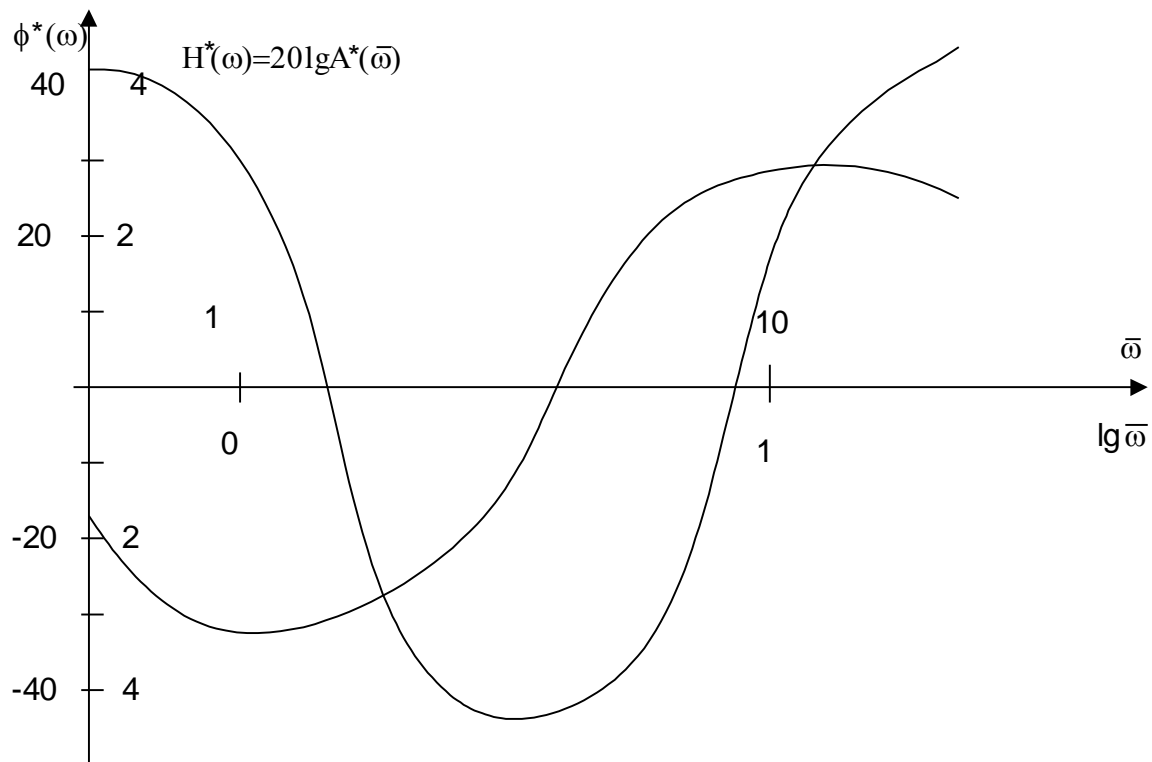


Рис.8.1.

8.3. Свойства частотных характеристик импульсных систем.

Рассмотрим основные свойства ЧХ импульсных систем.

1. В общем случае ЧХ импульсных систем являются функциями параметра ε :

$$y(z, \varepsilon) = F(z) \cdot W(z, \varepsilon)$$

$$W(z, \varepsilon) \rightarrow W(e^{j\omega T}, \varepsilon).$$

Таким образом, импульсная система, строго говоря описывается семейством ЧХ. Тем не менее, при исследовании свойств импульсных систем

достаточно ограничиться случаем $\varepsilon=0$. Например, при оценке устойчивости используется именно ЧХ $W(e^{j\omega T})$.

2. Вследствие периодичности экспоненты $e^{j\omega T}$ ЧХ импульсной системы является периодической функцией частоты с периодом: $\frac{2\pi}{T}$.

$$e^{j\omega T} = e^{j(\omega + \frac{2\pi}{T}m)T} = e^{j\omega T} e^{j\frac{2\pi}{T}mT} = e^{j\omega T}.$$

Поэтому ЧХ $W(e^{j\omega T})$ полностью определяется своими значениями в диапазоне частот:

$$-\frac{\pi}{T} < \omega \leq \frac{\pi}{T}.$$

Периодичность ЧХ приводит к тому, что импульсная система одинаково пропускает сигналы $\sin \omega t$ и $\sin(\omega t + \frac{2\pi}{T})$, так как в обоих случаях на выходе ИИЭ существуют одинаковые последовательности импульсов (рис.8.2).

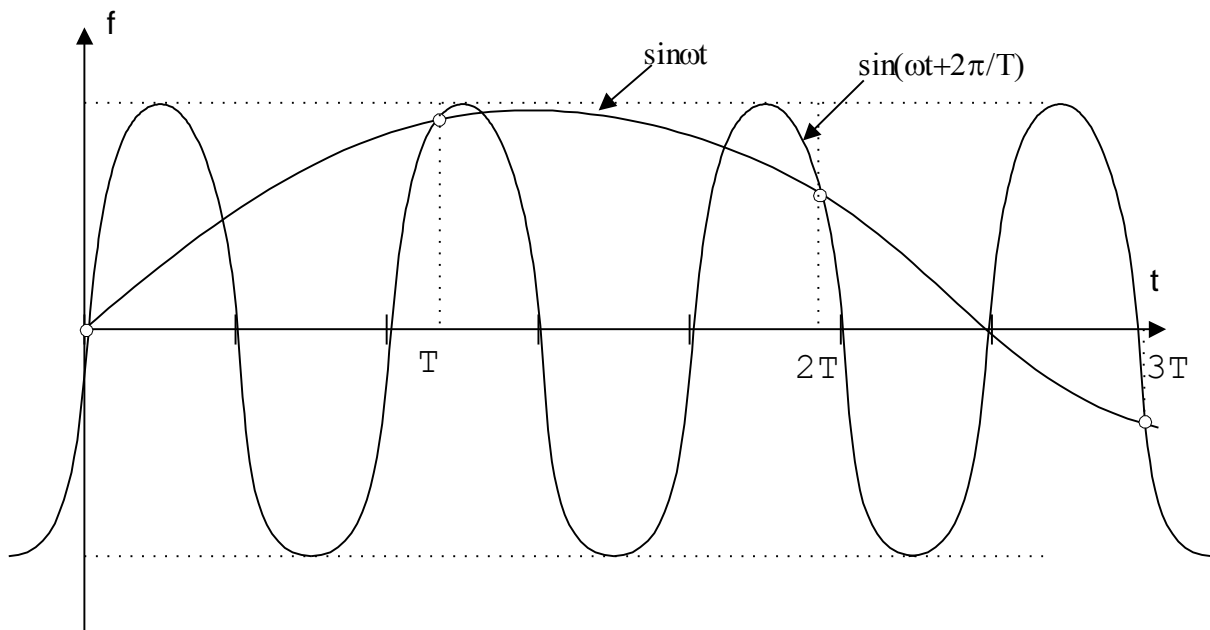


Рис.8.2.

Допустим частота входного сигнала в 5 раз меньше частоты квантования:

$$\omega_{ex1} = \frac{1}{5} \frac{2\pi}{T}.$$

Далее рассмотрим входной сигнал, частота которого отличается от указанной на величину $\frac{2\pi}{T}$:

$$\omega_{ex2} = \frac{1}{5} \frac{2\pi}{T} + \frac{2\pi}{T} = 6 * \omega_{ex1}.$$

3. АЧХ $A^*(\omega, \varepsilon)$ является четной функцией частоты, т.е. :
 $A^*(\omega, \varepsilon) = A^*(-\omega, \varepsilon)$.

Управление мехатронными системами

Вследствие четности АЧХ и периодичности $W(e^{j\omega T}, \varepsilon)$ достаточно знать значения АЧХ в диапазоне

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}.$$

Фзочастотная характеристика $\varphi^*(\omega, \varepsilon)$ является нечетной функцией частоты, т.е.:

$$\varphi^*(\omega, \varepsilon) = -\varphi^*(-\omega, \varepsilon).$$

Она также может быть задана своими значениями в диапазоне частот:

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}.$$

4. При частотах $\omega = \frac{\omega_0}{2} n$, где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $n = 0, \pm 1, \dots$, т.е.

$$e^{j\omega T} \Big|_{\omega = \frac{\omega_0 n}{2} = \frac{2\pi}{T} \frac{n}{2} = \frac{\pi n}{T}} = e^{j \frac{\pi}{T} T n} = e^{j\pi n}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

или

$$\varphi^*\left(\frac{\omega_0}{2} n\right) = \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Указанное свойство выполняется за исключением случаев, когда передаточная функция приведенной непрерывной части $W(p)$ имеет нулевой полюс порядка l . Тогда ПФ $W(z)$ имеет полюс $z=1$ того же порядка l . И при $\omega \rightarrow 0$,

$$A^*(\omega, \varepsilon) \rightarrow \text{к бесконечности}, \quad \varphi^*(\omega, \varepsilon) \rightarrow \frac{\pi}{2} l.$$

5. При рассмотрении непрерывных систем широко использовались логарифмические частотные характеристики. Их преимущество заключалось в возможности аппроксимации ломаными линиями, что позволяло использовать так называемые асимптотические частотные характеристики.

Использование логарифмического масштаба для частотных характеристик дискретных систем не дает хороших результатов.

Возможный вид АЧХ дискретной системы в логарифмическом масштабе приведен на рис.8.3.

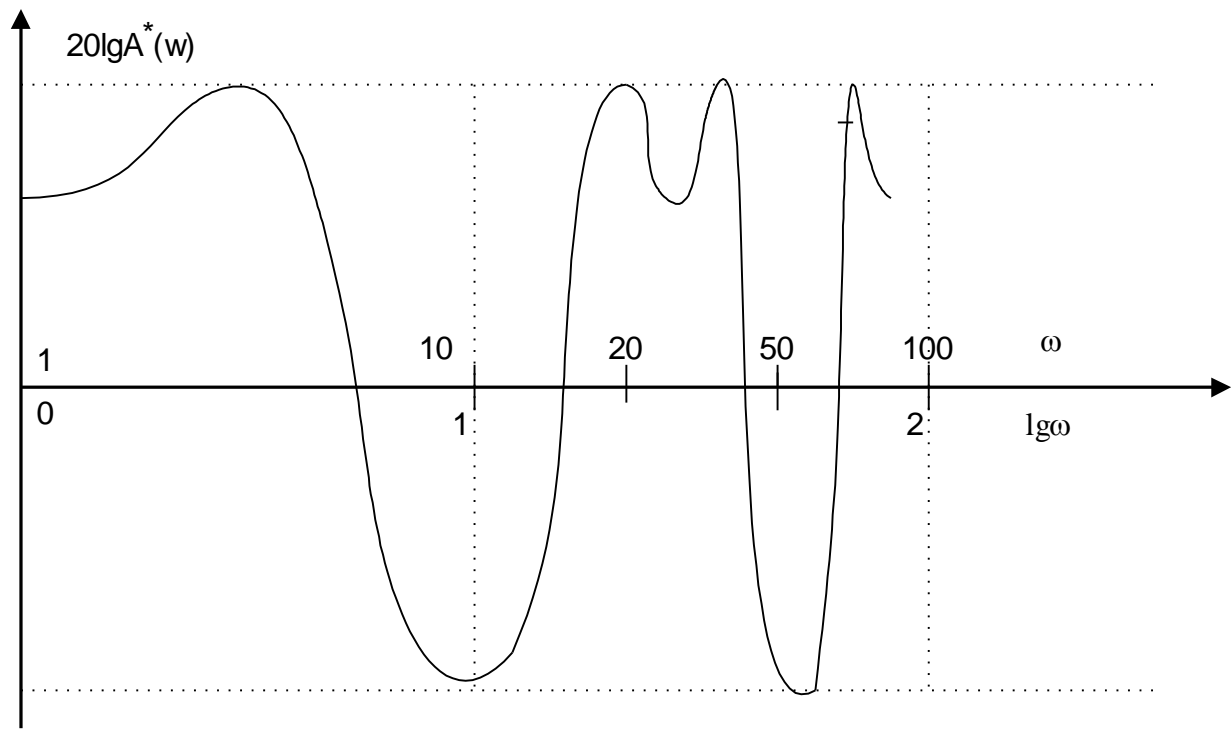


Рис.8.3.

Вследствие того, что $W^*(j\omega)$ - периодическая функция частоты, логарифмические частотные характеристики дискретных систем теряют свойства асимптотичности и не могут быть аппроксимированы ломаными линиями.

Таким образом, в своем исходном виде, ЧХ дискретных систем неудобны для применения и нуждаются в определенной модификации, чтобы их можно было применить также просто, как и ЛАФЧХ непрерывных систем.

ЛЕКЦИЯ № 9

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ (продолжение)

План лекции:

1. Псевдочастотные характеристики дискретных систем.
2. Методы построения ЧХ дискретных систем.

9.1 Псевдочастотные характеристики дискретных систем.

Из-за своей простоты и удобства использования ЛАФЧХ получили широкое применение при исследовании непрерывных систем. Однако, непосредственное использование ЧХ дискретных систем не может быть выполнено также, как и в случае непрерывных аналогов. Это объясняется тем, что построение дискретных АФЧХ значительно более громоздко, и тем, что эти характеристики не обладают свойством асимптотичности, вследствие чего не могут быть приближенно представлены ломаными линиями. Однако и для дискретных систем оказывается возможным ввести характеристики, которые по методике построения и своим свойствам будут схожи с ЛАФЧХ непрерывных систем. Такие характеристики называются псевдочастотными.

Частотная характеристика дискретной системы полностью определяется значением в диапазоне частот:

$$0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Чтобы использовать обычную методику построения ЛЧХ вводят так называемую псевдочастоту λ и рассматривают псевдочастотные характеристики.

Переход к псевдочастоте делается на основе билинейного преобразования (ω -преобразования).

Введем комплексную величину w , связанную с комплексной величиной Z билинейным преобразованием:

$$Z = \frac{1+w}{1-w}; \quad w = \frac{z-1}{z+1} \quad (9.1)$$

Сделав подстановку: $z = e^{j\omega T}$, получим из предыдущей формулы:

$$w = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{\cos \omega T + j \sin \omega T - 1}{\cos \omega T + j \sin \omega T + 1};$$

$$\cos \omega T = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}}; \quad \sin \omega T = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}};$$

Управление мехатронными системами

$$w = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2} + 2j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} - 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2} + 2j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} + 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}} = \frac{-2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2} + 2j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{2 \left(1 + j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \right)} =$$

$$= \frac{j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \left(j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} + 1 \right)}{1 + j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j \lambda_0,$$

$$\text{где } \lambda_0 = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2},$$

представляет собой так называемую относительную псевдочастоту.

При анализе импульсных систем удобно рассматривать абсолютную псевдочастоту:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{2}{T} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \quad (9.2)$$

$$\text{Тогда: } w = j \frac{\lambda T}{2} \text{ и } \lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}.$$

Чем удобна абсолютная псевдочастота? Она удобна тем, что на малых частотах $\lambda \approx \omega$. Поэтому при выполнении условия $\omega < \frac{2}{T}$, в расчетах можно заменить псевдочастоту действительной круговой частотой. Это свойство может быть использовано, например, при расчетах реакции импульсной системы на медленно меняющиеся гармонические сигналы на его входе.

Нетрудно видеть из зависимости :

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2},$$

что при изменении частоты в пределах: $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$, псевдочастота пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, а комплексная величина w движется по оси мнимых частот:

$$w = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}, \text{ от } -j\infty \text{ до } +j\infty.$$

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left\{ \left(-\frac{\pi}{T} \right) \cdot \frac{T}{2} \right\} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left\{ -\frac{\pi}{2} \right\} = -\infty.$$

Управление мехатронными системами

Отметим также еще одно замечательное свойство билинейного преобразования. Оно заключается в том, что при таком преобразовании внутренняя часть круга единичного радиуса на плоскости z отображается на левую полуплоскость плоскости w (рис.9.1).

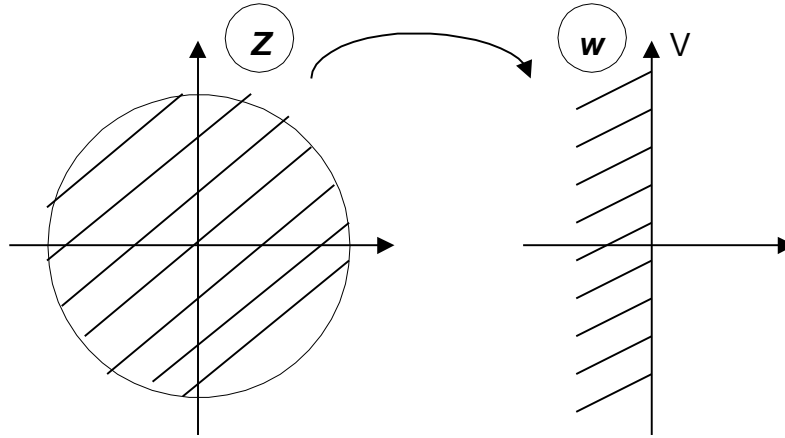


Рис.9.1.

Действительно, пусть $w=u+iv$, тогда комплексной переменной z определится выражением:

$$|z| = \frac{|1+w|}{|1-w|} = \sqrt{\frac{(1+u)^2 + v^2}{(1-u)^2 + v^2}},$$

откуда следует, что при

$$\begin{aligned} u < 0, & \quad |z| < 1; \\ u = 0, & \quad |z| = 1; \\ u > 0, & \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

Это свойство оказывается чрезвычайно удобным, так как позволяет использовать традиционные критерии для оценки устойчивости импульсных систем.

Итак, для получения передаточной функции импульсной системы на основе псевдочастоты λ , необходимо выполнить подстановку в $W(z)$:

$$z = \frac{1+w}{1-w},$$

а затем заменить: $\omega = \frac{j\lambda T}{2}$

$$w^*(j\lambda) = w\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right) = w\left(\frac{1+j\lambda T/2}{1-j\lambda T/2}\right)$$

Частотная характеристика $W^*(j\lambda)$ в функции псевдочастоты λ называется псевдочастотной характеристикой (ПЧХ).

Управление мехатронными системами

В w -области передаточная функция дискретной системы есть дробно-рациональная функция $j\lambda$, причем при изменении ω в диапазоне от $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$, псевдочастота изменяется в пределах:

$$0 \leq \lambda \leq \infty .$$

Таким образом, в области псевдочастот частотные характеристики дискретных систем имеют те же свойства, что и у непрерывных систем. Следовательно, к псевдочастотным характеристикам могут быть применены известные методы синтеза непрерывных систем.

9.2. Методы построения частотных характеристик дискретных систем.

АФЧХ дискретных систем строятся либо по частотной характеристике приведенной непрерывной части, либо по передаточной функции $W(z)$.

Если непрерывная часть системы задана частотной характеристикой $W(j\omega)$, то АФЧХ разомкнутой дискретной системы может быть определена с использованием зависимости:

$$W^*(j\omega) = W(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T} m\right)\right) \quad (9.3)$$

При этом существует два способа решения задачи:

- 1) можно сначала найти действительную $P^*(\omega)$ и мнимую $Q^*(\omega)$ частотные характеристики, и затем определить $A^*(\omega)$, $\varphi^*(\omega)$;
- 2) либо осуществить непосредственное векторное сложение слагаемых в правой части (9.3).

Рассмотрим первый способ. Перепишем (9.3):

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W\left[j\left(\omega + \frac{2\pi}{T} m\right)\right]$$

При известных действительной $P(\omega)$ и мнимой $Q(\omega)$ частотных характеристиках, получим:

$$\text{Re } W(e^{j\omega T}) = P^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} P\left(\omega + \frac{2\pi}{T} m\right)$$

$$\text{Im } W(e^{j\omega T}) = Q^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q\left(\omega + \frac{2\pi}{T} m\right)$$

Обычно в записанных соотношениях удается ограничиться конечным (достаточно небольшим) числом слагаемых, что сильно упрощает процесс вычислений.

По известным характеристикам $P^*(\omega)$ и $Q^*(\omega)$ можно построить АФЧХ дискретной системы:

$$A^*(\omega) = \sqrt{P^{*2}(\omega) + Q^{*2}(\omega)}$$

$$Q^*(\omega) = \text{arctg} Q^*(\omega) / P^*(\omega)$$

Второй способ соответствует непосредственному векторному сложению слагаемых в правой части выражения (9.3), при этом удерживается конечное число членов и выполняется их графическое суммирование.

Пусть, например, учитываются слагаемые при: $m = -M, -M+1 \dots 0 \dots M-1, M$. Тогда получим:

$$W(e^{j\omega T}) \approx \frac{1}{T} \sum_{m=-M}^M W\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}m\right)\right)$$

Проиллюстрируем этот подход, ограничившись в правой части (9.3) тремя слагаемыми, т.е.:

$$W(e^{j\omega T}) \cong \frac{1}{T} [W(j(\omega - \omega_0)) + W(j\omega) + W(j(\omega + \omega_0))],$$

здесь $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

На плоскости годографа АФЧХ приведенной непрерывной части при ряде значений частоты ω производим графическое сложение векторов $W(j(\omega - \omega_0)), W(j\omega), W(j(\omega + \omega_0))$. И после масштабного преобразования $(1/T)$ получаем вектор $W(e^{j\omega T})$ (рис.9.2).

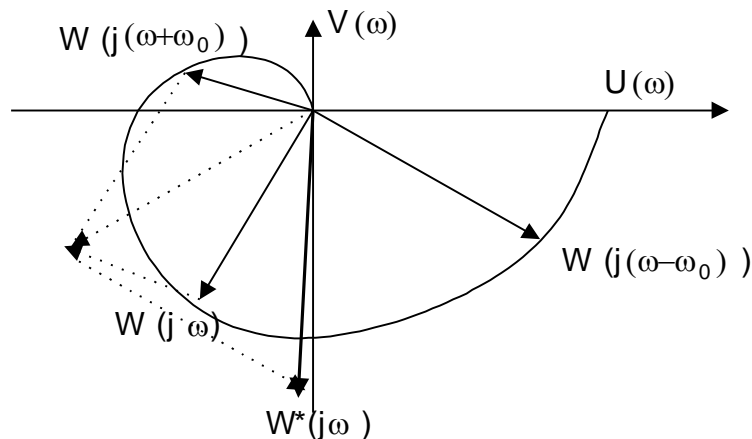
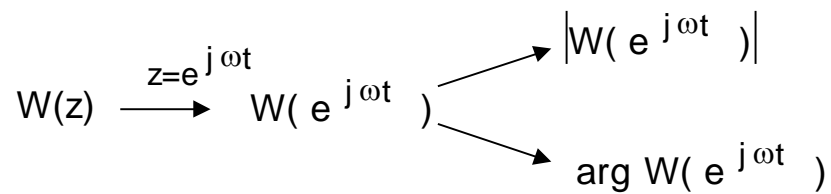


Рис.9.2.

Соединяя концы векторов $W^*(e^{j\omega T})$, построим годограф АФЧХ дискретной системы. Процесс построения показан на рис.9.2.

Основным способом построения АФЧХ дискретной системы является непосредственное использование ее z-ПФ $W(z)$.



Псевдочастотные характеристики:

$$W(z) \xrightarrow[z = \frac{1+w}{1-w}]{} W(w) \xrightarrow[w = \frac{j\lambda T}{2}]{} W^*(j\lambda)$$

Логарифмические ПЧХ строятся по w -ПФ $W^*(w)$ совершенно аналогично ЛАФЧХ непрерывных систем с использованием тех же шаблонов типовых динамических звеньев.

При этом возможно использование таблиц \overline{D}_ω -преобразования, представляющего собой результат последовательного применения к ПФ приведенной непрерывной части системы $W(p)$ \overline{D} -преобразование с подставкой $e^{pT} = z$ и w -преобразования.

ЛЕКЦИЯ №10.**УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ.**

План лекции:

1. Определение устойчивости.
 2. Условия устойчивости импульсных систем.
 3. Асимптотическая устойчивость.
 4. Алгебраические критерии устойчивости импульсных систем.
- 10.1. Понятие устойчивости. Условия устойчивости импульсных систем.

Устойчивость является важнейшей характеристикой САУ, в решающей степени определяющей возможность ее практического применения.

Проблема устойчивости особенно актуальна для замкнутых систем, так как стремление повысить точность системы за счет увеличения коэффициента передачи разомкнутой цепи приводит, как правило, к ее возбуждению и потере устойчивости.

Будем считать, что **линейная ИС устойчива тогда и только тогда, когда ее реакция на любое ограниченное воздействие ограничена.** Соответственно, если найдется хотя бы одно ограниченное внешнее воздействие, реакция системы на которое не будет ограничена, то такая ИС называется неустойчивой.

Установим условия устойчивости линейной ИС во временной области.

Рассмотрим полученное уравнение движения ИС во временной области:

$$y[nT] = \sum_{k=0}^n f[kT] \cdot w[(n-k)T]$$

и приведем его к виду:

$$y[nT] = \sum_{k=0}^n w[kT] \cdot f[(n-k)T] \quad (10.1)$$

Предположим, что внешнее воздействие ограничено, т.е.:

$$|f[kT]| \leq M, \text{ для всех } k \geq 0 \quad (10.2)$$

проведем оценку выходного сигнала (11.1):

$$|y[nT]| \leq \sum_{k=0}^n |w[kT]| \cdot |f[(n-k)T]| \leq M \sum_{k=0}^n |w[kT]| \quad (10.3)$$

Поднимая в последнем неравенстве (11.3) верхний предел суммирования до ∞ (это может только усилить неравенство), получим:

$$|y[nT]| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} |w[kT]|, n = 0, 1, \dots \quad (10.4)$$

Очевидно, что ИС будет устойчива, если ряд в правой части (10.4) сходится, т. е. если:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |w[kT]| < \infty \quad (11.5)$$

Таким образом, **ИС устойчива, если ряд дискрет весовой функции ПНЧ абсолютно сходится.**

В приведенной формулировке условие (11.5) является достаточным.

Покажем необходимость этого условия на конкретном примере.

Предположим, что условие (11.5) не выполняется, т. е.:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |w[kT]| = \infty \quad (11.6)$$

Тогда можно найти ограниченное входное воздействие, при котором реакция системы будет неограниченной.

Пусть при фиксированном n :

$$f[(n-k)T] = M \operatorname{sign} w[kT].$$

Тогда:

$$y[nT] = \sum_{k=0}^n M \operatorname{sign} w[kT] \cdot \omega[kT] = M \sum_{k=0}^n |w[kT]|$$

Согласно условию (11.6) для любого наперед заданного числа N всегда можно подобрать такое n , когда:

$$y[nT] > N,$$

т. е. $y[nT]$ - неограниченно возрастает с ростом n , что свидетельствует о неустойчивости системы.

Таким образом, абсолютная сходимость ряда дискрет весовой характеристики ПНЧ (11.5) является необходимым и достаточным условием устойчивости ИС.

Рассмотрим, как можно оценить устойчивость линейной ИС по ее передаточной функции $W(z)$. По определению $W(z)$:

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w[kT] \cdot z^{-k}$$

Откуда можно записать:

$$|W(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |w[kT]| |z|^{-k} \quad (11.7)$$

Если $|z| \geq 1$, то $|z|^{-k} \leq 1$.

Отсюда следует, что у устойчивой импульсной системы, для которой справедливо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |w[kT]| < \infty.$$

ПФ $W(z)$ должна быть ограничена в области $|z| \geq 1$, т. е. функция $W(z)$ не должна иметь особых точек-полюсов в области:

$$|z| \geq 1.$$

Таким образом ИС устойчива, когда все полюса $W(z)$ лежат внутри круга единичного радиуса:

$$|z_i| < 1, i = 1, 2 \dots r,$$

где r -число полюсов ПФ $W(z)$.

Случай, когда существуют полюсы $|z_i| = 1$, является критическим. Можно показать, что устойчивость обеспечивается, если полюсы $|z_i| = 1$ представляют собой полюсы первого порядка ПФ $W(z)$.

Аналогичное условие устойчивости может быть получено, если вспомнить формулу для расчета реакции системы по ее Z-ПФ.

$$y[kT] = Z^{-1}\{F(z) \cdot W(z)\}.$$

Применяя теорию вычетов:

$$y[kT] = \sum_{i=0}^r \text{Res}\{F(z)W(z)\}Z^{k-1}\Big|_{z=z_i}.$$

Обозначим: $C_i = \text{Res}\{F(z) \cdot W(z)\}\Big|_{z_i}$

$$y[kT] = \sum_{r=1}^r C_i \cdot Z_i.$$

Как правило, передаточная функция ИС является дробно-рациональной функцией переменной z :

$$W(z) = \frac{A(z)}{B(z)}.$$

где $A(z)$ и $B(z)$ – многочлены. Тогда уравнение

$$B(z)=0 \tag{11.8}$$

является характеристическим уравнением ИС и для ее устойчивости необходимо и достаточно, чтобы:

1) все корни уравнения (11.8) удовлетворяли условию:

$$|z| \leq 1, i = 1, 2 \dots r;$$

2) корни, модули которых равны единице, были простыми.

Таким образом на комплексной плоскости Z , **устойчивой ИС** соответствуют корни $B(z)$, находящиеся внутри единичной окружности или принадлежащие этой окружности. **Асимптотической устойчивости системы**, характеризующейся тем, что в отсутствие входного сигнала собственные движения $y[nT]$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, соответствуют полюсы ПФ, находящиеся внутри окружности единичного радиуса:

$$|z_i| < 1, i = 1, 2 \dots r.$$

Анализ устойчивости ИС заключается в оценке расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости (Z).

11.2.Алгебраические критерии устойчивости импульсных систем.

Непосредственное вычисление корней характеристического многочлена представляет собой громоздкую операцию. Поэтому важно иметь критерии, позволяющие установить факт устойчивости ИС без вычисления его корней.

Рассмотрим характеристическое уравнение системы:

Управление мехатронными системами

$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n = 0. \quad (11.9)$$

Использование для оценки устойчивости ИС критериев устойчивости непрерывных систем.

Используем преобразование единичного круга плоскости Z , ($|z| < 1$) в левую полуплоскость w , $\text{Re } w < 0$. тогда характеристическое уравнение (11.9) приобретает вид:

$$b_0 \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^n + b_1 \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^{n-1} + \dots + b_{n-1} \frac{1+w}{1-w} + b_n = 0$$

или:

$$a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_{n-1} w + a_n = 0 \quad (11.10)$$

где коэффициенты $a_i, i = 0 \dots n$ выражаются через коэффициенты $b_i, i = 0, 1 \dots n$. применение к уравнению (11.10) известных критериев устойчивости непрерывных систем (Рауса, Гурвица, Михайлова и т. д.) позволяет проверить расположение особых точек относительно мнимой оси в плоскости w , а, следовательно, и расположения точек Z_i относительно единичного круга в плоскости Z . Например, если для всех w_i имеет место $\text{Re } w_i < 0, i = \overline{0, n}$, то $|z_i| < 1, i = \overline{0, n}$ и система устойчива.

Недостатком такого подхода является трудность реализации этих критериев для систем высокого порядка из-за громоздких преобразований.

Использование алгебраического критерия Шура – Кона.

Рассмотрим характеристическое уравнение (11.9):

$$B(z) = b_0 z^n + \dots + b_{n-1} z + b_n = 0.$$

и составим следующую последовательность матриц из его элементов

$$B_{1k} = \begin{pmatrix} b_n & 0 & \dots & 0 \\ b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-(k-1)} & b_{n-(k-2)} & \dots & b_n \end{pmatrix},$$

$$B_{2k} = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k-1} & b_{k-2} & \dots & b_0 \end{pmatrix}$$

Составим из матриц B_{1k} и B_{2k} матрицу B_k размерности $(2k \times 2k)$

$$B_k = \begin{pmatrix} B_{1k} & B_{2k} \\ B_{2k}^T & B_{1k}^T \end{pmatrix} \quad k = 1, 2 \dots n.$$

Управление мехатронными системами

Для обеспечения устойчивости импульсной системы с характеристическим уравнением (11.9) необходимо и достаточно, чтобы число перемен знака в последовательности:

$$1, \det B_1, \det B_2, \dots, \det B_n$$

было равно n (степени характеристического многочлена).

Иначе, должно выполняться условие:

$$\det B_k < 0 \quad \text{для нечетных } k,$$

$$\det B_k > 0 \quad \text{для четных } k.$$

Критерий применяется непосредственно к характеристическому уравнению Z-ПФ.

Недостатком критерия является необходимость вычисления определителей высокого порядка.

ЛЕКЦИЯ №11.

ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ.

План лекции:

1. Критерий Михайлова.
2. Критерий Найквиста.
3. Критерий Найквиста для систем неустойчивых в разомкнутом состоянии.

Частотные критерии устойчивости удобно применять к системам высокого порядка. Одним из наиболее распространенных частотных критериев непрерывных систем является критерий Михайлова.

11.1. Аналог критерия Михайлова для ИС.

Вспомним формулировку критерия Михайлова для непрерывных систем. Задано характеристическое уравнение системы:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

Подстановка $p = j\omega$, дает:

$$D(j\omega) = x(\omega) + jy(\omega)$$

На комплексной плоскости X, Y изображают годограф этого выражения при изменении ω - от 0 до ∞ (рис.12.1).

При $\omega = 0$;

$$x = a_n; y = 0$$

$$\Delta \arg D(j\omega) = \frac{m\pi}{2}$$

при $\omega \rightarrow \infty$

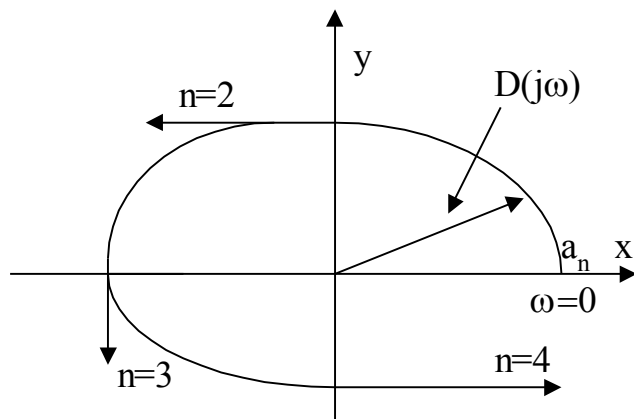


Рис.11.1

Формулировка:

Для устойчивости линейной системы n – ого порядка необходимо и достаточно, чтобы кривая Михайлова (годограф) проходила последовательно n – квадрантов против часовой стрелки, т.е. $m = n$.

Управление мехатронными системами

Для импульсных систем может быть сформулирован аналог этого критерия. Допустим, что характеристическое уравнение замкнутой ИС имеет вид:

$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n = 0, \quad b_0 > 0.$$

В соответствии с принципом аргумента **число m – корней характеристического многочлена, лежащих внутри единичной окружности, равно числу полных оборотов вектора $B(z)$ вокруг начала координат при обходе точкой z единичной окружности $|z| = 1$ в положительном направлении:**

$$\Delta \arg B(z) = 2\pi m, \text{ при} \\ |z| = 1, \quad 0 < \arg z \leq 2\pi.$$

Если число полных оборотов вектора $B(z)$ - m равно порядку n , то все корни $B(z)$ лежат внутри единичной окружности (т.е. $m=n$).

Для того, чтобы воспользоваться принципом аргумента, положим $z = e^{j\omega T}$.

При изменении ω в пределах от $0 < \omega \leq \frac{2\pi}{T}$, переменная z опишет круг единичного радиуса на комплексной плоскости Z .

Итак, заменяя переменную Z в характеристическом уравнении $B(z)$ по формуле $z = e^{j\omega T}$, найдем:

$$B(e^{j\omega T}) = b_0 e^{j\omega T n} + b_1 e^{j\omega T(n-1)} + \dots + b_{n-1} e^{j\omega T} + b_n = 0.$$

Так как справедливы равенства:

$$x(-\omega) = x(\omega) \\ y(-\omega) = -y(\omega),$$

где $x = \operatorname{Re}[B(e^{j\omega T})]$; $y = \operatorname{Im}[B(e^{j\omega T})]$,

то годограф $B(e^{j\omega T})$ при значениях $0 < \omega \leq \frac{2\pi}{T}$ симметричен относительно вещественной оси и полностью определяется своими значениями в диапазоне $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$. Поэтому обычно строят только половину годографа при этих

значениях аргумента. Заметим, что при $\omega = 0$ и $\omega = \frac{\pi}{T}$, годограф $B(e^{j\omega T})$ принимает вещественные значения:

$$B(e^{j\omega T}) \Big|_{\omega=0} = \sum_{i=0}^n b_i ;$$

$$B(e^{j\omega T}) \Big|_{\omega=\frac{\pi}{T}} = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_{n-i} .$$

С учетом сказанного, принцип аргумента для импульсных систем можно сформулировать следующим образом:

Число m корней многочлена $B(z)$, лежащих внутри единичной окружности, равно $\frac{r}{2}$, где r – число квадрантов, обходимых последовательно в положительном направлении годографом $B(e^{j\omega T})$ при изменении ω от 0 до $\frac{\pi}{T}$.

$$\Delta \arg B(e^{j\omega T}) = \pi m, 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

$$\Delta \arg B(e^{j\omega T}) = \frac{2\pi m}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 2m = \frac{\pi}{2} \cdot r.$$

Для устойчивости системы необходимо, чтобы $n=r/2$.

Примеры годографов, соответствующих устойчивым системам, при $n = 1, 2, 3$ показаны на рис.11.2.а.

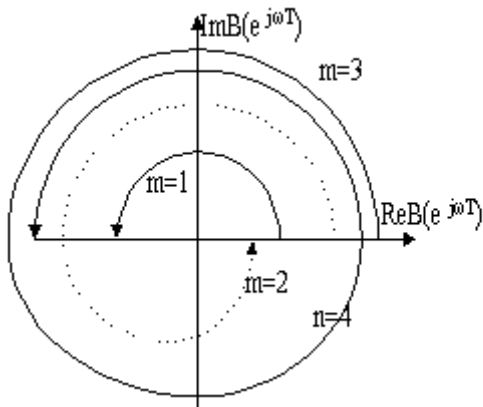


Рис 11.2.а

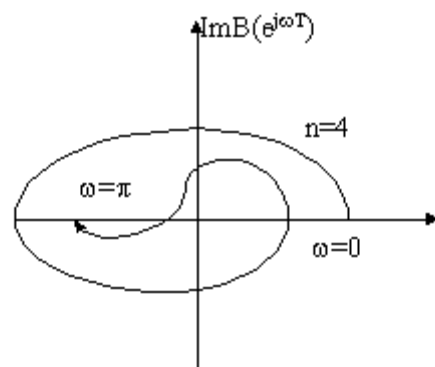


Рис.11.2.6

На рис.11.2.6 изображен годограф $B(e^{j\omega T})$ ($n=4$), который не удовлетворяет сформулированному условию устойчивости. Многочлен $B(z)$, соответствующий этому годографу, имеет один корень, лежащий внутри круга единичного радиуса, поскольку для него

$$\Delta \arg B(e^{j\omega T}) = 3\pi$$

и, следовательно, число корней, лежащих внутри круга единичного радиуса, равно $m=3$.

Прежде чем приступить к построению годографов $B(e^{j\omega T})$, целесообразно проверить необходимые условия, при которых все корни характеристического многочлена лежат внутри единичного круга. Эти условия следуют из принципа аргумента и имеют вид:

$$B(e^{j\omega T})|_{\omega=0} > 0, \quad B(e^{j\omega T})|_{\omega=\pi} < 0 \text{ для нечетного } n;$$

$$B(e^{j\omega T})|_{\omega=0} > 0, \quad B(e^{j\omega T})|_{\omega=\pi} > 0 \text{ для четного } n.$$

Если указанные условия не выполнены, то многочлен $B(z)$ заведомо имеет по крайней мере один корень вне единичной окружности. Если же эти условия соблюдаются, то следует воспользоваться принципом аргумента.

11.2. Анализ устойчивости импульсных систем с помощью критерия Найквиста.

Критерий устойчивости Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по ЧХ разомкнутой системы. Рассмотрим простейшую схему замкнутой системы (рис.11.3).

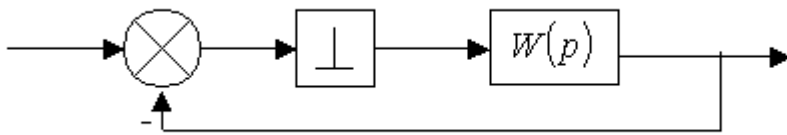


Рис. 11.3

Пусть $W(z)$ - z- передаточная функция разомкнутой ИС, которая в общем виде может быть представлена как отношение полиномов:

$$W(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Введем вспомогательную функцию

$$W_I(z) = 1 + W(z) = \frac{Q(z) + P(z)}{Q(z)} = \frac{Q_I(z)}{Q(z)},$$

где $Q_I(z)$ - характеристический многочлен замкнутой системы, $Q(z)$ - характеристический многочлен разомкнутой системы.

Подставим вместо $z = e^{j\omega T}$, получим:

$$W_I(e^{j\omega T}) = \frac{Q_I(e^{j\omega T})}{Q(e^{j\omega T})}.$$

Найдем приращение аргумента вектора $W_I(e^{j\omega T})$, когда переменная z совершает однократный обход единичной окружности $|z|=1$ в положительном направлении:

$$\Delta \arg W_I(e^{j\omega T}) = \Delta \arg Q_I(e^{j\omega T}) - \Delta \arg Q(e^{j\omega T}),$$

$$|z|=1, \quad -\pi < \arg z \leq \pi.$$

Допустим передаточная функция разомкнутой импульсной системы $W(z)$ имеет l полюсов вне единичного круга, тогда согласно принципу аргумента, получим :

$$\Delta \arg Q(e^{j\omega T}) = 2\pi(n-l),$$

$|z|=1, -\pi < \arg z \leq \pi$, n - порядок характеристического уравнения.

Допустим далее, что замкнутая система устойчива. Тогда все корни характеристического многочлена $Q_1(z)$ лежат внутри круга единичного радиуса. Учитывая, что порядки многочленов замкнутой и разомкнутой систем совпадают, будем иметь:

$$\Delta \arg Q_1(e^{j\omega T}) = 2\pi n,$$

$|z|=1, -\pi < \arg z \leq \pi$.

Подставляя полученные выражения в исходное, будем иметь:

$$\Delta \arg W_1(e^{j\omega T}) = 2l\pi, |z|=1, -\pi < \arg z \leq \pi.$$

Таким образом, получено условие устойчивости замкнутой импульсной системы.

Учитывая, что функция $W_1(e^{j\omega T})$ является симметричной относительно вещественной оси, при исследовании устойчивости строят как правило половину этого годографа, получаемого при изменении аргумента z в диапазоне от 0 до π , и, соответственно, условие устойчивости приобретает вид:

$$\Delta \arg W_1(e^{j\omega T}) = l\pi, |z|=1, 0 < \arg z \leq \pi.$$

Далее, переходя от вспомогательной функции $W_1(z)$ к $W(z)$ сформулируем условие устойчивости:

Пусть характеристическое уравнение разомкнутой ИС имеет l корней вне единичного круга плоскости Z . Тогда, для того, чтобы замкнутая ИС была устойчива необходимо и достаточно, чтобы годограф $W(e^{j\omega T})$ при изменении

$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$ охватывал точку $(-1, j0)$ на комплексной плоскости Z $l/2$ раз, т.е.

$$\Delta \arg W_1(e^{j\omega T}) = \pi l$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}.$$

Рассмотрим примеры применения этого критерия.

Пусть система неустойчива в разомкнутом состоянии и $l \neq 1$. На рис.11.4 представлены годографы ИС, устойчивой в замкнутом состоянии (1) и неустойчивой в замкнутом состоянии (2):

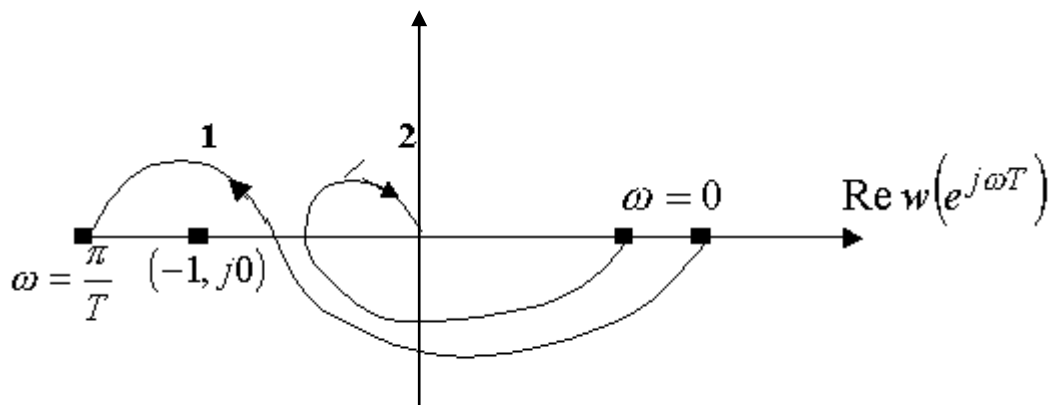


Рис.11.4

Далее, пусть разомкнутая ИС устойчива. Тогда годограф (3) соответствует устойчивой в замкнутом состоянии, а (4) – неустойчивой в замкнутом состоянии ИС (рис.11.5).

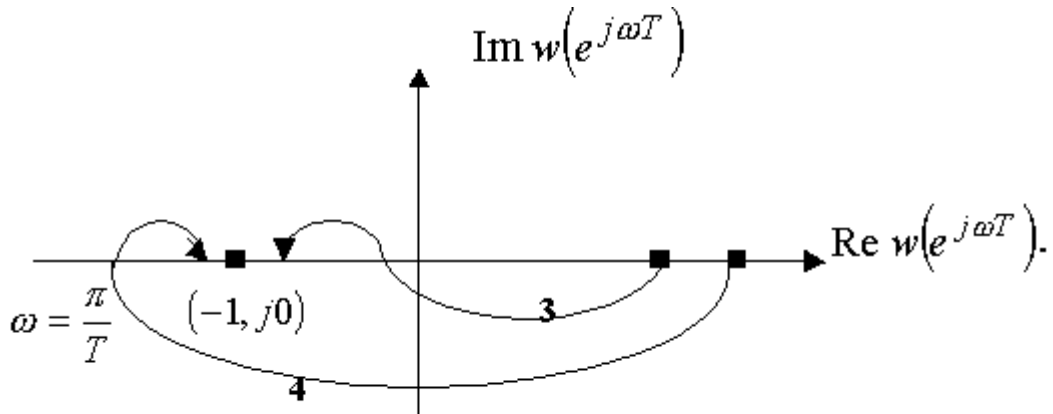


Рис.11.5

Случай, когда ПФ $W(z)$ разомкнутой ИС имеет полюса на единичной окружности плоскости z , относится к числу особых. В этом случае необходимо дополнить годограф ЧХ разомкнутой системы дугой бесконечного радиуса аналогично тому, как это делалось при исследовании непрерывных систем.

Обычно полюсами, лежащими на единичной окружности оказываются полюсы $z=1$, что соответствует наличию полюсов $p=0$ (интегрирующих звеньев) в передаточной функции ПНЧ. При этом годограф АФЧХ разомкнутой системы дополняется дугой бесконечного радиуса, охватывающей столько квадрантов, каков порядок полюса $z=1$.

Пусть $l=0$ и разомкнутая ИС имеет полюс $z=1$ 2-ого порядка. Годографы АФЧХ, представленные на рис.12.6 (1,3), соответствует системе неустойчивой в замкнутом состоянии, а годограф (2) – устойчивой.

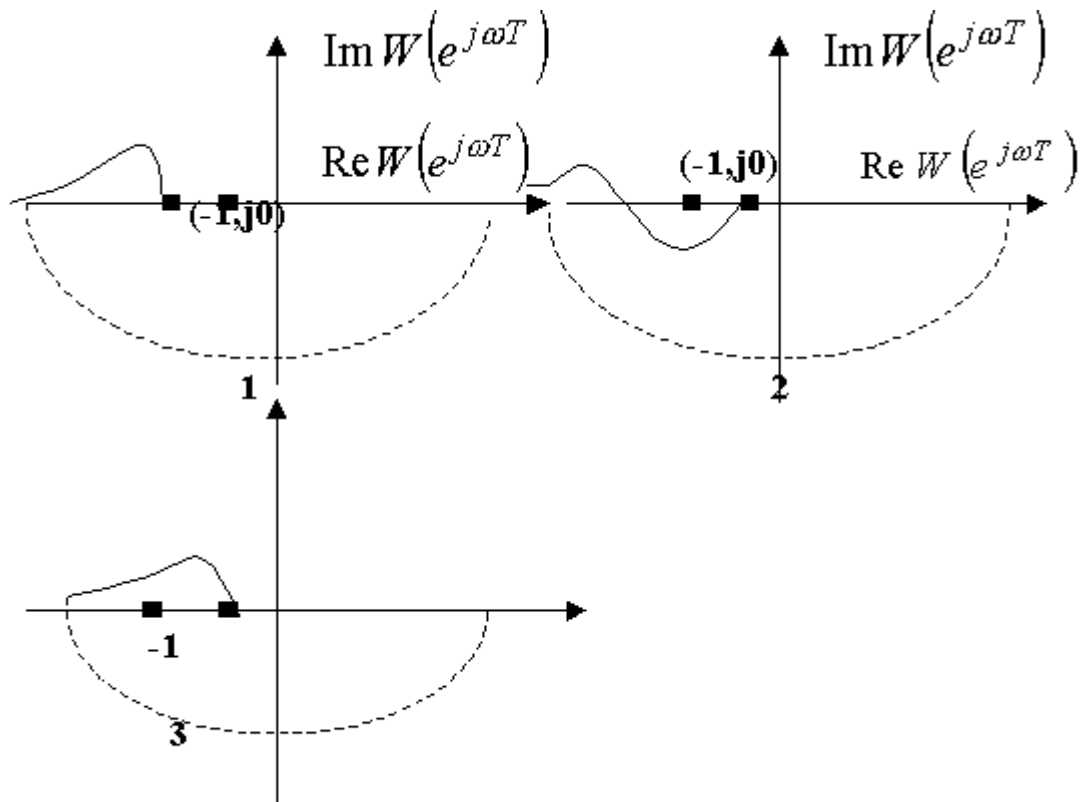


Рис.11.6

ЛЕКЦИЯ № 12

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ЛПЧХ.

План лекции:

1. Связь ЛЧХ с годографом Найквиста.
2. Критерий устойчивости ИС в терминах ЛПЧХ.
3. Критерий устойчивости ИС при наличии полюсов в разомкнутой системе.

Вернемся к структурной схеме ИС и рассмотрим, как должна себя вести псевдочастотная ЛАФХ разомкнутой системы (рис.12.1), для того, чтобы замкнутая система была устойчива.

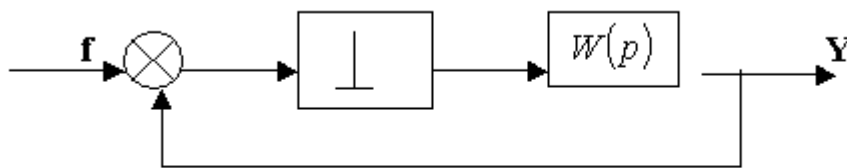


Рис.12.1

Отметим на годографе АФПЧ разомкнутой системы характерные частоты ω_1 и ω_2 , при $\omega = \omega_1$, $|W^*(j\omega)| = 1$; а при $\omega = \omega_2$, $\arg W^*(j\omega) = -\pi$ (рис.13.2).

Анализируя расположение АФПЧ устойчивой системы можно видеть, что $\omega_1 < \omega_2$.

Рассмотрим, как проявляется это свойство в псевдочастотных ЛАФЧ.

С формальной точки зрения ПЧ характеристика ИС аналогична по своим свойствам частотным характеристикам непрерывной системы. Псевдочастота изменяется в диапазоне от 0 до ∞ . ПЧ обладают свойствами асимптотичности.

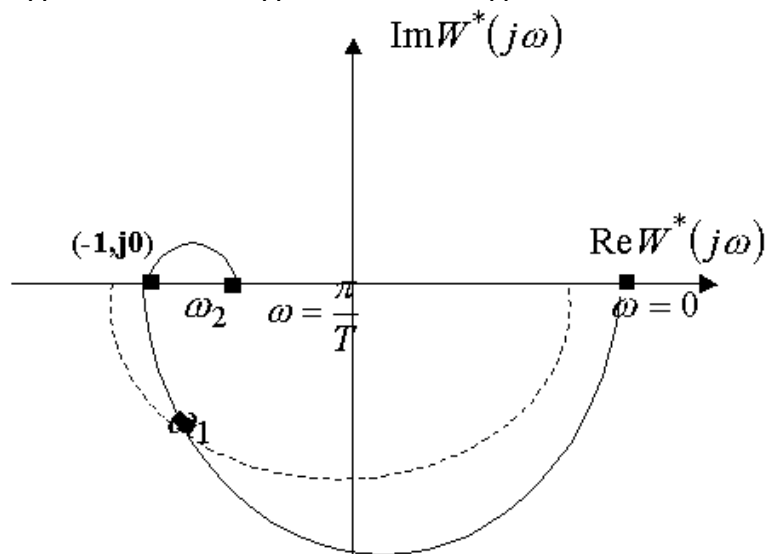


Рис.12.2

Управление мехатронными системами

Далее, поскольку критерий Найквиста для дискретных систем аналогичен критерию Найквиста для непрерывных систем, то все рассуждения связанные с формулировкой этого критерия в терминах ЛАФЧХ для непрерывных систем могут быть перенесены на дискретные системы с применением ПЧХ.

Формулировка:

Если разомкнутая ИС устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы в интервале псевдочастот, где ЛАПЧХ дискретной системы положительна, разность между числом положительных и отрицательных переходов ЛФПЧХ через линию $-\pi$ была равна нулю:

$$\Pi_+ - \Pi_- = 0.$$

При этом, как и ранее положительным переходом считается переход в сторону возрастания ЛФПЧХ, отрицательным – в сторону убывания ЛФПЧХ (рис.12.3).

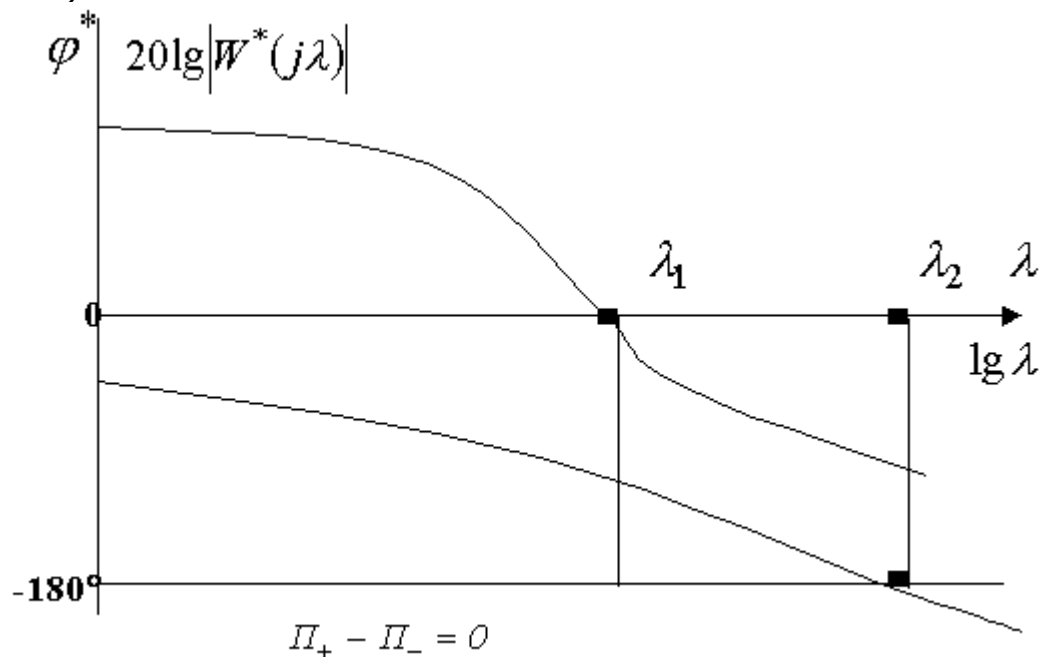


Рис.12.3

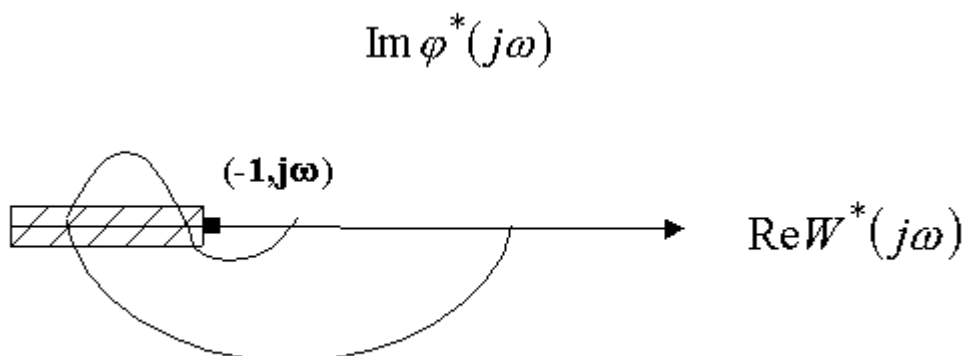


Рис.12.4

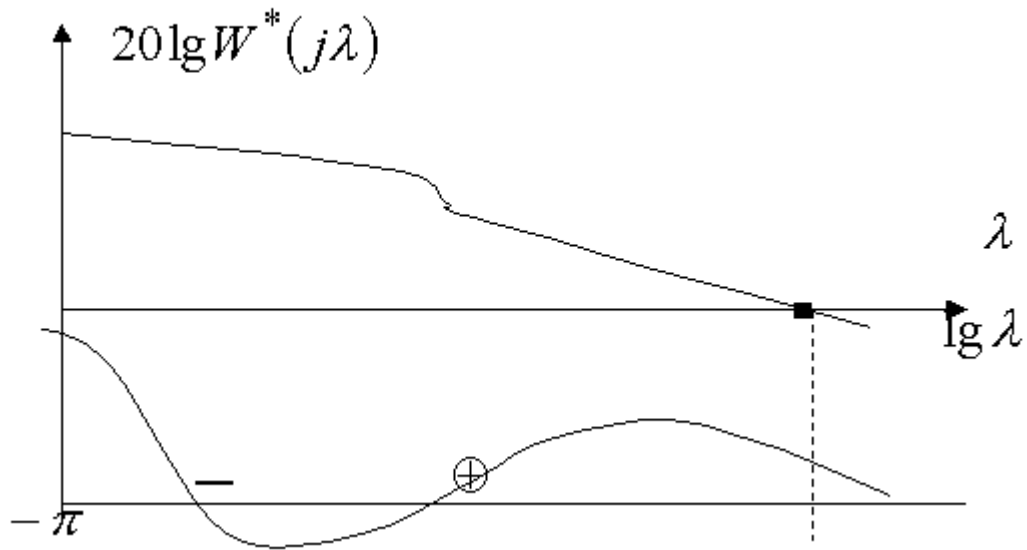


Рис.12.5

Если ПФ разомкнутой системы имеет полюсы, лежащие на единичной окружности, то при соответствующих значениях аргумента ЛАЧХ системы стремиться к бесконечности, а ФЧХ изменяется скачком на величину $\frac{-\pi r}{2}$, где r – порядок полюса.

Формулировка для ПЧХ:

Полюсу $Z=1$ соответствует $\omega = \lambda = 0$. Так как при $\omega = 0$ учитывается не вся величина скачка ФХ, а только его половина, то при исследовании устойчивости для $\lambda = 0$ следует дополнить ФХ скачком на $-\frac{\pi}{2}r$, где r – порядок полюса $Z=1$.

Пример:

Допустим Z – ПФ разомкнутой системы имеет полюс $Z=1$ второго порядка. Псевдочастотная ЛАФХ такой системы представлена на рисунке (12.6):

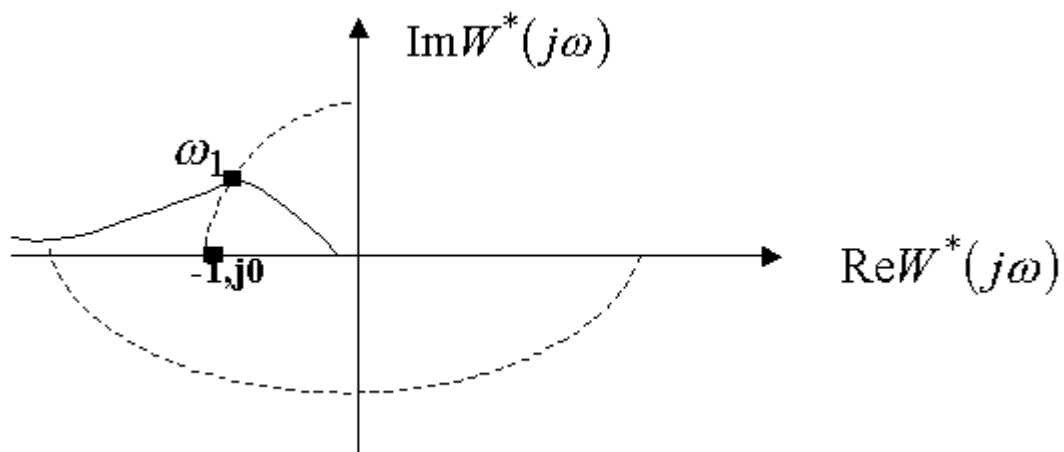


Рис.12.6

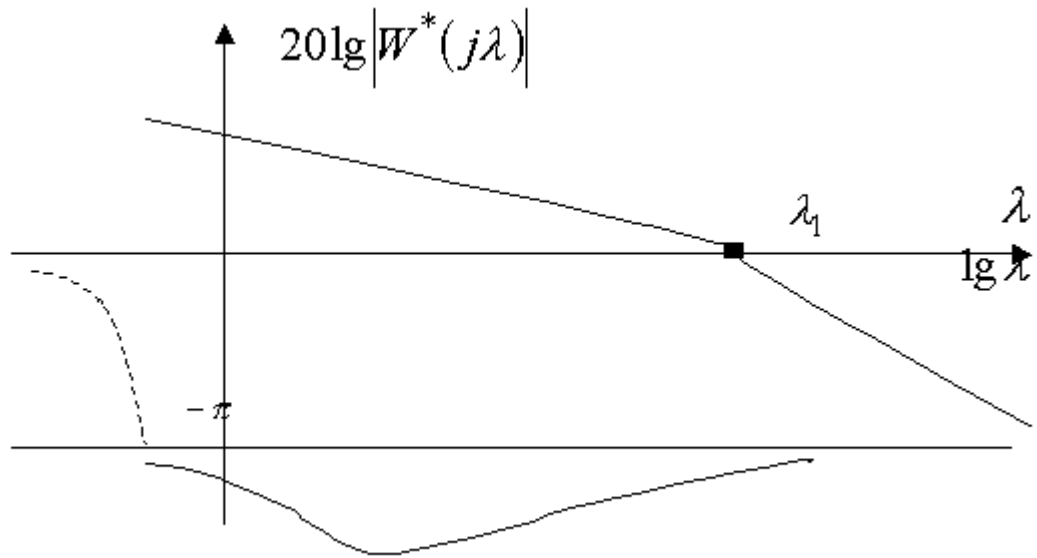


Рис.12.7

Дополняя ЛАФПЧ скачком величиной $-\pi$ при $\lambda = 0$, можно сделать вывод о том, что замкнутая система будет неустойчивой.

На рис.13.8 показана АФПЧ и ЛАФПЧ ИС, передаточная функция которой имеет полюс $z = 1$ второго порядка.

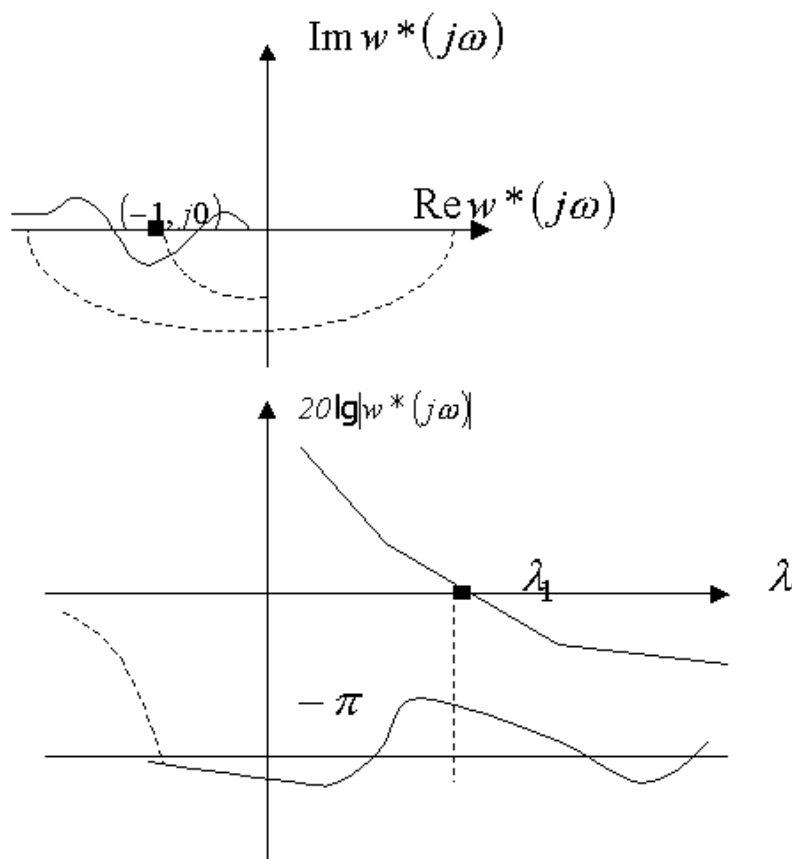


Рис.12.8

Дополняя ЛФЧХ скачком на $-\pi$, получим, что в интервале положительности ЛАЧХ число отрицательных переходов ЛФЧХ через линию $-\pi$ равно числу положительных переходов и, т.о. замкнутая система будет устойчивой.

Характерной особенностью использования логарифмического критерия для дискретных систем является то, что ЛФЧХ, как правило, заканчиваются на линии $-\pi$, т.е.:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi(\lambda) = -\pi;$$

Если при этом $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |W^*(j\lambda)| = \alpha > 1$, то замкнутая дискретная система будет неустойчива.

Для дискретных систем, также как и для непрерывных систем можно ввести понятия запасов устойчивости по амплитуде ΔA и по фазе $\Delta \varphi$ (рис.12.9).

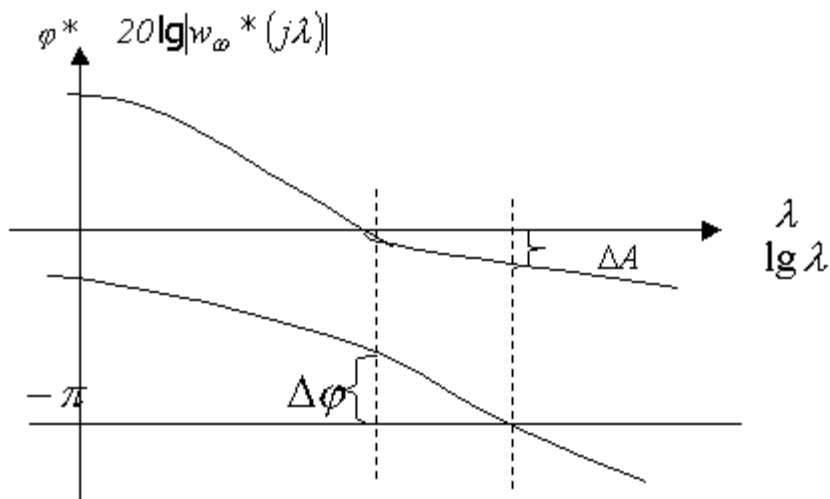


Рис.13.9

Запас устойчивости по амплитуде показывает, во сколько раз можно увеличить коэффициент передачи разомкнутой системы без потери устойчивости.

Запас по фазе показывает величину дополнительного допустимого фазового запаздывания, при котором система еще устойчива.

Аналогично непрерывным системам ΔA и $\Delta \varphi$ косвенно отображают динамические показатели системы.

ЛЕКЦИЯ № 13

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ В МОМЕНТЫ
КВАНТОВАНИЯ И МЕЖДУ НИМИ.

План лекции:

1. Понятие скрытых колебаний и причины их возникновения.
2. Анализ возможности появления скрытых колебаний.
3. Пример исследования устойчивости ИС.

Ранее, при рассмотрении частотных характеристик ИС, было показано, что z – ПФ ИС дает информацию о связи ее входа и выхода только в дискретные моменты времени. Поэтому, опираясь на z – преобразование, можно исследовать, соответственно, только так называемую «устойчивость ИС в дискретные моменты времени», которая означает затухание переходного дискретного процесса (рис.13.1).

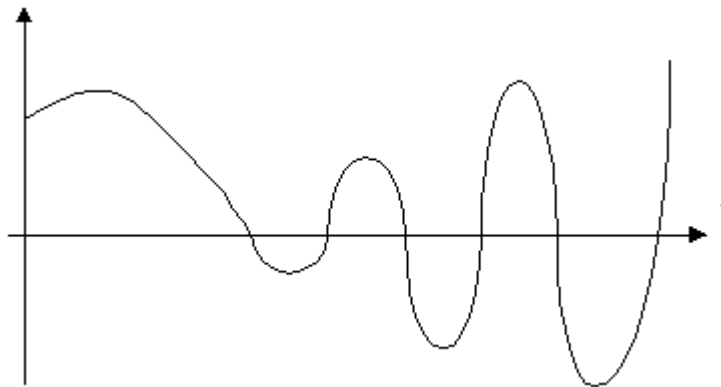


Рис.13.1.

Но система, устойчивая в дискретные моменты времени, может оказаться неустойчивой. Этот факт иллюстрирует рис.13.1., на котором показано, что затухающему импульсному переходному процессу $Y^*(t)$, может соответствовать расходящийся переходный процесс $Y(t)$ (пунктир). Это – так называемое явление скрытого раскачивания.

Для получения информации о процессах в моменты времени между моментами квантования предлагается рассматривать ПФ, полученные на основе модифицированного z – преобразования.

В тактовые моменты времени z – преобразование выходного сигнала имеет вид:

$$Y(z) = F(z) \cdot \frac{W(z)}{I + W(z)} .$$

Рассмотрим выходной сигнал системы, структурная схема которой приведена на рис.13.2, в смещенные моменты времени.

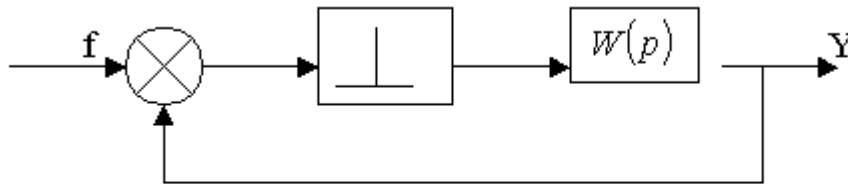


Рис.13.2

$$\begin{aligned}
 x(z) &= f(z) - y(z) & x(z) &= f(z) \cdot \frac{1}{1 + W(z)} \\
 y(z) &= x(z) \cdot W(z) & y(z, \varepsilon) &= x(z) \cdot W(z, \varepsilon) \\
 x(z)(1 + W(z)) &= f(z) & y(z, \varepsilon) &= F(z) \cdot \frac{W(z, \varepsilon)}{1 + W(z)}
 \end{aligned}$$

При этом ПФ замкнутой системы для смещенных моментов времени имеет вид:

$$\Phi(z, \varepsilon) = \frac{W(z, \varepsilon)}{1 + W(z)}$$

Пусть $W(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$, а модифицированная Z – ПФ - $W_1 = \frac{A_1(z)}{B_1(z)}$.

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) &= \frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{A(z)}{A(z) + B(z)} \\
 \Phi(z, \varepsilon) &= \frac{A_1/B_1}{1 + A/B} = \frac{A_1(z)}{B(z) + A(z)} \cdot \frac{B(z)}{B_1(z)}
 \end{aligned}$$

Так как нули многочленов $B_1(z)$ и $B_2(z)$ могут не совпадать, то очевидно, что модифицированная Z – ПФ $\Phi(z, \varepsilon)$ может иметь полюсы, не входящие в число особых точек ПФ $\Phi(z)$. При этом возможны следующие варианты. Если корни полиномов $A(z) + B(z)$ и $B_1(z)$ удовлетворяют условиям устойчивости, т. е. имеют модули, меньше единицы, то система устойчива как в тактовые моменты времени, так и между ними.

Если имеются корни $B_1(z)$, такие, что $|z| > 1$, а корни полинома $A(z) + B(z)$ удовлетворяют условиям устойчивости, то система устойчива в тактовые моменты времени и неустойчива в промежутках между тактами. Это соответствует скрытым колебаниям. При этом на выходе ИИЭ сигнал отсутствует, хотя в системе могут существовать колебания. Отметим, что все способы оценки устойчивости, рассмотренные ранее, определяют устойчивость только в тактовые моменты времени $t = kT, k = 0, 1, \dots$

ЛЕКЦИЯ №14

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ОПИСАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ.

План лекции:

1. Определение решетчатой функции.
2. Основы теории решетчатых функций.
3. Пространство состояний дискретной системы.

14.1. Некоторые сведения из теории решетчатых функций.

В предыдущих лекциях мы рассмотрели описание дискретных систем с помощью ПФ и ЧХ.

Альтернативным подходом к описанию и исследованию таких систем является подход, основанный на использовании понятий пространства состояний.

Этот подход является весьма плодотворным, получившим в последнее время широкое распространение. Он основан на теории решетчатых функций и конечно-разностных уравнений.

Рассмотрению методов пространства состояний в теории дискретных систем и посвящены несколько следующих лекций.

Как уже отмечалось ранее, процессы в импульсных системах описываются решетчатыми функциями времени, то есть функциями, определенными в тактовые моменты времени $t=kT$, $k=0,1,2,\dots$

Любая числовая последовательность некоторой величины, определенная в дискретные моменты времени, может быть представлена решетчатой функцией. Также любой непрерывной функции $f(t)$ может быть поставлена в соответствие решетчатая функция $f[kT]$ по закону:

$$f[kT] = f(t)_{t=kT} .$$

Выделенные значения представляют собой дискреты исходной непрерывной функции в моменты времени $t=kT$. Дискреты могут определяться и для смещенных моментов времени:

$$t = kT + \varepsilon T, |\varepsilon| < 1 .$$

Напомним понятие конечной разности решетчатой функции.

Выражение $\Delta f[k] = f[k+1] - f[k]$ называется *прямой* конечной разностью первого порядка.

Выражение $\nabla f[k] = f[k] - f[k-1]$ называется *обратной* конечной разностью первого порядка.

Конечные разности могут быть получены и для смещенных решетчатых функций.

Первая разность решетчатой функции $\Delta f[k]$ называется *прямой* разностью второго порядка решетчатой функции:

$$\Delta^2 f[k] = \Delta f[k+1] - \Delta f[k] .$$

Аналогично определяется прямая разность произвольного порядка:

$$\Delta^n f[k] = \Delta^{n-1} f[k+1] - \Delta^{n-1} f[k] .$$

Разность любого порядка может быть выражена через значение решетчатой функции. Соответствующее выражение имеет вид:

$$\Delta^n f[k] = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_i^n f[k+n-i] \quad (14.1)$$

$$\text{где } C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

14.2. Основы теории разностных уравнений.

Рассмотрим основные сведения из теории разностных уравнений.

Соотношение

$$F(k, y[k], \Delta y[k], \dots, \Delta^n y[k]) = 0, \quad (14.2)$$

связывающее решетчатую функцию и ее конечные разности до некоторого порядка n, называется однородным разностным уравнением.

Используя уравнение (14.1), уравнение (14.2) можно привести к виду:

$$y[k+n] = F_1(k, y[k], y[k+1], \dots, y[k+n-1]) \quad (14.3)$$

Если уравнение (15.3) содержит в явном виде $y[k]$ и $y[k+n]$, оно представляет собой уравнение порядка n .

В отличие от непрерывных систем, в разностных уравнениях замена независимой переменной может привести к понижению порядка уравнения.

Рассмотрим пример:

$$x[k+3] - 2x[k+2] + 3x[k+1] = 0.$$

Введем новую переменную: $m=k+1$, получим:

$$x[m+2] - 2x[m+1] + 3x[m] = 0.$$

Таким образом, уравнение является уравнением второго порядка, несмотря на то, что исходное уравнение содержит разность третьего порядка.

Соотношение вида:

$$y[k+n] + a_1 y[k+n-1] + \dots + a_n y[k] = b_0 f[k+n] + b_1 f[k+n-1] + \dots + b_n f[k]$$

называется *линейным неоднородным разностным уравнением*. Здесь $a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ - коэффициенты уравнения, $y[k]$ - искомая, $f[k]$ - заданная решетчатые функции.

Применительно к ИС можно сказать, что разностное уравнение устанавливает динамическую связь между входом и выходом системы в тактовые моменты времени.

Положив $f[k]=0$, получим однородное конечно-разностное уравнение:

$$y[k+n] + a_1 y[k+n-1] + \dots + a_n y[k] = 0. \quad (14.4)$$

Рассмотрим операторную форму записи линейных разностных уравнений. Введем оператор сдвига E , его применение к решетчатой функции будет соответствовать смещению аргумента:

$$Ey[k] = y[k+1]$$

.....

$$E^n y[k] = y[k+n]$$

Тогда разностное уравнение (15.3) может быть записано в следующей форме:

$$[E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n]y[k] = [b_0 E^n + b_1 E^{n-1} + \dots + b_n]f[k]$$

Рассмотрим решение линейного однородного разностного уравнения (14.4). С использованием оператора сдвига уравнение можно записать в виде:

$$[E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n]y[k] = 0$$

Решение ищется в виде:

$$y_0[k] = z^k$$

Тогда:

$$E^n y_0[k] = z^{k+n}$$

и с учетом этого:

$$(z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)z^k = 0$$

Таким образом, для того, чтобы $y_0[k] = z^k$ было решением однородного разностного уравнения, необходимо, чтобы z было корнем уравнения:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (14.5)$$

Рассмотрим случай, когда корни z_1, \dots, z_n уравнения (14.5) различны. Тогда решения, соответствующие z_1, \dots, z_n , образуют так называемую *фундаментальную* систему и общее решение имеет вид:

$$y[k] = \sum_{i=1}^n c_i z_i^k.$$

Из приведенных зависимостей легко видеть, что необходимым и достаточным условием затухания решения однородного уравнения является выполнение условия:

$$|z_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n. \quad (14.6)$$

Общее решение неоднородного конечно-разностного уравнения (14.3) определяется суммой:

$$y[k] = y_0[k] + \tilde{y}[k],$$

где:

$y_0[k]$ - общее решение однородного уравнения,

$\tilde{y}[k]$ - частное решение неоднородного уравнения.

Как и в случае непрерывных автоматических систем, общее решение однородного уравнения $y_0[k]$ соответствует свободным движениям дискретной системы, а частное решение $\tilde{y}[k]$ - вынужденному движению.

При выполнении условий (14.6) в системе, при $k \rightarrow \infty$ устанавливается вынужденное движение.

14.3 Пространство состояний дискретной системы.

Пусть процессы в дискретной системе характеризуются переменными x_1, x_2, \dots, x_p , которые изменяются под влиянием входных воздействий u_1, u_2, \dots, u_m .

Если набор переменных x оказывается таким, что знание этих значений в некоторый начальный момент вместе с заданием входных воздействий u_1, u_2, \dots, u_m оказывается достаточным для того, чтобы определить последующие значения переменных x_i , то набор можно назвать полным.

Полный набор переменных может обладать избыточной информацией о поведении системы, например, некоторые переменные могут оказаться излишними, дублировать другие.

Переменные $x = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$, принадлежащие минимальному полному набору, назовем переменными состояния системы.

Таким образом, состояние системы может быть охарактеризовано как минимальная информация о системе, достаточная для описания ее настоящего и будущего при известном входе. Если при этом переменные состояния принадлежат n - мерному Евклидову пространству X , то пространство X называют пространством состояний системы.

Пояснения:

Евклидовым пространством называется линейное действительное пространство, в котором введено понятие скалярного произведения векторов.

$$(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y})$$

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = \vec{x}_1 \vec{y} + \vec{x}_2 \vec{y}.$$

Число переменных состояния обычно превышает число реально интересующих нас физических величин, по которым оценивается качество работы системы. При этом необходимо отметить, что переменные состояния необязательно являются физическими измеряемыми переменными, характеризующими отдельные элементы системы. В общем случае переменные состояния - абстрактные переменные, хотя они, конечно, могут совпадать с выходными переменными системы Y .

Выходные переменные системы Y выражаются через переменные состояния системы, то есть:

$$y_j = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n), j = 1, 2, \dots, r, \quad r \leq n. \quad (14.7)$$

Для линейных систем уравнения, описывающие изменение переменных состояния, и функции $\varphi_j, j=1, 2, \dots, r$ - являются линейными.

Представление системы в переменных состояния неоднозначно. Существует множество минимальных полных наборов переменных состояния, равнозначных с точки зрения математического описания системы.

Поясним это на примере:

Координаты точки в n - мерном пространстве зависят от выбора базиса. Изменением базиса можно перейти от переменных x к переменным \tilde{x} . Переход можно осуществить с помощью неособого преобразования:

$$\tilde{x} = Mx,$$

где M - матрица $(n \times n)$, $\det M \neq 0$. Для каждого неособого преобразования существует обратное преобразование:

$$x = M^{-1}\tilde{x}.$$

Форма уравнений в переменных состояния, весьма удобная для математических исследований благодаря единообразию и простоте структуры уравнений, давно использовалась в математике и механике. В частности, именно ее использовал А.М.Ляпунов в своих классических работах по устойчивости движения.

В 40-50-тых годах в теории управления стала преобладать форма уравнений в физических переменных, широко использовалось операционное исчисление и преобразование Лапласа. Это объяснялось стремлением инженеров использовать хорошо физически интерпретируемые графоаналитические характеристики вроде частотных характеристик и корневых годографов, а также их стремлением иметь дело с физическими переменными не только в конце, но и на всех этапах анализа, чтобы иметь возможность ощущать все физические свойства и вносить коррективу в схему и параметры в процессе исследования.

Но объективные потребности практики повлекли за собой существенное усложнение автоматических систем. Это усложнение систем, резкое повышение их размерности, необходимость учета возможного изменения параметров, учета нелинейностей, при которых точные методы применить невозможно, привели к тому, что с 50-60-х годов интерес к уравнениям в переменных состояния снова возродился, и в настоящее время методы пространства состояний являются наиболее перспективным подходом исследования САУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ли К. Основы САПР (CAD/ CAM/ CAE). – СПб.: Питер, 2004. – 560 с.
2. Норенков И.П. Кузьмик П.К. Информационная поддержка наукоемких изделий. CALS – технологии. – М.: Изд-во МГТУ им.Баумана, 2002. – 320 с.
3. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования: Учеб. для вузов: Учеб. Для вузов. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 336.
4. Проектирование следящих систем. /Под ред. Н.А. Лакоты - Москва, Машиностроение, 1992г. - 352 стр