

Оглавление

Введение.....	5
Глава 1. ОСНОВЫ СТАТИКИ.....	6
1.1. Материальная точка. Абсолютно твердые и деформируемые тела.....	6
1.2. Сила – вектор. Единицы измерения сил.....	7
1.3. Система сил. Эквивалентность сил. Равнодействующая и уравнивающая силы.....	9
1.4. Аксиомы статики. Закон инерции (первая аксиома).....	10
1.5. Условие равновесия двух сил (вторая аксиома). Принцип присоединения и исключения уравновешенных сил (третья аксиома).....	11
1.6. Правило параллелограмма (четвертая аксиома).....	13
1.7. Связи и их реакции.....	14
1.8. Сложение плоской системы сходящихся сил. Геометрическое условие равновесия.....	15
1.9. Определение равнодействующей системы сходящихся сил методом проекций.....	17
1.10. Пара сил.....	21
1.11. Момент силы относительно точки.....	23
1.12. Уравнения равновесия плоской системы параллельных сил.....	23
1.13. Типы опор балок.....	25
1.14. Приведение силы к точке.....	27
Глава 2. ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ.....	28
2.1. Деформация тел под действием внешних сил.....	28
2.2. Внешние силы, внутренние силы упругости и напряжения.....	29
2.3. Действительные, предельно опасные и допускаемые напряжения.....	30
2.4. Определение внутренних сил упругости.....	32
2.5. Расчеты на прочность.....	33
2.6. Распределение напряжений при растяжении.....	34
2.6.1. Зависимость между напряжением и относительным удлинением.....	34
2.6.2. Расчеты на прочность при растяжении, сжатии..	37

2.7.	Распределение напряжений при сдвиге.....	37
2.8.	Распределение напряжений при кручении.....	38
2.8.1.	Расчеты на прочность при кручении.....	40
2.9.	Особенность деформации изгиба.....	41
2.10.	Распределение нормальных напряжений при изгибе.....	43
2.10.1.	Расчеты на прочность при изгибе.....	47
2.10.2.	Определение опасного сечения при изгибе.....	48
2.11.	Продольный изгиб.....	51
2.12.	Сложное сопротивление.....	52
2.13.	Расчет на прочность балки при сложном сопротивлении.....	53
2.13.1.	Построение эпюры продольных сил.....	53
2.13.2.	Построение эпюры изгибающих моментов.....	55
2.13.3.	Определение геометрических характеристик сечения балки, расчет на прочность.....	55
Глава 3.	ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ.....	57
3.1.	Поступательное движение твердого тела.....	57
3.2.	Скорости и ускорения точек вращающегося тела.....	58
3.3.	Понятие о плоско-параллельном движении твердого тела.....	60
3.4.	Аксиомы динамики.....	62
3.5.	Понятие о силах инерции. Метод кинетостатики.....	64
Глава 4.	ОСНОВЫ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН.....	66
4.1.	Структура механизмов. Основные определения. Образование механизмов по Ассуру.....	66
4.2.	Планы положений, скоростей и ускорений точек звеньев механизмов.....	73
4.2.1.	Построение заданного положения механизма.....	74
4.2.2.	Построение плана скоростей для заданного положения механизма.....	76
4.2.3.	Построения плана ускорений для заданного положения механизма.....	77
4.3.	Определение сил инерции в механизма.....	80
4.4.	Силовой расчет механизмов. Определение реакций в кинематических парах.....	83
4.5.	Кинематический анализ передач.....	89
4.6.	Передача цилиндрическими зубчатыми колесами.....	92
4.7.	Геометрические элементы зубчатого зацепления.....	94
Литература.....		96

Введение

При подготовке специалистов-управленцев для предприятий машиностроения наряду со специальными знаниями, такими, как психология, маркетинг, экономика отрасли, организация производства и другими, будущему специалисту необходимы знания объекта управления. Он должен знать основы всех этапов подготовки и производства машины: конструирования, разработки технологического процесса, экономического обоснования и организации производства.

В курсе «Техническая механика» студент изучает основы теоретической механики, теории механизмов и машин, сопротивления материалов. Это позволит ему в дальнейшем понимать общие принципы реализации движения с помощью механизмов, знать, как определяются усилия, возникающие при работе механизмов, и как на основе этого проводить прочностные расчеты звеньев механизмов.

Выбор и проектирование схемы механизма является первым и основным этапом проектирования машины, началом конструирования машины. В курсе «Техническая механика» рассматривается кинематическая схема механизма, которая является «скелетом» реальной конструкции.

Дальнейшую инженерную составляющую знаний студент получает, изучая дисциплины «Конструкторская подготовка производства», «Технологическая подготовка и технология производства машин» и др.

Глава 1. ОСНОВЫ СТАТИКИ

1.1. Материальная точка.

Абсолютно твердые и деформируемые тела

Остановимся на основных понятиях статики, которые вошли в науку как результат многовековой практической деятельности человека.

Одно из таких основных понятий – понятие *материальной точки*. Тело можно рассматривать как материальную точку, т.е. его можно представить геометрической точкой, в которой сосредоточена вся масса тела, в том случае, когда размеры тела не имеют значения в рассматриваемой задаче. Например, при изучении движения планет и спутников их считают материальными точками, так как размеры планет и спутников пренебрежимо малы по сравнению с размерами орбит. С другой стороны, изучая движение планеты (например, Земли) вокруг оси, ее уже нельзя считать материальной точкой. Тело можно считать материальной точкой во всех случаях, когда при движении все его точки имеют одинаковые траектории.

Системой называется совокупность материальных точек, движения и положения которых взаимозависимы. Из этого следует, что любое физическое тело можно рассматривать как систему материальных точек.

При изучении равновесия тела считают абсолютно твердыми, недеформируемыми (или абсолютно жесткими), т.е. предполагают, что никакие внешние воздействия не вызывают изменения их размеров и формы и что расстояние между любыми двумя точками тела всегда остается неизменным. В действительности все тела под влиянием силовых воздействий со стороны других тел изменяют свои размеры и форму. Так, если стержень, например, из стали или дерева, сжать, его длина уменьшится, а при растяжении она соответственно увеличится (рис. 1, а). Изменяется также форма стержня, лежащего на двух опорах, при действии нагрузки, перпендикулярной его оси (рис. 1, б). Стержень при этом изгибается.

В подавляющем большинстве случаев деформации тел (деталей), из которых состоят машины, аппараты и сооружения, очень малы, и при изучении движения и равновесия этих объектов деформациями можно пренебречь. Таким образом, понятие абсолютно твердого тела является условным (абстракцией). Это понятие вводят

с целью упрощения исследования законов равновесия и движения тел. Лишь изучив механику абсолютно твердого тела, можно приступить к изучению равновесия и движения деформируемых тел, жидкостей и др. При расчетах на прочность, рассматриваемых после изучения статики абсолютно твердого тела, необходимо учитывать деформации тел. В этих расчетах деформации играют существенную роль и пренебрегать ими нельзя.

1.2. Сила – вектор. Единицы измерения сил

В механике вводится понятие *силы*, которое чрезвычайно широко используется и в других науках. Физическая сущность этого понятия ясна каждому человеку непосредственно из опыта.

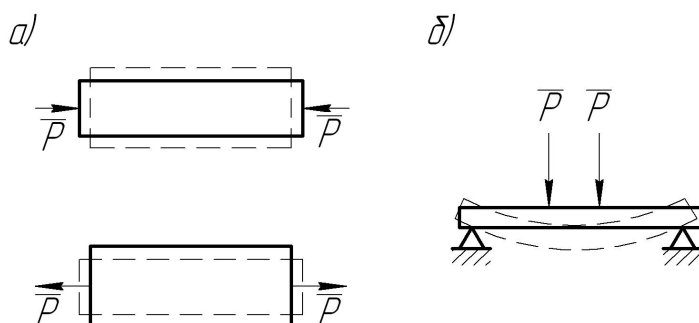


Рис.1. Деформация тел под действием силы:
а – деформации сжатия – растяжения; б – деформация изгиба

Остановимся на определении силы для абсолютно твердых тел. Эти тела могут вступать во взаимодействие, в результате которого изменяется характер их движения. *Сила – это мера взаимодействия тел.* Например, взаимодействие планет и Солнца определяется силами тяготения, взаимодействие Земли и различных тел на ее поверхности – силами тяжести и т.д.

Следует подчеркнуть, что при взаимодействии реальных, а не абсолютно твердых тел, возникающие силы могут не только приводить к изменению характера их движения, но и вызывать изменение формы или размеров этих тел. Иными словами, в реальных физических телах силы служат причиной возникновения деформаций.

Механика рассматривает и изучает не природу действующих сил, а производимый ими эффект. Эффект действия силы определяется тремя факторами, полностью её определяющими:

- 1) направлением и линией действия;
- 2) численным значением (модулем);
- 3) точкой приложения.

Иными словами, сила является *векторной величиной*.

Кроме сил, в механике часто встречаются другие векторные величины – в частности, скорость, ускорение.

Величина, не имеющая направления, называется *скаляром*, или *скалярной величиной*. К скалярным величинам относятся, например, время, температура, объем и др.

Вектор изображается отрезком, на конце которого ставится стрелка. Направление стрелки указывает направление вектора, длина отрезка – величину вектора, отложенную в выбранном масштабе.

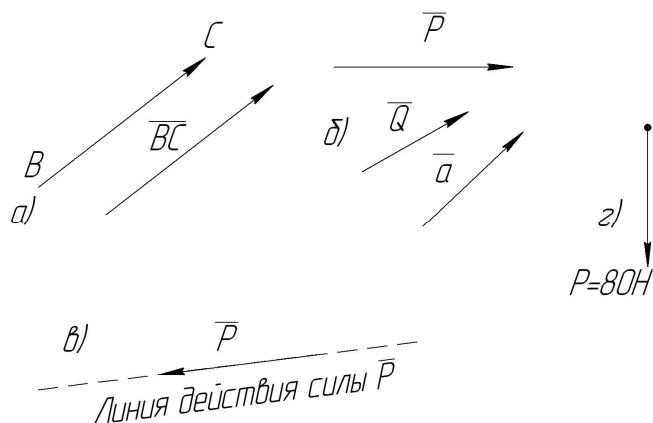


Рис. 2. Изображение векторов сил на чертежах

Вектор, имеющий начало в точке B и конец в точке C (рис. 2, а), можно обозначить теми же буквами, но с черточкой наверху: \overrightarrow{BC} , причем на первом месте ставят букву, стоящую в начале вектора, а затем букву, стоящую в конце вектора. Иногда вектор обозначают буквой: \overrightarrow{P} , \overrightarrow{Q} , \overrightarrow{a} , и т.д. (рис. 2, б).

Линией действия силы называют прямую, на которой лежит вектор силы (рис. 2, в).

Если необходимо показать на чертеже величину вектора, его изображают стрелкой, рядом с которой записывают величину, или модуль. Величина вектора обозначается той же буквой, что и сам вектор, но без черточки наверху (рис. 2, г).

Модуль, или величина силы, является количественной характеристикой меры взаимодействия тел. Величина силы в Международной системе единиц (СИ) измеряется в ньютонах (H). Применяют также и более крупные единицы измерения: 1 килоньютон ($1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$), 1 меганьютон ($1 \text{ МН} = 10^6 \text{ Н}$).

1.3. Система сил. Эквивалентность сил. Равнодействующая и уравнивающая силы

Совокупность нескольких сил, приложенных к телу, точке или системе точек и тел, называется *системой сил*.

Системы сил классифицируют в зависимости от взаимного расположения в пространстве линий действия сил, составляющих данную систему.

Так система сил, линии действия которых лежат в разных плоскостях, называется *пространственной*. Если же линии действия рассматриваемых сил лежат в одной плоскости, система сил называется *плоской*. Система сил с пересекающимися в одной точке линиями действия называется *сходящейся*. Сходящаяся система сил может быть как пространственной, так и плоской. Наконец, различают еще *систему параллельных сил*, которая также может быть пространственной или плоской.

Две системы сил называют *эквивалентными*, если, взятые порознь, они оказывают одинаковое действие на тело. Из этого определения следует, что две системы сил, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой. Любую сложную систему сил всегда можно заменить более простой эквивалентной ей системой сил.

Одну силу, эквивалентную данной системе сил, называют *равнодействующей* этой системы.

Силу, равную по величине равнодействующей и направленную по той же линии действия, но в противоположную сторону, называют *уравнивающей силой*. Если к системе сил добавлена

уравновешивающая сила, то полученная новая система находится в равновесии и, как говорят, эквивалентна нулю.

Силы, действующие на систему материальных точек, подразделяются на две группы: *силы внешние* и *силы внутренние*.

Внешними называют силы, с которыми действуют на точки данной системы другие тела, не входящие в эту систему. Внутренними силами системы называют силы взаимодействия материальных точек, входящих в одну систему. Так, для любого тела, расположенного на поверхности Земли, внешней силой является сила тяжести. Под действием внешних сил в телах возникают внутренние силы. Эти внутренние силы, возникающие между точками твердых тел, исследуют в сопротивлении материалов и в теории упругости. При этом широко применяют законы статики твердого тела.

1.4. Аксиомы статики.

Закон инерции (первая аксиома)

Статика основана на некоторых положениях (аксиомах), вытекающих из опыта и принимаемых без доказательств. Общие положения механики были систематизированы Ньютоном. Эти положения служат основой статики и приводятся ниже как аксиомы.

Аксиомы статики устанавливают основные свойства сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

Выводы и уравнения статики, исходящие из этих аксиом, полностью справедливы только для абсолютно твердых тел. Однако, как отмечалось выше, таких абсолютно твердых тел в природе не существует. При дальнейшем изучении механики положения статики будут применяться (с некоторыми ограничениями, о которых сказано во второй главе) к упругим телам, деформирующимся под действием приложенных сил.

Остановимся на первой аксиоме, которая под названием закона инерции была впервые сформулирована Галилеем. *Система сил, приложенная к материальной точке, является уравновешенной, если под ее воздействием точка находится в состоянии относительного покоя или движется равномерно и прямолинейно.* Прямолинейным движением называется движение по прямой линии; оно является равномерным, если точка в равные промежутки времени проходит равные пути.

Рассматривая первую аксиому, нетрудно установить, что уравновешенная система сил эквивалентна нулю.

Следует отметить, что тело, в отличие от точки, под действием уравновешенной системы не обязательно будет находиться в покое или двигаться равномерно и прямолинейно. Возможен случай, когда уравновешенная система сил вызовет равномерное вращение тела вокруг некоторой закрепленной оси.

Итак, если на тело действует уравновешенная система сил, то тело либо находится в состоянии относительного *покоя*, либо движется *равномерно и прямолинейно*, либо, наконец, *равномерно вращается* вокруг неподвижной оси.

Можно также утверждать, что одно из трех указанных состояний тела является необходимым и достаточным признаком того, что система сил, действующих на это тело, находится в равновесии.

1.5. Условие равновесия двух сил (вторая аксиома). Принцип присоединения и исключения уравновешенных сил (третья аксиома)

Вторая аксиома устанавливает условие равновесия двух сил.

Две равные между собой по величине силы ($P_1 = P_2$), приложенные к абсолютно твердому телу и направленные по одной прямой в противоположные стороны, взаимно уравновешиваются (рис. 3, а).

Третья аксиома служит основой для преобразования систем сил.

Не нарушая равновесия абсолютно твердого тела, к нему можно приложить или отбросить от него уравновешенную систему сил.

Пусть тело (рис. 3, б) находится в состоянии равновесия. Если к нему приложить несколько взаимно уравновешенных сил $\overline{P}_1 = \overline{P}_2$, $\overline{Q}_1 = \overline{Q}_2$, $\overline{N}_1 = \overline{N}_2$, то равновесие тела не нарушится. Аналогичный эффект получится при отбрасывании этих уравновешенных сил. Системы сил, показанные на рис. 3, а, б, эквивалентны, так как они дают одинаковый эффект – под действием каждой из них тело находится в равновесии.

Из второй аксиомы вытекает следствие, согласно которому *всякую силу, действующую на абсолютно твердое тело, можно перенести вдоль линии ее действия в любую точку тела, не нарушив при этом его равновесие.*

Действительно, пусть на тело в точке A действует сила \vec{P}_1 (рис. 3, в). В произвольной точке B на линии действия силы \vec{P}_1 приложим две силы \vec{P}_2 и \vec{P}_3 , равные по величине \vec{P}_1 и направленные в противоположные стороны. Равновесие тела в этом случае не нарушится; отбрасывание сил \vec{P}_1 и \vec{P}_3 , как равных и противоположно направленных, также не нарушит равновесия. Таким образом, силу \vec{P}_1 мы заменили равной силой \vec{P}_2 , перенесенной по линии действия \vec{P}_1 из точки A в точку B . Векторы, которые можно переносить по линии их действия, называют *скользящими*. Как показано выше, сила является *скользящим вектором*. Необходимо подчеркнуть, что перенос силы по линии ее действия возможен только в том случае, когда тела рассматриваются как абсолютно твердые. При других предположениях это невозможно.

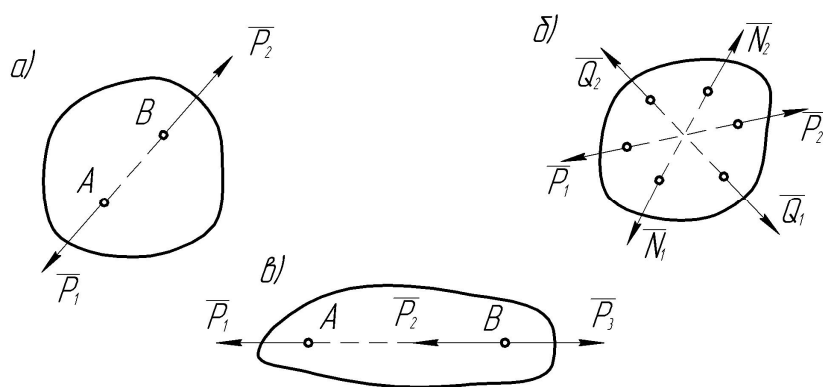


Рис. 3. Уравновешенные системы сил

1.6. Правило параллелограмма

(четвертая аксиома)

Четвертая аксиома служит основой для сложения сил. *Равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке, приложена в этой точке и изображается по величине и направлению диагональю параллелограмма, построенного на данных силах.* Так равнодействующей двух сил \vec{P} и \vec{Q} , приложенных в точке A (рис. 4, а), будет сила \vec{R} , представляющая диагональ параллелограмма $ACDB$, построенного на векторах заданных сил. Определение равнодействующей двух сил по правилу параллелограмма называется *векторным, или геометрическим, сложением* и выражается векторным равенством

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}.$$

При графическом определении равнодействующей двух сил вместо правила параллелограмма можно пользоваться правилом треугольника.

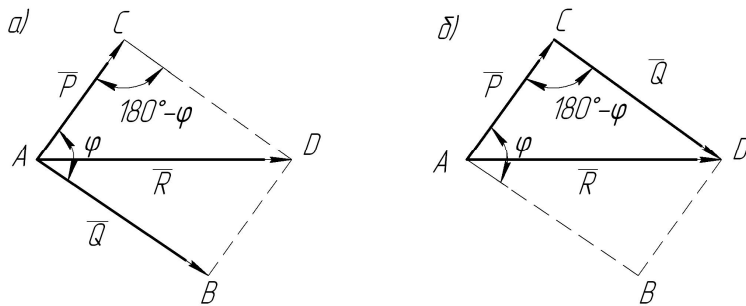


Рис. 4.Сложение двух сил

Из произвольной точки A (рис. 4, б) проводим, сохраняя масштаб и заданное направление, вектор первой составляющей силы \vec{P} , из его конца проводим вектор, параллельный и равный второй составляющей силе \vec{Q} . Замыкающая сторона AD треугольника и будет искомой равнодействующей \vec{R} . Ее можно также представить как диагональ параллелограмма $ABDC$, построенного на заданных силах.

1.7. Связи и их реакции

Твердое тело называется *свободным*, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении. В качестве примера свободного тела приведем летящий воздушный шар или ракету в космосе. Твердое тело называется *несвободным*, если его перемещение в пространстве ограничено какими-либо другими телами. Все тела, которые так или иначе ограничивают перемещение данного тела, называются его *связями*. Например, стул, стоящий на полу – несвободное тело; перемещение стула ограничивается полом, для стула пол является связью. Движение висящего на нити шара ограничивается нитью; следовательно, для шара связью служит нить.

В природе нет абсолютного покоя, и тела, стремясь под действием внешних сил перемещаться в пространстве, сами действуют на препятствующие этому перемещению связи. Например, стул, находясь под действием силы тяжести, давит на пол, а шар, висящий на нити, натягивает нить. Одновременно с возникновением действия тела на связь возникает равная по модулю, но направленная в противоположную сторону сила противодействия связи, приложенная к телу. Действие связи на тело называется силой реакции связи или реакцией связи (от латинского «*re...*» (против) + «*actio*» (действие), т.е. ответ на внешнее действие).

Таким образом, на несвободное тело действуют две группы внешних сил: *заданные силы и реакции связей*. К заданным относятся все силы, кроме реакций связей. Чаще всего заданные силы являются *активными*, т.е. силами, которые могут вызвать движения тел, например сила тяжести, сила тяги, сила электрического взаимодействия и т.д.

При решении задач статики активные силы, как правило, бывают наперед заданными, а реакции связей неизвестны и их требуется определить. *Задача определения реакций связей – одна из основных задач статики*. Определяя реакции связей, необходимо иметь в виду, что они *приложены к телу в точках соприкосновения тела со связью и направлены в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу*. Направление реакции связи зависит от вида связи, ее расположения относительно тела и характера соприкосновения или соединения связи с телом. Для определения реакций связей используют прием освобождения от связей, который формулируется следующим образом: *не изменяя равновесия тела или системы тел, каждую связь, наложенную на систему, можно отбросить, заменив её действием реакции отброшенной связи*.

1.8. Сложение плоской системы сходящихся сил.

Геометрическое условие равновесия

Рассмотрим систему сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4, \vec{P}_5$, приложенных в точке A (рис. 5, а). Требуется найти их равнодействующую.

Применив правило силового треугольника, сложим силы \vec{P}_1 и \vec{P}_2 . Для этого из конца вектора $\vec{AB} = \vec{P}_1$ отложим вектор $\vec{BC} = \vec{P}_2$ и, соединив точки A и C , получим геометрическую сумму (равнодействующую) сил \vec{P}_1 и \vec{P}_2 :

$$\vec{AC} = \vec{P}_{1-2} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2.$$

Теперь сложим силу \vec{P}_{1-2} с силой \vec{P}_3 . Для этого из конца вектора $\vec{BC} = \vec{P}_2$ отложим вектор $\vec{CD} = \vec{P}_3$ и, соединив точки A и D , получим равнодействующую трех сил:

$$\vec{AD} = \vec{P}_{1-3} = \vec{P}_{1-2} + \vec{P}_3 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3.$$

Далее, отложив $\vec{DE} = \vec{P}_4$ и, соединив точки A и E , получим равнодействующую четырех сил:

$$\vec{AE} = \vec{P}_{1-4} = \vec{P}_{1-3} + \vec{P}_4 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}_4.$$

Наконец, отложив $\vec{EK} = \vec{P}_5$ и соединив точки A и K , получим искомую равнодействующую:

$$\vec{AK} = \vec{P}_\Sigma = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}_4 + \vec{P}_5.$$

Из рис. 5, а видим, что для получения этого окончательного результата не обязательно определять промежуточные равнодействующие $\vec{P}_{1-2}, \vec{P}_{1-3}$ т.д., а достаточно из конца вектора $\vec{AB} = \vec{P}_1$, отложить вектор $\vec{BC} = \vec{P}_2$, из конца вектора \vec{BC} отложить вектор $\vec{CD} = \vec{P}_3$ и т.д., а затем «замкнуть» получившийся *силовой многоугольник* вектором $\vec{AK} = \vec{P}_\Sigma$. При этом вектор равнодействующей \vec{P}_Σ исходит из начала первой силы и заканчивается в конце последней силы.

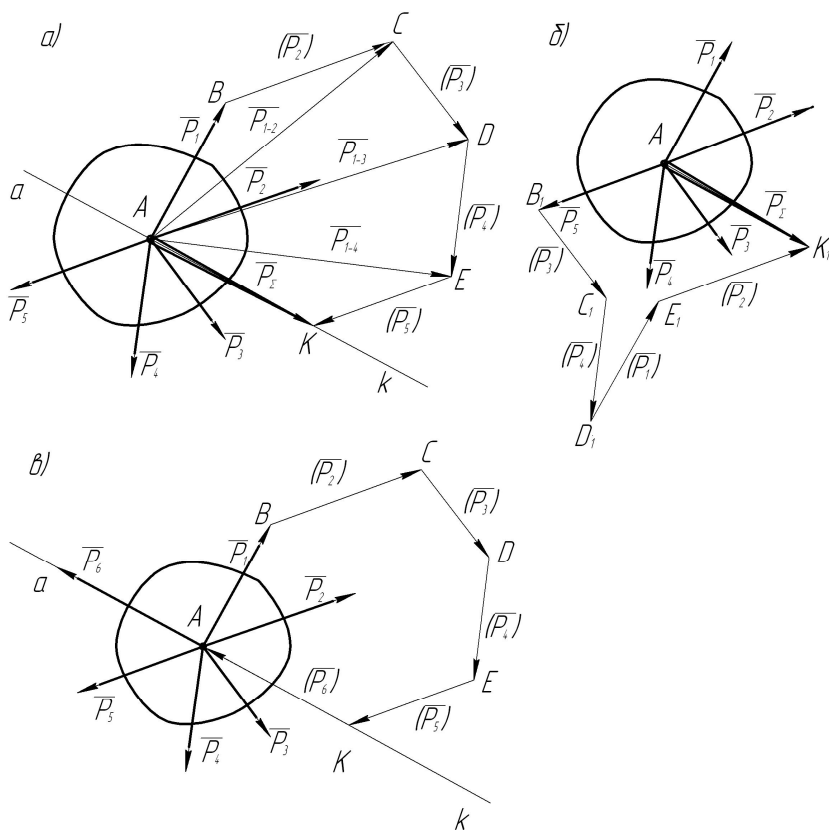


Рис. 5. Сложение плоской системы сходящихся сил

Заметим, что порядок построения сторон силового многоугольника $ABCDEK$ (рис. 5, а) не влияет на окончательный результат. Например, на рис. 5, б силовой многоугольник $AB_1C_1D_1E_1K_1$ замыкается вектором $\overline{AK_1} = \overline{AK}$, хотя порядок сложения векторов здесь иной:

$$\overline{AK} = \overline{P_\Sigma} = \overline{P_5} + \overline{P_3} + \overline{P_4} + \overline{P_1} + \overline{P_2}.$$

Определение равнодействующей системы сходящихся сил – необходимый этап для решения задачи уравнивания заданной системы. Чтобы уравновесить систему сил, достаточно к ней добавить еще одну силу, численно равную равнодействующей, но направленную в противоположную сторону. Например, требуется уравновесить систему пяти сил (рис. 5, а). Для этого, построив силовой многоугольник $ABCDEK$, вдоль линии ak добавим силу \vec{P}_6 , численно равную равнодействующей \vec{P}_Σ , но противоположно направленную (рис. 5, в). Образовавшаяся система сходящихся сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4, \vec{P}_5, \vec{P}_6$ уравновешена. В такой уравновешенной системе любая из сил оказывается уравнивающей по отношению к остальным.

Таким образом, если построить силовой многоугольник уравновешенной системы сил (рис. 5, в), то он получится замкнутым, т.е. замыкающий вектор $\vec{P}_\Sigma = 0$, так как конец последнего слагаемого вектора совпадает с началом первого.

Следовательно, замкнутый силовой многоугольник выражает в геометрической форме необходимое и достаточное условие равновесия системы сходящихся сил: *система сходящихся сил уравновешена тогда и только тогда, когда силовой многоугольник замкнут.*

Геометрическое условие равновесия (замкнутый силовой многоугольник) широко используется при решении задач статики.

1.9. Определение равнодействующей системы сходящихся сил методом проекций

Проекцией вектора \vec{P} на ось называется длина направленного отрезка оси, заключенного между двумя перпендикулярами, опущенными из начала и конца вектора \vec{P} . Договоримся обозначать буквой O начало отсчета значений величин по оси, а буквами x, y, z – наименования осей; положительный отсчет вести по направлению от O к x (к y или к z), а отрицательный отсчет – в противоположную сторону. Пусть заданы сила \vec{P} и ось Ox (рис. 6, а). Проекция силы \vec{P} на ось Ox выражена длиной отрезка ab , где, как видно из рисунка, a – проекция точки A начала вектора $\vec{P} = AB$ и b – проекция

точки B – конца вектора – на ось. Отсчет длины проекции (от a к b) в данном случае совпадает с положительным направлением оси, значит, проекция ab положительна.

Проекцию силы \vec{P} на ось условимся обозначать той же буквой P с добавлением индекса, обозначающего наименование оси, на которую сила проецируется, т.е. проекцию силы \vec{P} на ось x обозначим P_x . Если обозначение силы имеет какой-нибудь индекс, то и у обозначения проекции этот индекс сохраняется; например, проекции силы \vec{P}_1 или \vec{P}_2 обозначаются соответственно P_{1x} или P_{2x} .

Из рис. 6, а видно, что $P_x = ab$, но $ab = AC$, а из $\triangle ACB$ следует, что $AC = P \cos \alpha$. Таким образом,

$$P_x = P \cos \alpha,$$

т.е. проекция силы на ось равна произведению модуля этой силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.

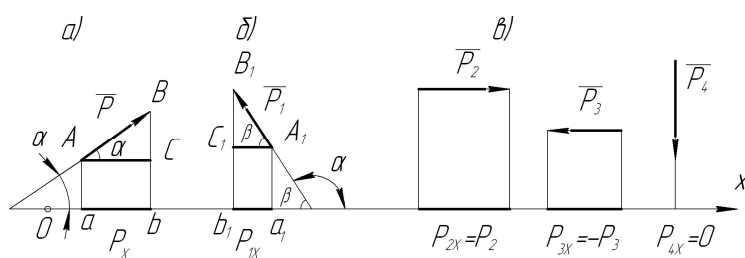


Рис. 6. Проекция вектора силы на ось

Выражение проекции силы через ее модуль является общим для какого угодно расположения силы относительно оси. Например, сила \vec{P}_1 образует (рис. 6, б) с положительным направлением оси угол α , который $\pi/2 < \alpha < \pi$. Следовательно,

$$P_{1x} = P_1 \cos \alpha = P_1 \cos(\pi - \beta) = -P_1 \cos \beta.$$

Итак, проекция P_{1x} отрицательна, если отсчет длины проекции от точки a_1 к точке b_1 противоположен положительному направлению оси. Если $\alpha = 0$ (рис. 6, в), т.е. сила параллельна оси и направлена в сторону положительного отсчета оси, то $\cos 0 = 1$ и поэтому $P_{2x} = P_2 \cos 0 = P_2$, если угол $\alpha = \pi$, т.е. сила параллельна оси, но на-

правлена противоположно положительному отсчету оси, то $\cos \pi = -1$ и $P_{3x} = P_3 \cos \pi = -P_3$; если угол $\alpha = \pi/2$, т.е. сила перпендикулярна оси, то $\cos(\pi/2) = 0$ и $P_{4x} = P_4 \cos(\pi/2) = 0$.

При решении задач, в которых фигурирует плоская система сходящихся сил, как правило, необходимо определять проекции сил на две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy . Все сказанное о проекциях на ось Ox справедливо и для проекций сил на ось Oy .

Так, если сила \vec{P}_K (рис. 7) образует с положительным направлением осей x и y соответственно углы $\alpha_x = (\vec{P}_K, \hat{x})$ и $\alpha_y = (\vec{P}_K, \hat{y})$, то

$$P_{Kx} = P_K \cos \alpha_x \text{ и } P_{Ky} = P_K \cos \alpha_y; \text{ но } \alpha_y = (90^\circ - \alpha_x), \text{ тогда } P_{Ky} = P_K \sin \alpha_x.$$

По заданным проекциям силы на оси может быть определен и сам вектор силы (ее модуль и направление).

Допустим, проекции P_{Kx} и P_{Ky} силы известны, тогда из ΔACB (рис. 7) видно, что модуль силы $P_K = \sqrt{P_{Kx}^2 + P_{Ky}^2}$.

Рассмотрим теперь определение равнодействующей системы сходящихся сил методом проекций. Допустим, что для заданной системы сходящихся сил построен много-

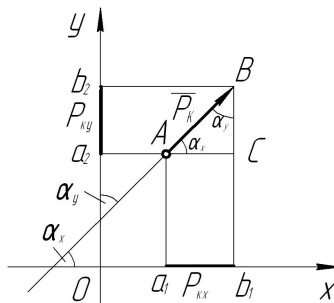


Рис. 7. Определение силы по заданным проекциям

угольник $ABCDE$, в котором вектор $\vec{AE} = \vec{P}_\Sigma$ – искомая равнодействующая данной системы (рис. 8). Выбрав систему координатных осей x и y в плоскости силового многоугольника, спроецируем его на эти оси.

Проекции сил на ось x :

$$P_{1x} = a_1 b_1, P_{2x} = b_1 c_1, P_{3x} = c_1 d_1 \text{ и } P_{4x} = d_1 e_1.$$

Проекции сил на ось y :

$$P_{1y} = a_2 b_2, P_{2y} = b_2 c_2, P_{3y} = c_2 d_2 \text{ и } P_{4y} = d_2 e_2.$$

Для наглядности проекции на рис. 8 показаны рядом с осями, несколько смещенными относительно них, причем положительные проекции вынесены выше (проекции на ось x) или правее (проекции на ось y), а отрицательные соответственно ниже или левее.

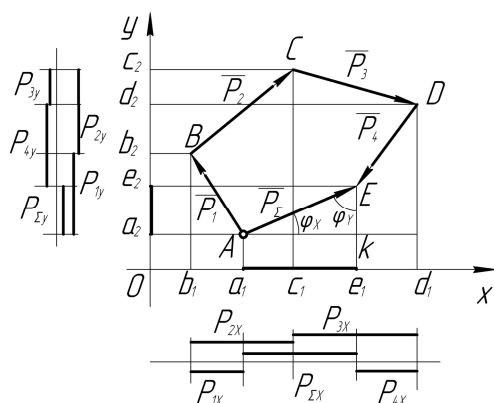


Рис. 8. Определение равнодействующей системы сходящихся сил методом проекций

Одновременно с проецированием сторон силового многоугольника, равных заданным силам, получены и проекции равнодействующей:

$$\bar{P}_{\Sigma}(P_{\Sigma x}, P_{\Sigma y}).$$

Из рис. 8 видно, что

$$P_{\Sigma x} = a_1 e_1 = -a_1 b_1 + b_1 c_1 + c_1 d_1 - d_1 e_1;$$

$$P_{\Sigma y} = a_2 e_2 = a_2 b_2 + b_2 c_2 - c_2 d_2 - d_2 e_2.$$

Выше было показано, что система сходящихся сил уравновешена тогда, когда ее равнодействующая $\bar{P}_{\Sigma} = 0$. Очевиден факт, что в этом случае равны нулю ее проекции на координатные оси x и y , т.е. условие равновесия может быть записано в виде

$$P_{\Sigma x} = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0;$$

$$P_{\Sigma y} = \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0.$$

Таким образом, *равнодействующая плоской системы сходящихся сил равна нулю только в том случае, когда алгебраические*

суммы проекций ее слагаемых на каждую из двух координатных осей равны нулю.

Эти формулы называют уравнениями равновесия плоской системы сходящихся сил и используют при аналитическом решении задач.

Следовательно, для решения задач на равновесие плоской системы сходящихся сил мы имеем два уравнения. Эти уравнения позволяют определить две неизвестные величины. Если же задача содержит неизвестные в количестве, превышающем число уравнений равновесия, то эту задачу нельзя решить методами статики абсолютно твердого тела. Задачи подобного типа называют *статически неопределимыми*.

1.10. Пара сил

Система двух параллельных сил, равных по модулю и направленных в противоположные стороны (рис. 9), называется парой сил (или просто парой).

Ранее показано, что две равные по модулю силы, приложенные к телу вдоль одной прямой и направленные в противоположные стороны, образуют уравновешенную систему. Две приложенные к телу равные по модулю силы, направленные в любую сторону вдоль не параллельных, но лежащих в одной плоскости линий действия, можно сложить по правилу параллелограмма и тем самым заменить одной силой – равнодействующей.

Пара сил – и неуравновешенная система и не имеет равнодействующей. Пара сил производит на тело вращательное действие.

Например, зажав карандаш между большим и указательным пальцами, мы можем его вращать, двигая пальцами в противоположные стороны, т.е. прикладывая к карандашу пару сил (рис.10).

В дальнейшем будет показано, что любую плоскую систему сил можно заменить либо одной эквивалентной ей силой (равнодействующей), либо одной эквивалентной ей парой сил. Таким образом, наравне с силой, пара сил – простейший элемент статики. Условимся обозначать пару сил символом (\bar{P}, \bar{P}') . Плоскость, в которой расположены силы, образующие пару сил, называется плоскостью действия пары сил.

Как отмечалось выше, пара сил производит на тело вращательное действие, причем если смотреть на плоскость действия пары с какой-либо одной стороны, то пара может поворачивать тело либо

против хода часовой стрелки (см. рис. 9 и 10), либо по ходу часовой стрелки. Количественная мера воздействия пары сил на тело зависит от модуля P сил пары и кратчайшего расстояния – h (см. рис. 9) между линиями их действия, называемого плечом пары. Чем больше модуль P сил пары и чем больше длина плеча h , тем больший вращательный эффект производит пара на тело.

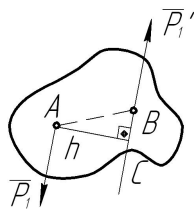


Рис. 9. Пара сил

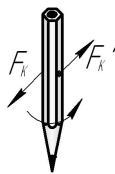


Рис.10. Пример действия пары сил на тело

Вращательный эффект пары измеряется взятым со знаком «плюс» или «минус» произведением модуля одной из сил пары на ее плечо. Эта алгебраическая величина называется *моментом пары* и обозначается M , т.е.

$$M = \pm P h.$$

Знак «плюс» ставится перед числовым значением момента в том случае, если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и знак «минус», если пара стремится повернуть тело по ходу часовой стрелки. Например, на рис. 11, а на тело действует пара (\vec{P}_1, \vec{P}_1') с моментом $M_1 = P_1 h_1$, а на рис. 11, б пара (\vec{P}_2, \vec{P}_2') с моментом $M_2 = -P_2 h_2$. В Международной системе единиц (СИ) силу измеряют в ньютонах, а плечо в метрах. Соответственно, момент пары измеряется в *ньютонметрах* (Н·м).

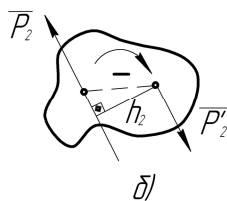
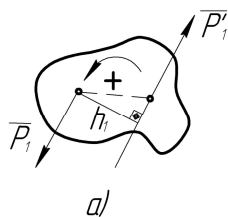


Рис. 11. Определение знака момента пары сил

1.11. Момент силы относительно точки

В механике существует понятие о моменте силы относительно точки.

Моментом силы относительно точки называется взятое со знаком («плюс» или «минус») произведение модуля силы на кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы (рис. 12), т.е.

$$M_O(\bar{P}) = \pm P h.$$

Точка O , относительно которой берется момент силы, называется *центром* момента; $OB = h$ – кратчайшее расстояние от центра момента до линии действия силы – называется *плечом* силы относительно данной точки; знак плюс ставится в случае, если сила \bar{P} стремится повернуть плечо h против хода часовой стрелки, а знак минус – в противоположном направлении. Момент силы \bar{P} относительно точки O на рис. 12 положительный.

Из последнего равенства следует, что при $h=0$, т.е. когда O – центр моментов – расположен на линии действия силы \bar{P} , $M_O(\bar{P})=0$. Как известно, сила –

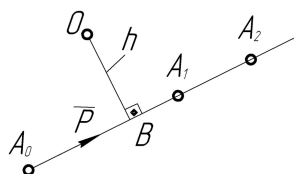


Рис.12. Момент силы \bar{P} относительно точки O

скользящий вектор, поэтому при переносе силы \bar{P} по линиям действия из точки A в любую другую точку A_1 , A_2 и т.д. (рис. 12) длина плеча не изменится, а значит не изменится и значение момента силы относительно точки. Момент силы, как и момент пары, измеряют в ньютонметрах.

1.12. Уравнения равновесия плоской системы параллельных сил

Пусть к данному телу приложена система параллельных сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5$ (рис. 13). Через произвольную точку O , взятую в плоскости действия сил, проведем ось Ox , перпендикулярную силам, и ось Oy , параллельную этим силам. Запишем для данной системы сил уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum P_{ix} = 0; \\ \sum P_{iy} = 0; \\ \sum M_O = 0. \end{cases}$$

Каждая сила перпендикулярна оси Ox , и ее проекция на эту ось равна нулю. Следовательно, первое уравнение обращается в тождество $0 = 0$ и выполняется независимо от того, уравниваются силы или нет. Таким образом, для плоской системы параллельных сил остается только два уравнения равновесия, причем на ось Oy силы проецируются в натуральную величину, так как эта ось параллельна заданным силам.

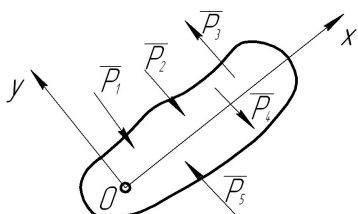


Рис.13. Система параллельных сил

Каждая сила перпендикулярна оси Ox , и ее проекция на эту ось равна нулю. Следовательно, первое уравнение обращается в тождество $0 = 0$ и выполняется независимо от того, уравниваются силы или нет. Таким образом, для плоской системы параллельных сил остается только два уравнения равновесия, причем на ось Oy силы проецируются в натуральную величину, так как эта ось параллельна заданным силам.

Система уравнений равновесия для плоской системы параллельных сил принимает вид

$$\begin{cases} \sum P_{iy} = 0; \\ \sum M_O = 0. \end{cases}$$

Уравнения равновесия для плоской системы параллельных сил можно записывать в виде

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0. \end{cases}$$

Точки A и B – произвольные точки, предпочтительно их взять на оси x , уравнение $\sum P_{iy} = 0$ служит для проверки правильности вычислений.

Итак, для произвольной плоской системы сил мы имеем три уравнения равновесия, а для плоской системы параллельных сил только два уравнения равновесия. Соответственно при решении задач на равновесие произвольной плоской системы сил можно найти три неизвестных, а при рассмотрении равновесия плоской системы параллельных сил – не более двух.

Если количество неизвестных превышает число уравнений статики, задача становится статически неопределимой.

1.13. Типы опор балок

В машинах и сооружениях очень часто встречаются тела удлиненной формы, называемые балками. Они в основном предназначены для восприятия поперечных нагрузок. Балки имеют специальные опорные устройства для сопряжения с другими элементами и передачи на них усилий. Опоры балок, рассматриваемых как плоские системы, бывают трех основных типов.

- *Подвижная шарнирная опора (рис. 14, а).* Такая опора не препятствует вращению конца балки и его перемещению вдоль плоскости качения. В ней может возникнуть только одна реакция, которая перпендикулярна плоскости качения и проходит через центр катка.

Схематическое изображение подвижной шарнирной опоры дано на рис. 14, б.

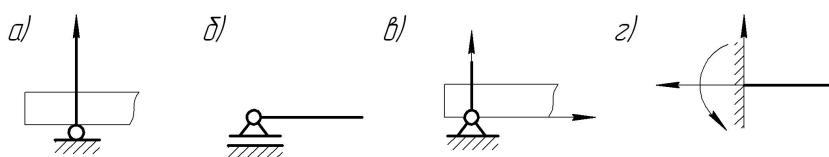


Рис. 14. Типы опор балок

Подвижные опоры дают возможность балке беспрепятственно изменять свою длину при изменении температуры и тем самым устраняют возможность появления температурных напряжений.

- *Неподвижная шарнирная опора (рис. 14, в).* Такая опора допускает вращение конца балки, но устраняет поступательное перемещение ее в любом направлении. Возникающую в ней реакцию можно разложить на две составляющие – горизонтальную и вертикальную.

- *Жесткая заделка, или защемление (рис. 14, г).* Такое закрепление не допускает ни линейных, ни угловых перемещений опорного сечения. В этой опоре может в общем случае возникнуть реакция, которую обычно раскладывают на две составляющие (вертикальную и горизонтальную) и момент защемления (реактивный момент).

Балка с одним заделанным концом называется **консольной балкой** или просто **консолью**.

Если опорные реакции могут быть найдены из одних уравнений статики, то балки называют **статически определимыми**. Если же число неизвестных опорных реакций больше, чем число уравнений статики, возможных для данной задачи, то балки называют **статически неопределимыми**.

Пример

Определить неизвестные параметры реакций опор A и B для заданной (рис.15) конструкции балки, нагруженной параллельными силами \bar{P}_1 и \bar{P}_2 .

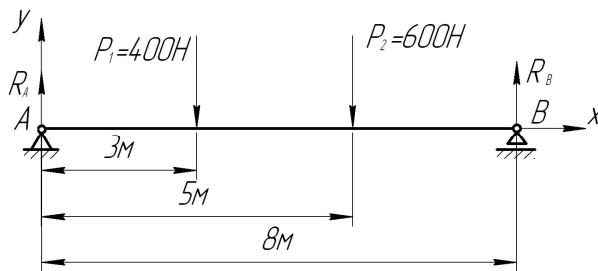


Рис.15. Расчетная схема балки

- Записываем уравнение равновесия балки как сумму моментов всех сил относительно опоры A

$$\sum M_A = R_B \cdot 8 - P_2 \cdot 5 - P_1 \cdot 3 = 0,$$

Откуда
$$R_B = \frac{P_2 \cdot 5 + P_1 \cdot 3}{8} = \frac{600 \cdot 5 + 400 \cdot 3}{8} = 525 \text{ Н.}$$

- Записываем уравнение равновесия балки как сумму моментов всех сил относительно опоры B .

$$\sum M_B = -R_A \cdot 8 + P_1 \cdot (8-3) + P_2 \cdot (8-5) = 0,$$

Откуда
$$R_A = \frac{P_1 \cdot 5 + P_2 \cdot 3}{8} = \frac{400 \cdot 5 + 600 \cdot 3}{8} = 475 \text{ Н.}$$

- Проверка правильности вычислений

Сумма проекций всех сил на ось Y должна равняться нулю:

$$\sum P_{yi} = R_A - P_1 - P_2 + R_B = 475 - 400 - 600 + 525 = 0.$$

1.14. Приведение силы к точке

В начале XIX века Л. Пуансо доказал теорему о параллельном переносе силы в любую заданную или выбранную точку.

Пусть дана сила \vec{P} , приложенная к точке A твердого тела, и ее требуется перенести в точку O (рис. 16, а). Приложим к телу в точке O (рис. 16, б) уравновешенную систему сил \vec{P}' , \vec{P}'' , параллельных \vec{P} и равных ей по модулю (т.е. $P' = P'' = P$). Теперь, кроме силы \vec{P}'' , приложенной к точке O , образовалась пара сил (\vec{P}, \vec{P}') с моментом $M = P \cdot h$, но так как и момент данной силы \vec{P} относительно точки O равен $M_O(\vec{P}) = P \cdot h$, то $M = M_O(\vec{P})$.

Таким образом, *всякую силу \vec{P} , приложенную к телу в точке A , можно переносить параллельно линии действия в любую точку O , присоединив пару сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки ее приложения.*

Операция такого переноса силы называется *приведением силы к точке*, а появляющаяся при этом пара (\vec{P}, \vec{P}') с моментом $M = M_O(\vec{P})$ называется *присоединенной парой* (рис. 16, в).

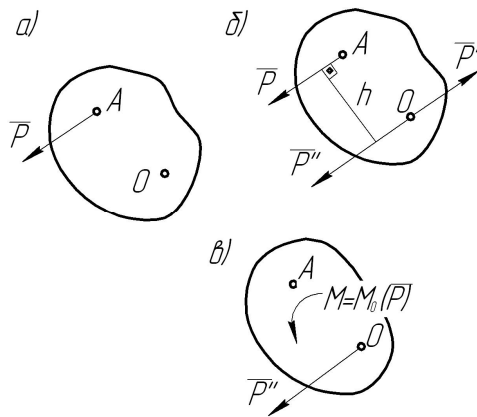


Рис. 16. Приведение силы \vec{P} в точку O

Изложенный метод приведения одной силы к данной точке можно применить к какому угодно числу сил, которые приводятся в одну точку. Сходящиеся в этой точке силы заменяем одной силой (\vec{R}), которая является геометрической суммой этих сил и называется *главным вектором системы сил*. По аналогии с главным вектором получаем *главный момент системы* (M_c) относительно точки приведения, складывая алгебраически моменты присоединенных пар.

Таким образом, плоская система сил может быть заменена эквивалентной ей системой, состоящей из *одной* силы и *одной* пары сил. Очевиден факт, что система сил находится в равновесии, когда главный вектор системы сил (\vec{R}) и главный момент системы (M_c) равны нулю. **Это условие называется условием равновесия плоской системы сил.**

Глава 2. ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

2.1. Деформация тел под действием внешних сил

На все детали машин и сооружений во время их работы действуют различные внешние силы. При определении величины и направления таких сил, приложенных к телам, находящимся в равновесии, обычно делается допущение, что все тела абсолютно твердые, т.е. недеформируемые. Об этом говорилось выше в разделе «СТАТИКА».

В действительности тела под действием приложенных к ним сил в той или иной степени меняют свою форму и размеры, т.е. деформируются. Различают упругую и остаточную деформации. Деформация, полностью исчезающая после прекращения действия внешних сил, называется упругой. Если после снятия нагрузки тело не восстанавливает прежней формы, то говорят об *остаточной* (пластической) деформации.

Характер деформации (упругая или остаточная) зависит от величины силы, действующей на тело, размеров тела и механических свойств его материала. Мы будем знакомиться с деформацией тел наиболее простой формы. Таким телом является прямолинейный брус – тело с прямой осью, у которого длина больше поперечных размеров. Для упрощения расчетов мы будем считать, что сам брус

не имеет массы. В зависимости от направления действия сил, приложенных к телу, могут возникать различные виды деформаций: *растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб*.

Деформация растяжения или сжатия возникает в том случае, когда внешние силы направлены по одной прямой (вдоль оси бруса) в разные стороны (рис. 17, а, б). Если на брус действуют внешние силы, стремящиеся сдвинуть одну часть его относительно другой, то возникает деформация сдвига (рис. 17, в).

Если брус находится под действием нагрузок, создающих противоположные пары сил в плоскостях, перпендикулярных продольной оси бруса, то появляется деформация кручения (рис. 17, г). И, наконец, две равные пары сил разного знака создают деформацию изгиба (рис. 17, д).

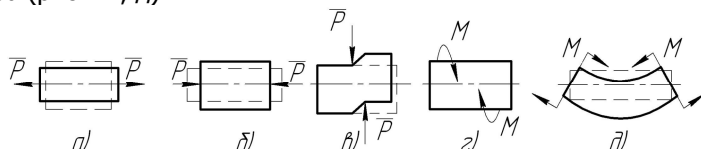


Рис. 17. Виды деформаций:

а – растяжение; б – сжатие; в – сдвиг; г – кручение; д – изгиб

Чтобы любая деталь машины была работоспособна, т.е. могла работать безопасно и быть достаточно долговечной, она не только не должна разрушаться от действия на нее рабочих усилий, но и деформации, возникающие в ней при этом, должны быть весьма малыми и обязательно упругими. Определить минимальные размеры детали, необходимые для обеспечения ее работоспособности в соответствии с действующими на нее нагрузками и свойствами материала, из которого эта деталь изготовлена, можно методами, изучаемыми в разделе технической механики – «Сопротивление материалов».

2.2. Внешние силы, внутренние силы упругости и напряжения

Нагрузки, действующие на тело при взаимодействии его с другими телами, называются внешними. По способу приложения они могут быть *сосредоточенными* и *распределенными*. Сосредоточенные нагрузки действуют на тело через очень маленькие площадки и с достаточной степенью точности могут считаться приложенными в

точке. По характеру действия нагрузки делятся на *постоянные (статические)* и *переменные*. Мы будем рассматривать наиболее простые случаи, когда действуют сосредоточенные постоянные нагрузки.

Как было отмечено, под влиянием внешних сил тело деформируется. При этом силы взаимного сцепления между частицами материала оказывают противодействие внешним силам – так возникают *внутренние силы упругости*, которые распределены по всей площади поперечного сечения тела в одних случаях равномерно, в других – неравномерно.

Величина внутренних сил упругости, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения тела, называется напряжением. Иначе можно сказать, что напряжения являются мерой интенсивности распределения внутренних сил упругости.

Поскольку внутренняя сила (как и всякая сила) является вектором, то и напряжение – также вектор. Единица измерения напряжения H/m^2 ; $1 H/m^2$ называется паскаль (Па). Так как паскаль для технических расчетов очень мал, в практике используют мегапаскаль (МПа) равный $10^6 Pa$. Мегапаскаль удобно выражать как H/mm^2 .

Если вектор внутренних сил, а, значит, и напряжений направлен перпендикулярно рассматриваемому сечению тела, напряжение называется нормальным и обозначается буквой σ (сигма). Если напряжение действует в плоскости рассматриваемого сечения тела, то его называют касательным и обозначают буквой τ (тау). К этим буквам добавляются индексы, обозначающие вид деформаций: p (растяжение), c (сжатие), cp (срез при сдвиге), k (кручение), u (изгиб).

2.3. Действительные, предельно опасные и допускаемые напряжения

Установлено, что внешние силы вызывают деформацию тел, в результате чего появляются внутренние силы упругости, а, значит, и напряжения. Если известны внутренние силы, характер их распределения в сечении и размеры, то можно определить так называемые *действительные напряжения*.

Однако не любое напряжение безопасно для материала детали. Внутренние силы, т.е. силы противодействия, не могут возрастать беспредельно без нарушения работоспособности детали. При

достижении определенной величины наступает критический момент. Для пластичных материалов – это появление остаточных деформаций, т.е. переход из зоны упругости в зону пластичности, для хрупких – нарушение целостности, т.е. разрушение. Таким образом, существуют предельно опасные напряжения: в первом случае – *предел текучести* (σ_m и τ_m), во втором – *предел прочности* (σ_{nc} и τ_{nc}). Особым случаем нарушения работоспособности детали является разрушение ее материала под влиянием напряжений, циклично изменяющихся во времени. В этом случае предельно опасным напряжением является *предел выносливости*. Известно, что величина предельно опасных напряжений зависит от свойств материала и определяется во время механических испытаний. Их величины приводятся в справочниках.

Казалось бы, что условие безопасной и долговечной работы детали следует формулировать так: действительные напряжения должны быть меньше предельно опасных напряжений или равны им.

Однако нельзя допустить, чтобы детали машин работали при предельных напряжениях или при напряжениях, весьма близких к ним, так как в этом случае даже малейшее увеличение действительных напряжений, вызванное случайными причинами, может привести к опасным пластическим деформациям или к разрушению. Поэтому в расчетах ориентируются на более безопасную величину максимальных напряжений – на *допускаемые напряжения*, которые меньше предельно опасных в определенное число раз. Это число называют *нормативным коэффициентом запаса прочности*.

Выбор нормативного коэффициента запаса прочности чрезвычайно сложен и должен учитывать большое число факторов (свойства материала, характер нагрузки, степень ответственности детали и др.). В случае приближенных расчетов поступают проще: допускаемые напряжения выбирают по таблицам в справочниках. Таким образом, окончательное условие прочности любой детали будет таким: действительные напряжения должны быть меньше допускаемых напряжений или равны им.

Допускаемые напряжения обозначают теми же буквами, что и действительные, но заключают их в квадратные скобки. Например, σ_p – действительное напряжение при растяжении, а $[\sigma_p]$ – допускаемое напряжение при растяжении.

2.4. Определение внутренних сил упругости

Кратко повторим последовательность рассуждений, изложенных в предыдущих параграфах: внешние силы вызывают деформацию, в результате деформации появляются внутренние силы упругости, интенсивность распределения внутренних сил упругости характеризуется напряжением, действительные напряжения не должны превышать допустимых, основной задачей сопротивления материалов является определение минимально необходимых размеров детали, обеспечивающих ее работоспособность.

Отсюда следует, что для решения основной задачи сопротивления материалов необходимо прежде всего научиться по внешним силам определять внутренние силы упругости. Для этого применяют *метод сечений*. Сущность его заключается в следующих четырех действиях (рассматривается находящийся в равновесии брус, к которому приложены известные внешние силы или моменты сил):

- 1) мысленно рассекают брус плоскостью, перпендикулярной его оси, в том месте, где требуется определить внутренние силы;
- 2) отбрасывают любую из полученных частей. Равновесие оставленной части не нарушится лишь в том случае, если к ней приложить реакции – внутренние силы, заменяющие действие отброшенной части. Для оставленной части они будут играть роль *внешних сил*;
- 3) заменяют действие отброшенной части искомыми внутренними силами;
- 4) уравнивают оставленную часть, т.е. определяют внутренние силы.

Следует помнить, что здесь определяется не закон распределения внутренних сил по сечению, а лишь равнодействующая этих сил (или равнодействующая пара сил).

Проиллюстрируем этот метод на простом случае нагружения бруса круглого сечения (рис. 18, *а*). Первый шаг – рассекаем брус (рис. 18, *б*), затем отбрасываем одну часть (рис. 18, *в*) (показана оставленная часть); наконец, заменяем действие отброшенной части внутренними силами с таким расчетом, чтобы соблюдались условия равновесия, т.е. производим третье и четвертое действия (рис. 18, *г*).

В этих случаях для равновесия бруса необходимо и достаточно, чтобы внутренние силы приводились к равнодействующей N (продольной или нормальной силе).

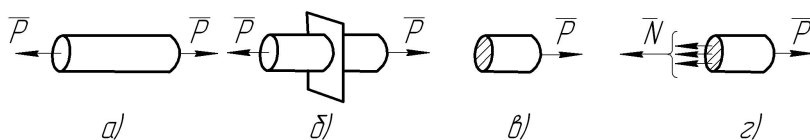


Рис.18. Схемы определения внутренних сил упругости: *а* – исходная схема нагружения бруса; *б* – брус рассекается плоскостью; *в* – отсеченная часть бруса; *г* – равновесие отсеченной части бруса

2.5. Расчеты на прочность

При решении практических задач с использованием методов науки о сопротивлении материалов могут встретиться два типовых случая.

Первый случай – известны внешние силовые факторы (силы, моменты), приложенные к детали, и материал детали. Требуется определить размеры поперечного сечения детали. Такая задача называется *проектным расчетом* и решается так. По справочным данным определяют допускаемые напряжения. Искомые размеры поперечного сечения детали будут тем меньше (экономически это, естественно, более целесообразно), чем большие действительные напряжения мы допустим в ней. Поэтому мысленно действительные напряжения приравнивают к самым большим безопасным, т.е. допускаемым напряжениям. Затем, применив метод сечений, определяют внутренние силовые факторы (силы, моменты). В заключение, зная допускаемые напряжения и внутренние силовые факторы, определяют размеры поперечного сечения по расчетным формулам, в которых учитывается, как распределены внутренние силы упругости в сечении. Эти расчетные формулы приведены ниже при рассмотрении каждого вида деформаций.

Второй случай – известны внешние силовые факторы (силы, моменты), действующие на деталь, материал детали и размеры ее поперечного сечения. Требуется проверить прочность детали. Такая задача называется *проверочным расчетом*. В этом случае определяют действительные напряжения, сравнивают их с допускаемыми и делают вывод о прочности. Как мы знаем, деталь будет прочной, если окажется выполненным следующее условие: действительные напряжения меньше допускаемых или равны им. Величина допускаемых напряжений выбирается, как и в первом случае, по справочникам, а величина действительных напряжений определяется по внутренним

силовым факторам и размерам поперечного сечения в соответствии с расчетными формулами для каждого вида деформации.

2.6. Распределение напряжений при растяжении

Как мы отмечали, деформация растяжения появляется в том случае, если внешние силы направлены по одной прямой вдоль оси бруса в разные стороны. Если представить себе в таком брусе воображаемые продольные волокна материала, то ясно, что все они удлинятся, причем, очевидно, удлинения всех волокон будут одинаковы. Иначе говоря, материал в любой точке поперечного сечения будет одинаково деформироваться. Следовательно, и внутренние силы упругости также во всех точках будут одинаковы. Но это означает, что во всех точках будут одинаковые напряжения. Очевидно, что при таком равномерном распределении внутренних сил по сечению величину действительных нормальных напряжений можно получить, разделив равнодействующую N внутренних сил (продольную силу) на площадь F поперечного сечения бруса, т.е.:

$$\sigma_p = \frac{N}{F}.$$

2.6.1. Зависимость между напряжением и относительным удлинением

Установлено, что в некоторых пределах нагружения при упругих деформациях напряжение при растяжении σ_p оказывается прямо пропорциональным величине относительного удлинения ε . *Относительным удлинением называется отношение абсолютного удлинения (прироста длины) Δl бруса к его первоначальной длине l , т.е.*

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Величина ε – или безразмерный параметр, или выражается в процентах. Если коэффициент пропорциональности между напряжением и относительным удлинением обозначить буквой E , то $\sigma_p = E \cdot \varepsilon$.

Зависимость эта была впервые установлена английским ученым Гуком и называется *законом Гука*. Каков же физический смысл

коэффициента пропорциональности? Это легко установить, если сделать допущение, что $\Delta l = l$ а значит, $\varepsilon = 1$. В этом случае $E = \sigma_p$ и можно сказать, что E – такое напряжение растяжения, которое возникает в материале, если брус удлинится на величину, равную своей первоначальной длине. Надо отметить, что хотя почти все материалы разрушаются гораздо раньше, чем напряжение достигает величины E , тем не менее величина такого напряжения отображает действительные свойства материала, его способность сопротивляться упругой деформации растяжения. Коэффициент пропорциональности E называется *модулем упругости* при растяжении (модулем продольной упругости). Величина E для различных материалов различна. Например, для стали $E \approx 2 \cdot 10^5$ МПа. Для практических расчетов удобнее другое математическое выражение закона Гука при растяжении, позволяющее определять величину абсолютной деформации бруса под нагрузкой. Получить его несложно, если учесть, что

$$\sigma_p = \frac{N}{F} \text{ и } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Тогда

$$\frac{N}{F} = E \frac{\Delta l}{l} \text{ или } \Delta l = \frac{Nl}{EF}.$$

Следовательно, абсолютное удлинение, полученное брусом, прямо пропорционально продольной силе и длине бруса и обратно пропорционально площади поперечного сечения и модулю упругости.

Так же, как и при растяжении, внешние силы, деформирующие брус при сжатии, направлены вдоль оси бруса в противоположные стороны. Однако при растяжении они направлены от тела, а при сжатии – к телу.

Внутренние силы упругости при сжатии распределяются по сечению, как и при растяжении, равномерно, так как материал во всех точках поперечного сечения подвергается одинаковой деформации. Значит и величина действительных напряжений при сжатии подсчитывается аналогично:

$$\sigma_c = \frac{N}{F},$$

где N – равнодействующая внутренних сил упругости (продольная сила); F – площадь поперечного сечения бруса. Для сжатия полно-

стью применим закон Гука. Его математические выражения аналогичны рассмотренным при растяжении.

Наглядное представление об изменении внутренних продольных сил по длине бруса дает эпюра (график продольных сил), ось которой проводится параллельно оси бруса, а перпендикулярно ей откладываются значения продольных сил (с учетом знаков) в выбранных сечениях бруса.

Пример построения эпюры продольных сил

Рассмотрим брус (рис. 19), к которому в точках 1, 2, 3, 4 приложены внешние силы $P_1 = P$, $P_2 = 3P$, $P_3 = 2P$ и $P_4 = 2P$.

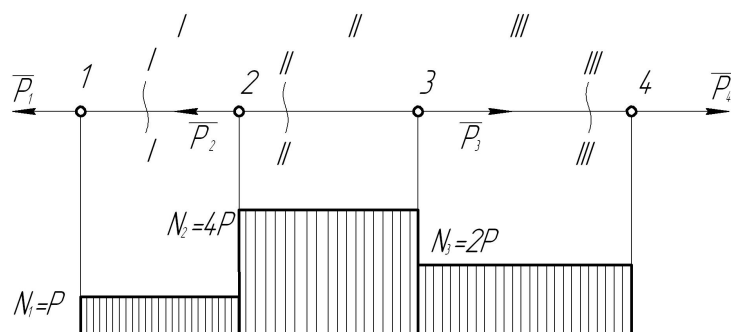


Рис. 19. Эпюра продольных сил

Методика построения эпюры следующая:

- Разбиваем брус на участки, границами которых являются точки 1, 2, 3, 4 приложения сил. Получаем в нашем случае три участка (I, II, III).

- На каждом из участков в произвольном месте проводим сечение. На участке I – это сечение I – I, на участке II – соответственно II – II и т.д.

- Используем метод сечений, отбрасываем правую часть и заменяем ее действие внутренней силой N_i . Равновесие оставшейся части имеет вид

- для участка I $-P_1 + N_1 = 0$, откуда $N_1 = P_1 = P$,

- для участка II $-P_1 - P_2 + N_2 = 0$, откуда $N_2 = P_1 + P_2 = 4P$,

- для участка III $-P_1 - P_2 + P_3 + N_3 = 0$, откуда $N_3 = P_1 + P_2 - P_3 = 2P$.

2.6.2. Расчеты на прочность при растяжении, сжатии

При проверочном расчете, как мы отмечали, надо определить действительные напряжения и сравнить их с допускаемыми. Прочность будет обеспечена, если действительные напряжения не превысят допускаемых. Математически это записывается так:

при растяжении

$$\sigma_p = \frac{N}{F} \leq [\sigma_p];$$

при сжатии

$$\sigma_c = \frac{N}{F} \leq [\sigma_c].$$

При проектном расчете требуется определить размеры поперечного сечения детали. В этом случае расчет ведется в предположении, что действительные напряжения будут равны допускаемым (или несколько меньше допускаемых). Следовательно, при растяжении

$$\frac{N}{F} \leq [\sigma_p], \text{ откуда } F \geq \frac{N}{[\sigma_p]}. \text{ Аналогично, при сжатии } F \geq \frac{N}{[\sigma_c]}.$$

2.7. Распределение напряжений при сдвиге

Деформация сдвига возникает в тех случаях, когда внешние силы, действующие на брус, расположены в параллельных плоскостях на очень малом расстоянии друг от друга и направлены в противоположные стороны (рис.17, в). При этом происходит разрушение, называемое срезом. Характерным примером сдвига является резание материала ножницами.

Нетрудно представить, что все точки деформируемых сечений, ограниченных плоскостями действующих сил, смещаются на равные расстояния, т.е. материал в этих точках подвергается одинаковой деформации. Следовательно, справедливо будет такое же рассуждение, какое мы применили при изучении деформации растяжения: одинаковые деформации вызывают возникновение одинаковых внутренних сил упругости и, следовательно, во всех точках сечения будут одинаковые действительные напряжения. Поэтому их величина определится делением равнодействующей Q внутренних (попереч-

ных) сил на площадь F поперечного сечения бруса. Так как вектор напряжения расположен в плоскости сечения, то возникает касательное напряжение, т.е.

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{F}.$$

Как и при растяжении (или сжатии), при сдвиге справедлив закон Гука, в зоне упругости напряжения прямо пропорциональны относительным деформациям.

Расчет на прочность при сдвиге ничем не отличается от расчета на прочность при растяжении (сжатии). Так, при проектном расчете

$$\frac{Q}{F} \leq [\tau_{cp}], \text{ откуда } F \geq \frac{Q}{[\tau_{cp}]}.$$

При проверочном расчете $\tau_{cp} = \frac{Q}{F} \leq [\tau_{cp}]$.

2.8. Распределение напряжений при кручении

Деформация кручения возникает, как мы уже ранее отметили, при действии на брус нагрузок, создающих противоположные пары сил в плоскостях, перпендикулярных продольной оси бруса (рис. 17, *г*). Если обратить внимание на то, что при этом прямолинейные образующие круглого бруса принимают вид винтовых линий (это легко наблюдать на резиновом стержне), то можно предположить, что при кручении каждое поперечное сечение по отношению к соседнему поворачивается на некоторый угол. Можно представить себе и другую картину: брус сложен из множества тончайших дисков. При повороте каждого диска на стыке с соседним происходят перемещения точек в плоскостях, перпендикулярных оси бруса. Отсюда вывод – при кручении бруса в каждом сечении происходит деформация сдвига и возникают касательные напряжения. Однако если при обычном сдвиге все точки деформируемого сечения прямолинейно смещались на равные расстояния, то при кручении материал в разных точках, находящихся на разных расстояниях от оси бруса, испытывает разную деформацию.

Чем дальше точка удалена от оси, тем больше перемещение по дуге. Но так как величина напряжений прямо пропорциональна относительной деформации (по закону Гука), то очевидно, что и напряжения в различных точках одного и того же сечения будут различны и пропорциональны расстоянию точки от центра сечения (его называют полюсом). В точке сечения, совпадающей с полюсом, напряжение будет равно нулю. Наибольшие напряжения τ_{max} будут в наиболее удаленных точках, расположенных на поверхности бруса. Таким образом, первое отличие деформации кручения от деформации сдвига заключается в различных законах распределения напряжений по сечению. Есть и еще одно отличие. Как отмечали ранее, использование метода сечений при сдвиге позволяет выявить равнодействующую внутренних сил упругости (поперечную силу Q), а применение того же метода при кручении приводит к обнаружению равнодействующей пары сил, создающей крутящий момент M_K . Оба эти отличия необходимо иметь в виду при определении величины действительных напряжений при кручении.

Вспомним, что при сдвиге они определялись делением равнодействующей внутренних сил упругости на площадь поперечного сечения (аналогичная закономерность была справедлива также при растяжении, сжатии и смятии). Для определения действительных напряжений при кручении так поступать нельзя, так как изменился внутренний силовой фактор (вместо силы – момент) и уже не тот закон распределения напряжений по сечению (вместо равномерного – неравномерное). Вывод расчетной формулы для определения действительных напряжений в опасных точках сечения скручиваемого бруса, т.е. для определения τ_{max} , достаточно сложен и требует большого числа математических преобразований. Но основывается он на известных нам положениях.

Соответствующие приведенным рассуждениям математические преобразования (при условии, что брус имел круглое поперечное сечение с диаметром d) приводят к следующей формуле:

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_\rho}.$$

где $W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$ – полярный момент сопротивления сечения кручению.

Размерность величины W_ρ – $м^3$, $см^3$, $мм^3$.

Для практических расчетов можно принять, что $\frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$.

Сравнение формул для определения действительных напряжений при сдвиге ($\tau_{cp} = \frac{Q}{F}$) и кручении ($\tau_{max} = \frac{M_K}{W_p}$) позволяет сде-

лать вывод, что в правой стороне приведенных закономерностей числитель отражает внутренний силовой фактор, а знаменатель – геометрический. Таким образом, величина W_p характеризует способность круглого поперечного сечения заданных размеров сопротивляться деформации кручения.

2.8.1. Расчеты на прочность при кручении

Типовой деталью, испытывающей деформацию кручения, является вал. При проектном расчете его на прочность надо по крутящему моменту и допускаемому напряжению определить необходимый диаметр вала. Исходной является зависимость, в которой, как обычно, в качестве максимальных действительных напряжений используются допускаемые напряжения. Таким образом,

$$\frac{M_K}{0,2d^3} \leq [\tau_K],$$

откуда

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_K}{0,2[\tau_K]}}.$$

Так как для валов многих машин бывает известен не момент, а передаваемая мощность N (Вт) и угловая скорость ω (1/с) вращения вала или частота вращения n (об/мин), то прежде всего определяют внешний вращающий (скручивающий) момент (Нм):

$$M_K = \frac{N}{\omega}.$$

Если дана величина n , то $\omega = \frac{\pi n}{30}$.

При проверочном расчете, как и в случаях других деформаций, определяют действительные напряжения и сравнивают с допускаемыми. Прочность будет обеспечена, если соблюдается условие:

$$\tau_k = \frac{M_k}{0,2d^3} \leq [\tau_k].$$

Пример расчета на прочность вала при кручении

Определить диаметр стального вала, вращающегося с угловой скоростью $\omega = 100 \text{ 1/с}$ и передающего мощность $N = 100 \text{ кВт}$.

Допускаемое напряжение $[\tau_k] = 40 \text{ МПа}$.

Решение:

1) Определяем внешний вращающий (скручивающий) момент (Нм):

$$M_k = \frac{N}{\omega} = \frac{100 * 10^3}{100} = 1000 \text{ Нм}.$$

2) Диаметр вала из условия прочности

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_k}{0,2[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{1000 * 10^3}{0,2[40]}} = 50 \text{ мм}.$$

2.9. Особенность деформации изгиба

Если брус находится под действием двух пар сил, расположенных в плоскости его продольной оси, то возникает деформация изгиба. Представим себе в таком брус продольные волокна. При деформации изгиба волокна в одной зоне удлиняются, в другой – укорачиваются (рис. 20). Между зонами растяжения и сжатия располагается нейтральный слой, волокна которого не подвергаются деформации и сохраняют свою длину неизменной.

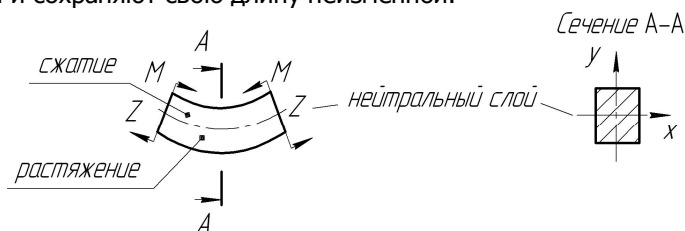


Рис. 20. Схема деформации при чистом изгибе

Чем дальше волокна расположены от нейтрального слоя, тем большую деформацию они испытывают. Отсюда можно сделать вывод, что при изгибе в поперечных сечениях бруса под действием внутренних сил возникают нормальные напряжения растяжения и сжатия.

Наибольшие напряжения будут в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси $z - z$. *Нейтральной осью называется прямая, по которой поперечное сечение пересекается с нейтральным слоем.* Наибольшие напряжения в зоне растяжения обозначаются $+\sigma_{max}$, а в зоне сжатия $-\sigma_{max}$, т.е. знаком плюс обозначают напряжения растяжения, а знаком минус – напряжения сжатия. В точках, расположенных на нейтральной оси, напряжения равны нулю. Мы рассмотрели случай *чистого изгиба*, когда брус находится под действием пар сил. Но изгиб может возникнуть и при ином нагружении бруса, например под действием силы и реакций опор, перпендикулярных оси балки (рис. 21, а) (брус, испытывающий деформацию изгиба, обычно называют балкой). В этом случае характер деформирования более сложный и носит название *поперечного изгиба*. Для определения внутренних силовых факторов применим метод сечений. Рассмотрим любое сечение, например, I – I. Рассечем брус, отбросим левую часть и рассмотрим равновесие оставшейся правой части (рис. 21, б). Для общего случая равновесия тел требуется соблюдение трех условий. Первое условие – равенство нулю суммы сил, направленных параллельно одной из осей (ось y), позволяет сделать вывод, что в сечении должны быть внутренние поперечные силы, равнодействующая которых Q равна R_B . Второе условие – равенство нулю суммы сил, направленных параллельно другой оси (оси z), – соблюдается тождественно, так как обе силы – и внешняя, и равнодействующая внутренних сил – направлены перпендикулярно этой оси. Однако для равновесия отсеченной части этого недостаточно, так как силы Q и R_B образуют пару сил с плечом z_1 . Соблюдение третьего условия – равенство нулю суммы моментов всех сил – подсказывает нам, что в сечении должны дополнительно действовать внутренние силы, приводящие к образованию уравновешивающей пары сил, т.е. изгибающего момента $M_I = R_B z_1$. Таким образом, окончательно выясняется, что в сечении действуют следующие внутренние силовые факторы: поперечная сила Q и изгибающий момент M_I .

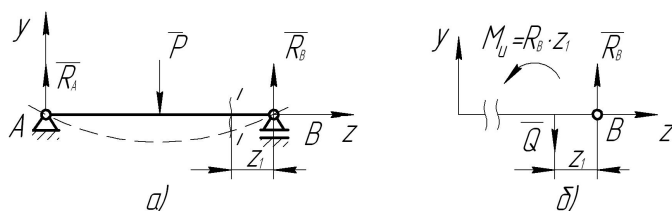


Рис. 21. Схема изгиба двухопорной балки (а);
метод сечения для определения внутренних сил (б)

Первый фактор – следствие деформации сдвига, а второй – следствие деформации изгиба. Как показала практика, главную опасность для прочности материала при поперечном изгибе представляют нормальные напряжения, поэтому в дальнейшем, рассматривая подобные случаи нагружения, будем пренебрегать сопутствующим явлением сдвига, т.е. не учитывать внутренние поперечные силы и соответствующие им касательные напряжения.

2.10. Распределение нормальных напряжений при изгибе

Представим себе брус прямоугольного сечения площадью F , жестко закрепленный одним концом и нагруженный так, как показано на рис. 22, а. Проанализируем напряженное состояние. Не подлежит сомнению, что в данном случае возникает деформация растяжения и что в любом нормальном поперечном сечении между свободным и закрепленным концами бруса будут одинаковые напряжения, т.е. что все сечения равноопасны. Это можно точно установить, применяя метод сечений. Тогда окажется, что в любом сечении внутренние силы упругости равны внешней силе P . Во всех точках сечений напряжения одинаковы (ведь внутренние силы при растяжении распределены по сечению равномерно) и равны

$$\sigma_P = \frac{N}{F}.$$

Изменим положение бруса в пространстве (рис. 22, б) и снова проанализируем напряженное состояние. Окажется, что все выводы, приведенные выше, остались справедливыми.

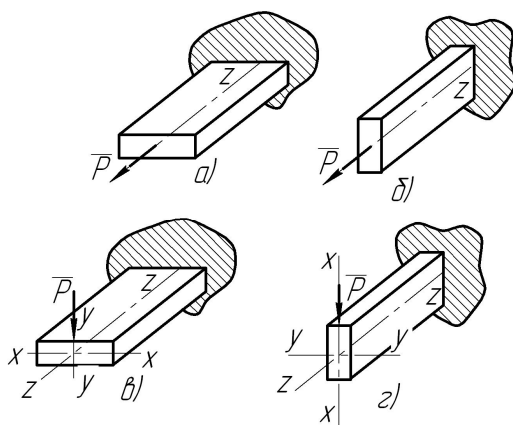


Рис. 22. Схемы растяжения (а, б) и изгиба (в, г) бруса при его различной ориентации

Теперь снова рассмотрим эти два бруса, однако силу приложим по-иному (рис. 22, в). Нетрудно представить, что в этих случаях брус (будем, как условились, называть его теперь балкой) испытывает деформацию изгиба. Будут ли все сечения равноопасны, как это имело место при растяжении? Опыт подсказывает, что нет. Возможные разрушения балок могут произойти прежде всего в сечении, совпадающем с заделкой. Чем же такое сечение отличается от всех остальных? Очевидно тем, что момент, создаваемый силой P (изгибающий момент), в этом сечении будет наибольшим. Ведь величина момента зависит не только от величины силы P , но и от плеча силы, и именно для сечений, совпадающих с заделкой, плечо наибольшее. Величину этого момента можно установить, применив метод сечений.

Таким образом, первое отличие деформации изгиба от деформации растяжения при рассмотренных случаях нагружения заключается в следующем: при изгибе есть опасное сечение, а при растяжении – повторим еще раз – все сечения равноопасны.

Продолжим наш анализ. Одинаковы ли напряженные состояния балок, изображенных на рис. 22, в, г? Опыт подсказывает, что балка, показанная на рис. 22, г, лучше сопротивляется деформации, несмотря на то, что размеры поперечных сечений в обоих случаях одинаковы. Чем отличается положение балок? Лишь тем, что в пер-

вом случае материал в сечении ближе расположен к нейтральной оси (ось $xz - xz$), а во втором – дальше (ось $y - y$). В предыдущем параграфе мы уже отмечали, что чем дальше от нейтрального слоя расположены в балке волокна, тем больше они деформируются, а значит, и тем большее сопротивление деформации оказывают. В этом второе отличие деформации изгиба от деформации растяжения: сопротивление деформации зависит не только от размеров поперечного сечения бруса, но и от ориентации его по отношению к изгибающей силе. В обоих случаях сечения представляют собой прямоугольник, однако в одном случае он имеет большое основание и малую высоту, а во втором – наоборот.

Следовательно, поскольку основное сопротивление изгибу оказывают периферийные слои материала (или, как говорят, «работают на изгиб»), целесообразно при изгибе применять брус с сечениями, в которых материал расположен дальше от нейтральной оси.

Наиболее выгодными профилями являются двутавры и швеллеры (рис. 23, а, б), у которых основная часть материала отнесена на значительное расстояние от нейтральной оси.

Как и при изучении деформации кручения, мы не будем выводить формулу для определения максимальных действительных напряжений изгиба, поскольку это сделать достаточно сложно. Покажем лишь последовательность рассуждений, которые сопровождают этот вывод при использовании метода сечений.

Вначале определяется величина относительной деформации (растяжения или сжатия) в произвольной точке интересующего нас сечения изогнутой балки. Затем по закону Гука определяется напряжение в той же точке. Так как напряжение, по существу, представляет собой элементарную нормальную внутреннюю силу, то следующим этапом является определение элементарного внутреннего изгибающего момента этой силы относительно нейтральной оси.

Вслед за этим найденные для различных точек элементарные внутренние моменты суммируются по всей площади и эта сумма, т.е. внутренний изгибающий момент, приравнивается внешнему изгибающему моменту. В результате соответствующих этим рассуждениям математических преобразований формула для определения максимальных напряжений изгиба приобретает такой вид:

$$\sigma_{Hmax} = \pm \frac{M_H}{W}.$$

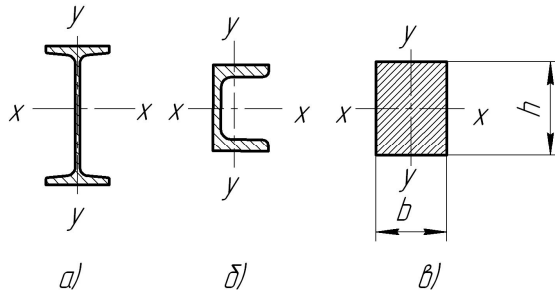


Рис.23. Типовые профили балок: а – двутавр; б – швеллер; в – прямоугольник

Знаки « \pm » означают, что в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, но расположенных по разные стороны от нее, будут различные по характеру деформации нормальные напряжения: в одном случае – напряжения растяжения, в другом – напряжения сжатия. Величина, обозначаемая – W , называется *осевым моментом сопротивления изгибу*. Она характеризует способность поперечного сечения сопротивляться деформации изгиба относительно нейтральной оси. Величина W зависит от формы и размеров поперечного сечения и его ориентации по отношению к изгибающему моменту, для чего к букве W добавляют индекс, соответствующий обозначению нейтральной оси, например W_x или W_y . Размерность $W - м^3, см^3, мм^3$. Для квадратного сечения со стороной a

$$W_x = W_y = \frac{a^3}{6};$$

для прямоугольного сечения (рис. 23, в)

$$W_x = \frac{bh^2}{6}, W_y = \frac{hb^2}{6};$$

для круглого сечения:

$$W_x = W_y \approx 0,1d^3.$$

Для сложных сечений типа двутавров и швеллеров осевые моменты сопротивления изгибу приводятся в справочниках.

2.10.1. Расчеты на прочность при изгибе

При проектном расчете требуется определить минимальные размеры опасного поперечного сечения, которые обеспечат при заданной нагрузке необходимую прочность. Изгибающий момент в опасном сечении и материал балки (следовательно, допускаемые напряжения тоже) известны. Как и в случае других деформаций, расчет ведут в предположении, что максимальные действительные напряжения будут равны или несколько меньше допускаемых, т.е.

$$\frac{M_H}{W} \leq [\sigma_H],$$

отсюда

$$W \geq \frac{M_H}{[\sigma_H]}.$$

Затем в зависимости от предполагаемой формы поперечного сечения балки определяют его необходимые размеры. Если сечение балки круглое, то $W = 0,1d^3$, откуда находится искомый диаметр d . Если же сечение балки представляет собой квадрат со стороной a , то искомый размер находят из равенства

$$W = \frac{a^3}{6}.$$

Несколько сложнее определить размеры прямоугольного сечения балки. В этом случае необходимо знать ориентацию сечения по отношению к действующему моменту, т.е. надо знать положение нейтральной оси. Знание положения нейтральной оси позволит из двух зависимостей

$$W = \frac{bh^2}{6}, \quad W = \frac{hb^2}{6}.$$

выбрать необходимую. Однако определить величины b и h можно будет лишь при условии, если известно отношение $\frac{b}{h}$. Если сечение

представляет собой стандартный профиль (двутавр, швеллер), то по полученной в расчете величине W из справочных таблиц подбирают номер соответствующего профиля. Причем табличное значение $W_{табл}$ должно быть больше расчетной величины W или равно ей.

При проверочном расчете определяют максимальные действительные напряжения, т.е. напряжения в наиболее опасных точках опасного сечения и сравнивают их с допускаемыми. В этом случае предварительно находят изгибающий момент в опасном сечении и момент сопротивления в этом сечении балки:

$$\sigma_{H\max} = \frac{M_H}{W} \leq [\sigma_H].$$

2.10.2. Определение опасного сечения при изгибе

Выше отмечалось, что одно из отличий деформации изгиба от деформации растяжения (при рассмотренных выше случаях нагружения) – наличие опасного сечения, т.е. сечения, в котором действует максимальный изгибающий момент.

Очевидно, надо научиться определять положение опасного сечения балки и изгибающий момент в этом сечении. Анализ простейшего случая нагружения балки (см. рис. 22) позволил найти положение опасного сечения, опираясь лишь на опыт. Снова вернемся к этому случаю и приведем более строгие доказательства. Балку теперь изобразим упрощенно (рис. 24, а). Для определения внутренних силовых факторов воспользуемся методом сечений. Так как этот метод применим лишь к свободному телу, то будем рассматривать равновесие отсеченной правой части (рис. 24, б). В сечении 1 будут действовать поперечная сила $Q = P$ и изгибающий момент $M_H = Pz_1$. Рассмотрим теперь сечение 2 (рис. 24, в). В нем будет действовать та же сила Q , но момент будет другой – Pz_2 . Аналогичные результаты получим и для других сечений. Мы уже условились, что поперечными силами и вызванными ими касательными напряжениями сдвига будем пренебрегать. Все внимание сосредоточим на изгибающем моменте,

величина которого, как это ясно из предыдущих рассуждений, изменяется по длине балки по линейному закону – пропорционально отрезкам z_1 , z_2 и т.д.

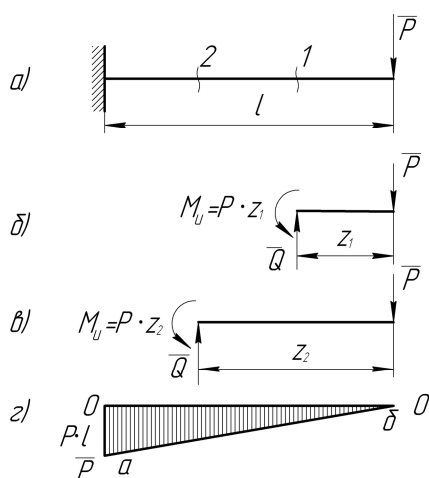


Рис. 24. Построение эпюры изгибающих моментов для одноопорной (консольной) балки: a – схема действия внешней силы; b , $в$ – равновесие отсеченных частей; $г$ – эпюра изгибающих моментов

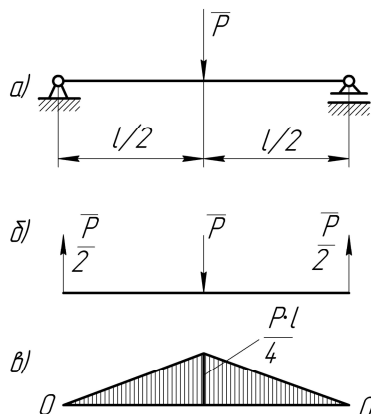


Рис.25. Построение эпюры изгибающих моментов для двухопорной балки: a – схема действия внешней силы; b – равновесие балки под действием внешней силы и опорных реакций; $в$ – эпюра изгибающих моментов

Этот закон можно изобразить графически – построить эпюру (график изменения) моментов. Выбрав масштаб для единицы измерения момента, откладываем от осевой линии эпюры (рис. 24, $г$) ординату, соответствующую величине наибольшего момента – Pl (условимся момент считать положительным, если он прогибает балку выпуклостью вниз, следовательно, в данном случае момент отрицательный).

Вторая точка для построения графика соответствует свободному концу балки. В этом сечении момент равен нулю. Соединив точ-

ки a и b , получим график изменения изгибающего момента по длине балки, т.е. эпюру моментов. Промежуточные между точками a и b ординаты соответствуют моментам в соответствующих сечениях. Итак, для данного случая получили, что опасное сечение – в заделке, а изгибающий момент в нем равен Pl .

Разберем более сложный случай, когда балка двухопорная и нагружена силой в середине пролета (рис. 25, a). Здесь сразу нельзя применить метод сечений, так как по любую сторону от сечения оказывается несвободная часть балки со связями. В подобных случаях надо вначале отбросить опоры и заменить их реакциями (рис. 25, b).

Каждая из реакций равна $\frac{P}{2}$. Применяя многократно метод сечений,

вначале рассмотрим равновесие отсеченных частей балки, расположенных правее любого из сечений, проведенных на участке от правого конца балки до середины пролета. Результат очевиден: если на конце балки момент равен нулю, то к середине пролета он возрастает

до значения $\frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2}$, т.е. $\frac{Pl}{4}$. Затем точно так же рассмотрим рав-

новесие отсеченных частей балки, расположенных левее любого из сечений, проведенных на участке от левого конца балки до середины пролета. Результаты будут аналогичными. Выбрав масштаб единицы момента и установив, что изгибающий момент положителен, отложим

вверх по оси ординату $\frac{Pl}{4}$ и построим эпюру M_u (рис. 25, $в$). По

эпюре видно, что в данном случае опасное сечение находится в середине пролета, момент M_u в опасном сечении равен $\frac{Pl}{4}$. Именно эту

величину надо будет подставить в расчетное уравнение при проектном или проверочном расчете балки на изгиб.

2.11. Продольный изгиб

Рассматривая деформацию сжатия, мы отмечали, что она возникает при действии на брус сил, направленных по его продольной оси навстречу друг другу, и что при этом поперечные размеры бруса мало отличаются от его продольных размеров.

Если поперечные размеры бруса будут во много раз меньше его длины (такой брус называют стержнем), то может возникнуть иное напряженное состояние. Вначале, когда силы невелики, стержень действительно подвергается сжатию и его ось будет оставаться прямолинейной. Однако, увеличивая силу, можно подойти к такому ее значению, которое выведет стержень из устойчивого положения и его ось станет криволинейной (рис. 26). Естественно, что работоспособность детали при этом будет нарушена.

Деформация стержня, являющаяся следствием потери его устойчивости под действием сжимающих сил, называется продольным изгибом.

Сила, которая соответствует моменту перехода стержня из устойчивого положения в неустойчивое, называется *критической силой*, а напряжение сжатия, соответствующее этой критической силе, — *критическим напряжением*.

Практика показывает, что это напряжение меньше обычного предельно опасного напряжения, ориентируясь на которое, выбирают допускаемые напряжения при сжатии. Поэтому, чтобы расчет на прочность при сжатии одновременно гарантировал устойчивость, допускаемые напряжения на сжатие при таком нагружении стержней снижаются в зависимости от соотношения длины и поперечных размеров стержня и от способа закрепления его концов. Например, при прочих равных условиях стержень, закрепленный, как показано на рис. 26, а, менее устойчив, чем стержень, показанный на рис. 26, б.

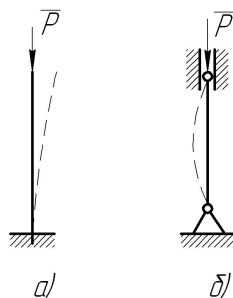


Рис. 26. Продольный изгиб стержней жестко зашцементированного (а) и с шарнирными опорами (б)

2.12. Сложное сопротивление

Мы рассматривали случаи простых деформаций: растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, поперечный и продольный изгибы. Однако некоторые детали могут испытывать одновременно несколько простых деформаций, т.е. *сложное сопротивление*. Наиболее часто встречаются следующие комбинации простых деформаций: растяжение (сжатие) с изгибом и изгиб с кручением.

Если брус нагружен так, как показано на рис. 27, а, то это обычная деформация растяжения. Если брус нагружен так, как показано на рис. 27, б (теперь это балка), то это обычная деформация поперечного изгиба. А если нагружение будет таким, как показано на рис. 27, в ? Определить вид деформации в этом случае нетрудно, если разложить заданную силу P на две составляющие – P_1 и P_2 (рис. 27, г). Составляющие находятся как проекции силы P на координатные оси. Тогда ясно, что нагружение аналогично сумме двух первых нагружений (рис. 27, а, б), а, значит, и напряженное состояние будет соответствовать одновременному появлению напряжений растяжения и напряжений изгиба. Проанализируем действие силы P_1 .

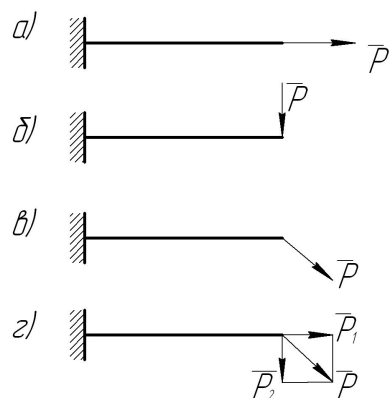


Рис. 27. Различные виды деформаций:
а – растяжение; б – поперечный изгиб; в – сложная деформация;
г – сложная деформация как сумма двух простых деформаций

При деформации растяжения все сечения по длине бруса и все точки в сечениях равноопасны. Равнодействующая внутренних сил $N=P_1$. Величина напряжения

$$\sigma_p = \frac{P_1}{F},$$

где F – площадь поперечного сечения бруса.

Проанализируем действие силы P_2 . Здесь наиболее опасно сечение в заделке (там наибольший изгибающий момент $M_{II}=P_2l$) и в этом сечении наиболее опасны точки, дальше всего расположенные от нейтральной оси. Напряжение в этих точках

$$\sigma_{II\max} = \pm \frac{P_2l}{W},$$

где P_2l – изгибающий момент в заделке; W – осевой момент сопротивления сечения изгибу.

Нормальные напряжения σ_p и $\sigma_{II\max}$ можно складывать алгебраически (они направлены по одной прямой). Очевидно, что в итоге наиболее опасным будет сечение в заделке, и в этом сечении наиболее опасными будут те точки, в которых напряжения суммируются, т.е. там, где у них будет одинаковый знак:

$$\sigma_{\text{сум}} = \frac{P_1}{F} + \frac{P_2l}{W}.$$

2.13. Расчет на прочность балки при сложном сопротивлении

2.13.1. Построение эпюры продольных сил

Методику построения эпюры N представим для показанной на рис. 28, а схемы нагружения балки с заданной длиной l_{AB} (в рассматриваемом примере $l_{AB}=0,7$ м, $\bar{P}=1000$ Н, $\alpha=60^\circ$). Направление и значения продольных усилий R_A^F , P^F заданы, где $R_A^F = 500$ Н, $P^F = P \cos \alpha = 1000 \cdot 0,5 = 500$ Н.

Для построения эпюры продольных сил используем метод сечений (рис. 28, б).

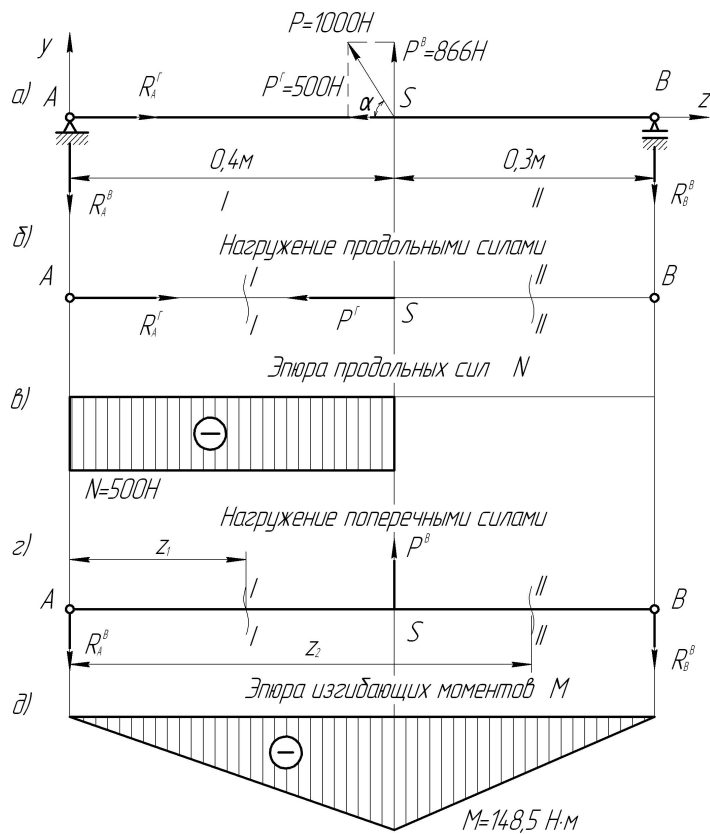


Рис. 28. Эпюры продольных сил и изгибающих моментов

Сечение I – I

Равновесие левой части обеспечивается внутренним продольным сжимающим усилием $N = R_A^r = 500\text{ H}$.

Сечение II – II

Равновесие левой части обеспечивается продольным усилием

$$N = R_A^r - P^r = 500 - 500 = 0.$$

Эти данные использованы для построения эпюры N на рис. 28, в.

2.13.2. Построение эпюры изгибающих моментов

Строим схему нагружения балки поперечными усилиями (рис. 28, г). Направления и значения усилий R_A^B, R_B^B, P^B , заданы, где $R_A^B = 371$ Н, $R_B^B = 495$ Н, $P^B = P \sin \alpha = 1000 \cdot 0,866 = 866$ Н.

Для построения эпюры изгибающих моментов используем метод сечений.

Сечение I – I $0 \leq z_1 \leq 0,4$ м

$$M = -R_A^B \cdot z_1;$$

при $z_1 = 0, M = 0$,

при $z_1 = 0,4$ м. $M = -371 \cdot 0,4 = -148,5$ Нм.

Сечение II – II $0,4 \text{ м} \leq z_2 \leq 0,7$ м.

$$M = -R_{12}^T \cdot z_2 + M_{H2} + (P_{H2}^B - G_2^B) \cdot (z_2 - 0,225);$$

при $z_2 = 0,4$ м, $M = -371 \cdot 0,4 = -148,5$ Нм;

при $z_2 = 0,7$ м, $M = -371 \cdot 0,7 + 866 \cdot 0,3 \approx 0$.

По результатам расчета строим эпюру М изгибающих моментов (рис. 28, д).

2.13.3. Определение геометрических характеристик сечения балки, расчет на прочность

Для прямоугольного сечения балки с размерами $h=22$ мм, $b=14$ мм находим:

1) Площадь поперечного сечения

$$F = b \cdot h = 14 \cdot 22 = 308 \text{ мм}^2.$$

2) Момент сопротивления сечения

$$W_X = \frac{bh^2}{6} = \frac{14 \cdot 22^2}{6} = 1129 \text{ мм}^3.$$

Анализ эпюр продольных сил и изгибающих моментов (рис. 28, в, д) показывает, что опасным является сечение, про-

ходящее через точку S балки. В этом сечении имеют место наибольшая продольная сила $N_{MAX} = R_A^T = 500$ Н и максимальный изгибающий момент $M_{MAX} = -148,5$ Нм. Балка в отмеченном сечении испытывает совместное действие изгиба и сжатия. Для определения суммарных напряжений используем принцип независимости действия сил.

3) Напряжения в опасном сечении от сжимающих усилий

$$\sigma_c = \frac{N_{MAX}}{F} = \frac{500}{308} = 1,62 \text{ МПа.}$$

4) Напряжения в опасном сечении от изгиба

$$\sigma_{из} = \frac{M_{MAX}}{W_x} = \frac{148,5 \cdot 10^3}{1129} = 131,5 \text{ МПа.}$$

5) Суммарные напряжения в сжатых волокнах

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_{из} = 1,62 + 131,5 \approx 133 \text{ МПа.}$$

Полагаем, что балка изготовлен из стали Ст.3, для которой допускаемое напряжение при изгибе $[\sigma] = 150$ МПа. Таким образом, в рассматриваемом случае условие прочности балки при сопротивлении на изгиб со сжатием $\sigma \leq [\sigma]$, $133 < 150$ выполняется.

6) Коэффициент запаса прочности балки при сложном сопротивлении

$$n = \frac{[\sigma]}{\sigma} = \frac{150}{133} = 1,13.$$

7) Если при расчетах получили $\sigma > [\sigma]$, $n < 1$, необходимо увеличить геометрические размеры сечения и повторить расчет, обеспечив выполнение условия прочности. Последнее можно также обеспечить, приняв в качестве материала балки сталь с более высоким допускаемым напряжением при изгибе.

Глава 3. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ

3.1. Поступательное движение твердого тела

К простейшим движениям тела относятся поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором всякая прямая, проведенная в этом теле, остается параллельной своему начальному положению.

Рассмотрим тело (рис. 29), которое совершает поступательное движение. Проведенная в теле прямая AB во время движения перемещается параллельно своему начальному положению. Рассмотрим перемещение тела за малый промежуток времени Δt .

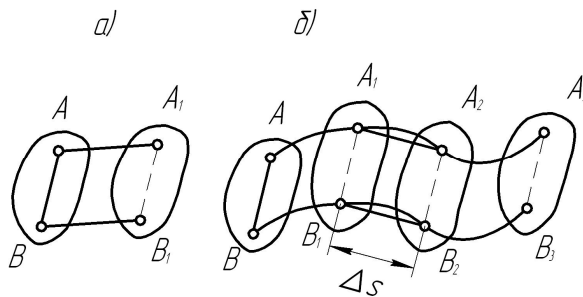


Рис. 29. Поступательное движение тела

При этом можно считать, что точки A и B перемещаются по прямолинейным и параллельным прямым. За время Δt они пройдут одинаковые пути Δs . Следовательно, скорости этих точек будут одинаковы по величине

$$v_A = v_B = v$$

и направлены в одну сторону, т.е.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}.$$

Аналогично доказывается равенство ускорений точек тела при поступательном движении:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}.$$

Итак, при поступательном движении тела все его точки описывают одинаковые траектории и в любой момент времени имеют равные по величине и одинаково направленные скорости и ускорения.

Поэтому поступательное движение тела вполне характеризуется движением одной его точки. Однако поступательное движение может совершать только твердое тело, а не отдельная точка.

Примером поступательного движения служит движение поршня паровой машины, движение вагона на прямом участке пути и т.п.

Поступательное движение может быть прямолинейным и криволинейным. При прямолинейном поступательном движении все точки тела описывают равные и параллельные прямые линии (рис. 29, а). При криволинейном поступательном движении все точки тела описывают одинаковые кривые (рис. 29, б).

3.2. Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Точки тела, вращающегося вокруг оси, перемещаются по окружностям (рис. 30, а), радиусы которых r равны расстояниям точек от оси вращения.

Линейная скорость v точки A и угловая скорость ω тела связаны между собою линейной зависимостью

$$v_A = \omega r.$$

Подставив в формулу для линейной скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, значение n угловой скорости в оборотах в минуту, получим

$$v_A = \frac{\pi n}{30} r.$$

Направлена \vec{v}_A по перпендикуляру к радиусу r в сторону ω (рис. 30, а).

В общем случае вектор скорости точки A , вращаясь вокруг точки O , изменяется по величине и направлению. Поэтому у этой точки будет иметь место нормальное ускорение \vec{a}_A^n (характеризует

изменение \bar{v}_A по направлению) и тангенциальное ускорение \bar{a}_A^τ (характеризует изменение \bar{v}_A по величине). Величина нормального ускорения \bar{a}_A^n точки A определится как

$$a_A^n = \frac{v_A^2}{r}.$$

Подставляя в это выражение значение скорости $v_A = \omega r$, получаем

$$a_A^n = \omega^2 r.$$

Направлено \bar{a}_A^n по радиусу r к центру O вращения.

Касательное ускорение точки определяется из выражения

$$a_A^\tau = \varepsilon r,$$

где ε – угловое ускорение вращающегося тела.

Направлено \bar{a}_A^τ перпендикулярно r в сторону ε .

Полное ускорение точки при неравномерном вращении вокруг оси (рис. 30, б) геометрически складывается из касательного и нормального ускорений

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau.$$

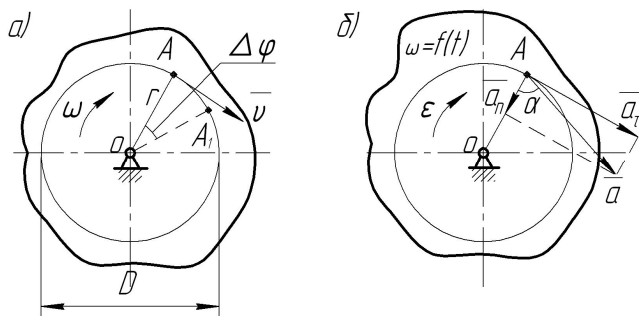


Рис. 30. Скорости и ускорения точки вращающегося тела

3.3. Понятие о плоскопараллельном движении твёрдого тела

Примером плоскопараллельного движения могут служить движение шатуна кривошипно-шатунного механизма, движение колеса на прямолинейном участке пути и др.

Покажем, что любое перемещение плоской фигуры можно осуществить двумя простейшими движениями: одним поступательным и одним вращательным. Положение плоской фигуры на рис. 31, а вполне определяется отрезком A_1B_1 . Этот отрезок можно переместить из положения I в положение II – следующим образом: перенести его параллельно самому себе в положение $A_2B'_2$, (при этом фигура совершит поступательное перемещение), а затем повернуть отрезок вокруг точки A_2 против часовой стрелки на угол φ , (фигура при этом совершит вращательное движение и займет положение II). Можно поступить иначе: вначале дать фигуре поступательное перемещение до положения отрезка $B_2A'_2$, а затем повернуть вокруг точки B_2 против часовой стрелки опять на угол φ .

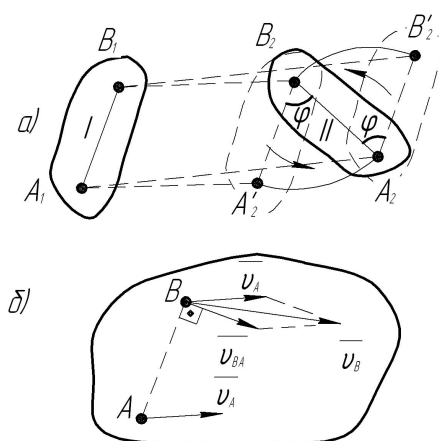


Рис. 31. Плоскопараллельное движение
твёрдого тела

Точку, вокруг которой фигура совершает поворот, называют полюсом. В первом случае полюсом была точка A_2 , во втором – B_2 . Очевидно, за полюс может быть принята произвольная точка фигуры.

Итак, плоскопараллельное движение можно разложить на два составляющих движения: поступательное вместе с некоторым полюсом и вращательное вокруг этого полюса. *Поступательная часть плоскопараллельного движения зависит от выбора полюса.* Как видно из рис. 31, а, поступательное перемещение A_1A_2 при выборе за полюс точки A_2 не равно поступательному перемещению B_1B_2 при выборе за полюс точки B_2 .

Рассматривая вращательную часть плоскопараллельного движения, нетрудно установить, что *угол поворота не зависит от выбора полюса.*

Разложение плоскопараллельного движения можно использовать для определения скоростей точек тела. Так как плоскопараллельное движение фигуры может быть представлено как сумма двух движений – поступательного и вращательного, то скорость любой точки тела B (рис. 31, б) можно представить как геометрическую сумму двух скоростей: скорости \vec{v}_A движения полюса A и скорости \vec{v}_{BA} вращательного движения точки B вокруг полюса A :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

Величина скорости вращательного движения определится по формуле

$$v_{BA} = \omega_{AB} r_{AB},$$

где ω – угловая скорость вращения точки B относительно точки A ; AB – радиус вращения точки B относительно полюса A .

Скорость вращательного движения \vec{v}_{BA} направлена перпендикулярно радиусу вращения AB .

Так как вращательная часть движения не зависит от выбора полюса, то общая для всех полюсов угловая скорость ω называется угловой скоростью плоской фигуры.

Рассуждая аналогично, можно показать, что ускорение точки B запишется как

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^{\tau},$$

где a_A – ускорение точки A как полюса; a_{BA}^n – нормальное ускорение вращения точки B вокруг точки A ; a_{BA}^τ – тангенциальное ускорение вращения точки B вокруг точки A .

Вектор \vec{a}_{BA}^n направлен параллельно отрезку AB в сторону полюса – точку A . Его величина определится по формуле

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB.$$

Вектор \vec{a}_{BA}^τ перпендикулярен отрезку AB и направлен в сторону углового ускорения ε вращения тела вокруг полюса. Его величина определится как

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB.$$

3.4. Аксиомы динамики

В динамике рассматривается движение материальных точек или тел под действием приложенных сил; устанавливается связь между приложенными силами и вызываемым ими движением.

Динамика изучает такие системы сил, которые не находятся в состоянии равновесия. Она основывается на ряде вытекающих из опыта аксиом; некоторые из них были рассмотрены ранее в статике.

Напомним содержание первой аксиомы, так называемого *закона инерции*, рассмотренного в статике.

Система сил, приложенная к материальной точке, является уравновешенной, если под ее воздействием точка находится в состоянии относительного покоя или движется равномерно и прямолинейно. Таким образом, первая аксиома определяет условия, при которых система сил взаимно уравновешена и, следовательно, эквивалентна нулю.

Однако аксиома имеет еще и другой смысл, на котором следует остановиться подробнее. В случае относительного покоя или равномерного и прямолинейного движения ускорение материальной точки равно нулю. Поэтому *под действием уравновешенной системы сил или при отсутствии силовых воздействий материальная точка не испытывает ускорений и движется равномерно и прямолинейно.*

Когда на точку действует неуравновешенная система сил, точка будет иметь некоторое ускорение. Связь между действующей

на точку силой и ускорением, вызываемым этой силой, устанавливается второй аксиомой динамики, которая заключается в следующем:

Ускорение \vec{a} , сообщаемое материальной точке приложенной к ней силой \vec{P} , имеет направление силы и по величине пропорционально ей (рис. 32, а):

$$\vec{P} = m\vec{a},$$

где m – коэффициент пропорциональности, связывающий силу с ускорением, появившимся в результате приложения силы.

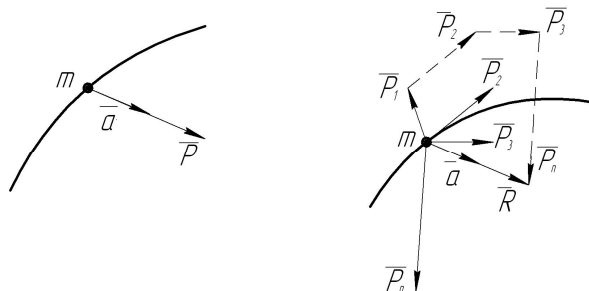


Рис. 32. Векторы силы и ускорения

Уравнение называется *основным уравнением динамики* в векторной форме. Оно справедливо также и в скалярной форме

$$P = ma.$$

Различие между первой и второй формами заключается в том, что векторная форма уравнения учитывает направление векторов силы и ускорения, а скалярная форма учитывает только численные значения этих величин.

Коэффициент m , входящий в основное уравнение динамики, имеет очень важное физическое значение. Он представляет собой *массу материальной точки*.

Если решить уравнение относительно ускорения, получим

$$a = \frac{P}{m}.$$

Из этого уравнения видно, что чем больше масса, тем большая сила потребуется для сообщения телу определенного ускорения. Следовательно, масса характеризует инертность, или «неподатливость» тела воздействию силы.

Таким образом, масса материальной точки является мерой ее инертности.

Для вращательного движения тела основное уравнение динамики имеет вид

$$\overline{M} = I \overline{\varepsilon},$$

где I – момент инерции тела (мера инертности тела во вращательном движении); ε – угловое ускорение.

Приведем формулировку аксиомы независимости действия сил:

Если на материальную точку действует несколько сил, то ускорение, получаемое точкой, будет таким же, как при действии одной силы, равной геометрической сумме этих сил (рис. 32, б), т.е.

$$m \overline{a} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \dots + \overline{P}_n = \overline{R},$$

где \overline{R} – равнодействующая системы сил, приложенных к рассматриваемой точке.

Остановимся на последней аксиоме динамики – аксиоме взаимодействия, знакомой из статики.

Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие. Иными словами, силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю и направлены по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

3.5. Понятие о силах инерции. Метод кинестатики

Рассмотрим материальную точку A , на которую действует не-

которая система сил $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \dots, \overline{P}_n$

(рис. 33). Среди действующих сил могут быть заданные активные силы, а также реакции связей.

На основании аксиомы независимости действия сил точка A под действием этих сил получит такое же ускорение, как если бы на нее действовала лишь одна сила, равная геометрической

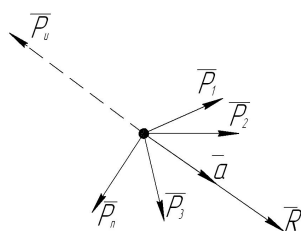


Рис.33. Сила инерции

сумме заданных сил

$$m \bar{a} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots + \bar{P}_n = \bar{R}.$$

Предположим, что кроме сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ на точку действует еще одна сила \bar{P}_n , по величине равная равнодействующей силе \bar{R} и направленная в сторону, противоположную равнодействующей силе (рис.33)

$$\bar{P}_n = -\bar{R} = -m\bar{a} = -(\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots + \bar{P}_n).$$

Это уравнение можно представить в виде

$$(-m\bar{a}) + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots + \bar{P}_n = 0.$$

или

$$\bar{P}_n + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots + \bar{P}_n = 0.$$

Таким образом, все силы, включая силу \bar{P}_n , должны уравновешиваться, так как силы \bar{P}_n и \bar{R} равны между собой и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Сила \bar{P}_n , равная произведению массы точки на ее ускорение, но направленная в сторону, противоположную ускорению, называется **силой инерции**.

Итак, из последнего уравнения следует, что в каждый данный момент времени силы, приложенные к материальной точке, уравновешиваются силами инерции. Приведенный вывод называют началом или принципом Даламбера; он может быть применен не только к материальной точке, но и к твердому телу или к системе тел. В последнем случае он формулируется следующим образом: *если ко всем реально действующим силам, приложенным к движущемуся телу или системе тел, приложить силы инерции, то полученную систему сил можно рассматривать как находящуюся в равновесии*.

Следует подчеркнуть, что силы инерции действительно существуют, но приложены не к движущемуся телу, а к тем телам, которые вызывают движение, т.е. к связям.

Применение принципа Даламбера позволяет свести решение динамических задач к использованию уравнений равновесия, т.е. к замене задачи динамики эквивалентной ей задачей статики. Такой прием решения задач динамики носит название **метода кинетостатики**.

Глава 4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

4.1. Структура механизмов. Основные определения. Образование механизмов по Асуре

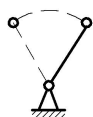
– *Механизмом* называется искусственно созданная система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел.

Одно или несколько жестко соединенных твердых тел, входящих в состав механизма, называется *звеном*. Звено, принимаемое за неподвижное, называется *стойкой*. Звенья механизма, положения и законы движения которых задаются, называются *ведущими*, а звенья механизма, положения и законы движения которых однозначно зависят от положений и законов движения ведущих звеньев, называются *ведомыми*.

Звеньям предаются типовые наименования, определяемые характером их движения:



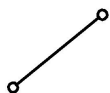
– кривошип – звено, совершающее полный оборот относительно стойки;



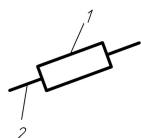
– коромысло – звено, совершающее угловые колебания относительно стойки;



– ползун – звено, совершающее поступательное движение относительно стойки;



– шатун – звено, совершающее плоскопараллельное движение (не связано со стойкой);



– 1– кулисный камень – звено, совершающее поступательное движение относительно подвижной направляющей 2, называемой кулисой.

– *Кинематической парой* называется соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение. Поверхности, линии, точки звена, по которым оно может соприкасаться с другим звеном, образуя кинематическую пару, называются *элементами* кинематической пары.

Наибольшее использование получили две классификации кинематических пар: по И.И. Артоблеву и по Ф. Рело.

По Рело Ф. кинематическая пара называется высшей, если её элементами являются линии или точки; у низших кинематических пар элементами являются плоскости или поверхности.

По Артоблеву И.И. класс кинематической пары определяется числом условий связи, налагаемых этой парой на относительное движение её звеньев. В этой классификации выделено пять классов кинематических пар. Плоские кинематические пары, звенья которых совершают движения в одной или параллельных плоскостях, могут иметь в этой классификации лишь IV или V класс. При этом пары IV класса являются высшими, а пары V класса – низшими по Ф. Рело.

– *Кинематической цепью* называется связанная система звеньев, образующих между собою кинематические пары. Кинематические цепи подразделяются на простые и сложные, замкнутые и незамкнутые, плоские и пространственные.

Простой кинематической цепью называется цепь, у которой каждое звено входит не более чем в две кинематические пары.

Сложной кинематической цепью называется цепь, у которой имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематические пары.

Замкнутой кинематической цепью называется цепь, каждое звено которой входит по крайней мере в две кинематические пары.

Незамкнутой кинематической цепью называется цепь, у которой есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару. Плоской называется кинематическая цепь, все звенья которой совершают движения в одной или параллельных плоскостях. У пространственных цепей звенья совершают пространственные перемещения.

– *Степенью подвижности W* кинематической цепи называется число степеней её свободы, относительно неподвижного звена (стойки) этой цепи. Для плоских кинематических цепей, которые и будем рассматривать ниже, W определяется по формуле П.Л. Чебышева

$$W = 3n - 2p_5 - p_4,$$

где n – число подвижных звеньев цепи; p_5 – число кинематических пар V класса, образованных всеми звеньями цепи; p_4 – число кинематических пар IV класса, образованных всеми звеньями цепи.

– *Механизмом* называется кинематическая цепь, в которой при заданных положениях и законах движения одного или нескольких ведущих звеньев, положения и законы движения остальных (ведомых) звеньев являются единственно определенными. Каждая замкнутая кинематическая цепь, имеющая стойку и степень подвижности W , равную числу входных звеньев, является *механизмом*.

– Кинематическая схема механизма – это графическое его изображение с условным представлением звеньев и кинематических пар, выполненное в масштабе, и учитывающее характер относительного движения звеньев.

На кинематических схемах механизмов звенья, как правило, изображаются прямоугольниками и отрезками прямых и нумеруются арабскими цифрами.

Кинематические пары в механизмах обозначаются большими буквами латинского алфавита и схематически изображаются так, как это сделано на рис. 34, 35. Пары IV класса очерчиваются кривыми, которыми они являются в натуре. Стойку (неподвижное звено) принято выделять штриховкой (рис. 36).

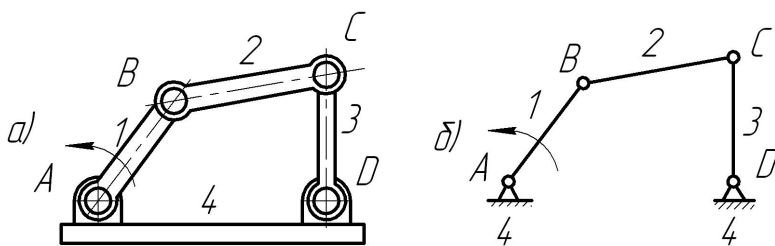


Рис. 34. Плоский шарнирный четырехзвенный механизм:
а – полуконструктивная схема; б – кинематическая схема

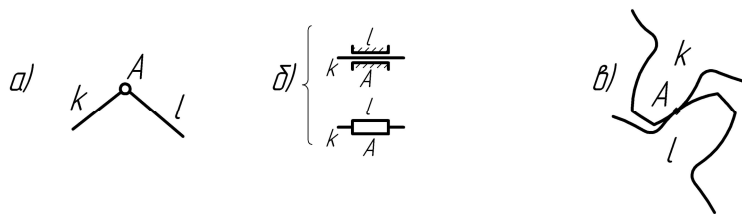


Рис. 35. Схематическое изображение кинематических пар в плоских механизмах:
 а – шарнир-вращательная пара V класса (низшая); б – поступательная пара V класса (низшая); в – зацепление зубчатых профилей – кинематическая пара IV класса (высшая)

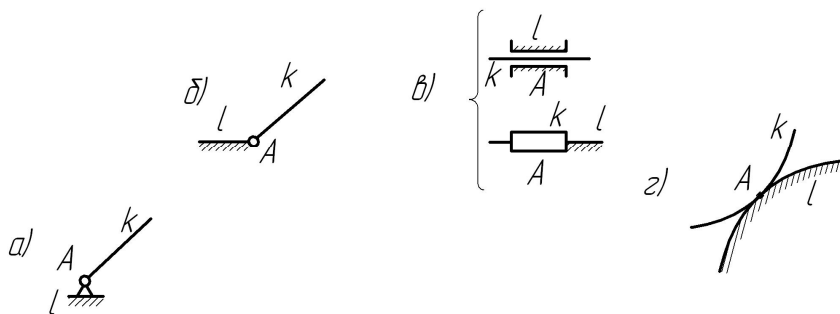


Рис. 36. Схематическое изображение неподвижных элементов кинематических пар: а и б – вращательная кинематическая пара; в – поступательная пара; г – высшая пара

– *Структурная группа* – это простейшая кинематическая цепь, которая, будучи присоединена всеми своими свободными концами к стойке, имеет $W = 0$ и которая не может быть разбита на более простые цепи, имеющие $W = 0$.

Структурные группы подразделяются на классы и внутри класса на порядки. Далее будем рассматривать простейшие группы II класса и 2-го порядка, состоящие из двух звеньев и трёх кинематических пар. Такие группы подразделяются также по видам в зависимости от числа и местоположения поступательных кинематических пар (рис. 37, а, б).



Рис. 37. Группы Ассура второго класса различных видов:
а – первого; б – второго; в – механизмы I класса

– Механизм I класса – это соединение входного звена со стойкой. Возможны два варианта таких соединений, представленные на рис. 37, в. На изображениях механизмов I класса входное звено представляется со стойкой.

Понятия механизм I класса и структурной группы ввёл Л.В. Ассур, который также предложил названный впоследствии его именем принцип образования механизмов. Согласно ему, любой механизм образуется последовательным присоединением к одному или нескольким механизмам I класса и стойке структурных групп. При этом первая входящая в состав механизма структурная группа одним или несколькими своими свободными концами присоединяется к механизмам I класса, а оставшимися свободными концами – к стойке. Каждая последующая структурная группа одним или несколькими своими свободными концами присоединяется к звеньям образованной кинематической цепи; некоторыми своими свободными концами она может присоединяться к другим, не вошедшим в состав образованной цепи, механизмам I класса; оставшимися свободными концами эта структурная группа присоединяется к стойке.

– *Класс механизма* определяется наивысшим классом структурной группы, вошедшей в его состав. Для каждого класса механизмов разработаны свои методы их кинематического и динамического исследования. Поэтому структурное исследование механизма, сводящееся к выделению в нём структурных групп, их классификации и определению класса механизма, должно предшествовать его кинематическому и динамическому исследованию.

– *Формула строения механизма* – это условная запись, отражающая порядок вхождения в состав механизма всех составляющих его структуры (механизмов I класса и структурных групп). Эта формула является важнейшим результатом структурного исследования механизма, т.к. она показывает класс механизма, а значит соответст-

вующий этому классу метод последующего кинематического и динамического исследования этого механизма. Кроме того, эта формула определяет последовательность кинематического и динамического исследования всех элементов структуры механизма. Так, кинематическое исследование проводится в порядке следования этих элементов в формуле строения механизма, динамическое исследование в обратном порядке.

Ниже представленный пример структурного исследования механизма иллюстрирует условные обозначения, используемые при записи формулы строения механизма.

Для проведения структурного исследования задаётся схема механизма, изображённая не в масштабе, с указанием с помощью стрелок входных звеньев. Само исследование проводится в следующей последовательности:

1. Подсчитывается число n подвижных звеньев механизма, число p_5 кинематических пар V класса и число p_4 кинематических пар IV класса. Определяется степень подвижности W и, если найденное значение равно числу входных звеньев, делается вывод о принадлежности рассматриваемой кинематической цепи к механизмам.

2. Так как далее будем рассматривать лишь механизмы с одним входным звеном, то выделяется единственный механизм I класса.

3. Оставшаяся цепь разбивается на структурные группы с соблюдением общего принципа образования механизмов по Л.В. Асуре. Определяется класс каждой группы.

4. Определяется класс всего механизма.

5. Записывается формула строения механизма.

Пример структурного исследования механизма

Схема исследуемого механизма с указанием его входного звена представлена на рис. 38.

Решение

1. Подсчитывается степень подвижности механизма по формуле Чебышева. Для этого определяются

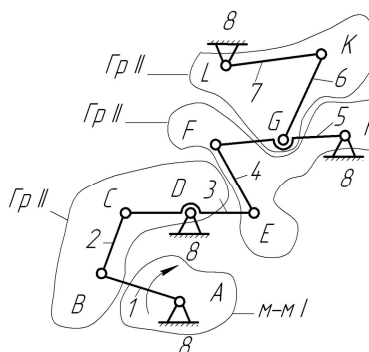


Рис. 38. Механизм автомата – перекоса вертолета

общее число звеньев $k = 8$, число подвижных звеньев $n = k - 1 = 7$, число кинематических пар V класса $p_5 = 10$, число кинематических пар IV класса $p_4 = 0$ Степень подвижности

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 - 0 = 1.$$

Исследуемая кинематическая цепь является механизмом, так как при $W=1$ она имеет одно входное звено.

2. Выделяется механизм I класса – соединение в кинематической паре А входного звена 1 и стойки 8 – см. механизм I кл. на рис. 38.

3. Оставшуюся цепь из звеньев 2...7 разбиваем на структурные группы. Первой выделяем структурную группу II класса, состоящую из звеньев 2 и 3, которая, в соответствии с принципом Л.В. Ассура, одним свободным концом В присоединяется к механизму I класса, а другим свободным концом D – к стойке. Второй выделяем группу II класса из звеньев 4 и 5, которая одним свободным концом Е присоединяется к звену 3, уже включенному в схему механизма, а вторым свободным концом Н – к стойке. Аналогично третьей выделяем структурную группу II класса из звеньев 6,7, которая одним свободным концом G присоединяется к звену 5, уже включенному в схему механизма, а другим свободным концом L – к стойке.

4. Т.к. все структурные группы, входящие в состав исследуемого механизма, имеют II класс, этот механизм относится к механизмам II класса.

5. Записывается формула строения механизма.

Мех-м II = м-м I (1,8) → гр. II (2,3) → гр. II (4,5) → гр. II (6,7).

Читаются обозначения этой формулы следующим образом: исследуемый механизм имеет II класс (Мех-м II) и состоит (знак равенства) из механизма I класса, образованного звеньями 1 и 8 (м-м I (1,8)), к которому присоединяется группа звеньев II класса, образованная звеньями 2-3 – (гр. II (2,3)); к этой группе присоединяется следующая группа II класса, образованная звеньями 4 и 5 – (гр. II (4,5)); к ней присоединяется ещё одна группа II класса, образованная звеньями 6 и 7 – гр. II (6,7).

4.2. Планы положений, скоростей

и ускорений точек звеньев механизмов

Исходными данными для построения этих планов служат: кинематическая схема механизма и законы движения его входных звеньев.

По изложенной в п. 4.1 методике проводится исследование структуры заданного механизма, определяется его класс и записывается формула строения. Построение отмеченных планов проводится последовательно для всех элементов структуры механизма в порядке их исследования в формуле строения. Последовательность построения этих планов следующая:

1. Строятся планы положений механизма.
2. Строятся планы скоростей, определяются угловые скорости вращения звеньев.
3. Строятся планы ускорений, определяются угловые ускорения вращения звеньев.

Масштабы построения планов положений, скоростей и ускорений должны подбираться так, чтобы наиболее полно использовалось поле чертежа.

Дальнейшее решение задач построения указанных планов рассмотрим на примере кривошипно-ползунного механизма (рис. 39), для которого заданы длины звеньев $l_{AB} = 0,05$ м, $l_{BC} = 0,2$ м и закон вращения входного звена 1: $\omega_1 = 80 \text{ сек}^{-1} = \text{const}$.

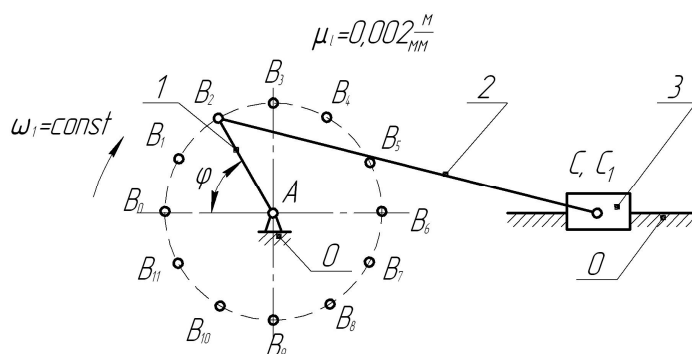


Рис. 39. План положения механизма

В результате проведения структурного исследования по методике п. 4.1 получим формулу строения исследуемого механизма:

$$\text{Мех-м II} = \text{м-м I} (1,0) \rightarrow \text{гр. II} (2,3).$$

Из этой формулы следует:

- так как исследуемый механизм имеет II класс, то для его кинематического исследования можно использовать излагаемые ниже методы планов;

- построение планов положений механизма и им соответствующих планов скоростей и ускорений необходимо начинать с механизмами I класса, а затем эти планы строить для звеньев группы (2,3).

4.2.1. Построение заданного плана положения механизма

Изображаем на чертеже кривошип 1 отрезком $AB = 25$ мм. Тогда масштаб построения планов положений механизма

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} = \frac{0,05}{25} = 0,002 \text{ м/мм.}$$

Используя этот масштаб, находим отрезок, изображающий длину шатуна 2 –

$$BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l} = \frac{0,2}{0,002} = 100 \text{ мм.}$$

Нулевым положением механизма считаем начало рабочего хода ползуна 3, когда он находится в крайнем левом положении, что будет иметь место, когда кривошип 1 расположится по горизонтали влево от точки A . Заданное положение механизма определяется углом φ_1 поворота кривошипа от нулевого его положения в направлении вращения. В рассматриваемом случае задаётся $\varphi_1 = 60^\circ$.

Выбрав на чертеже положение точки A – центра вращения кривошипа 1, размером $AB = 25$ мм вычерчиваем окружность – геометрическое место возможных положений точки B . Откладываем от нулевого положения кривошипа (AB_0 на рис. 39) угол $\varphi_1 = 60^\circ$, определяющий заданное положение этого звена. Строим AB_2 , определяющий это положение.

Радиусом $BC = 100$ мм из точки B_2 делаем засечку на прямой AC – геометрическим местом положений точки C . Получим точку C_2 с нахождением которой определяются положения шатуна $BC(B_2C_2)$ и ползуна 3 в заданном положении механизма. Ползун 3 изображаем прямоугольником с произвольными сторонами; длинная сторона его параллельна заштрихованной направляющей AC_2 . Аналогично строится план положения механизма для любого заданного положения его входного звена.

На рис. 40, а таким образом построим план положения механизма для угла кривошипа $\varphi_1 = 45^\circ$, отсчитываемого от горизонтали не слева (как на рис. 39), а справа от шарнира A . Там же показано положение центра масс S_2 звена 2, задаваемое либо отрезком $l_{BS_2} = 0,1$ м

$$(BS_2 = l_{BS_2} / \mu_l = 0,1 / 0,002 = 50 \text{ мм}),$$

либо отношением $BS_2 / BC = 0,5$, из которого $BS_2 = 0,5 \cdot BC = 0,5 \cdot 100 = 50$ мм.

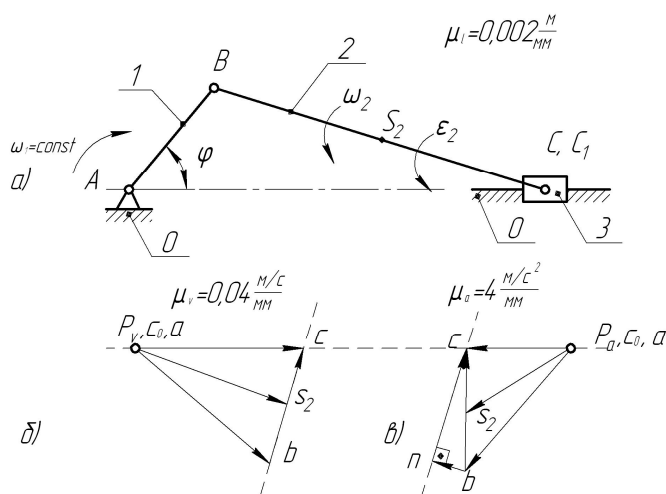


Рис. 40. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма компрессора:
а – план положения; б – план скоростей; в – план ускорений

4.2.2. Построение плана скоростей для заданного положения механизма

Строя сначала план скоростей механизма I класса, найдем скорость точки B кривошипа

$$v_B = \omega_1 \cdot l_{AB} = 80 \cdot 0,05 = 4 \text{ м/с},$$

направленную по перпендикуляру к AB в сторону ω_1 .

Приняв для изображения этой скорости на плане отрезок $\overline{p_v b} = 100 \text{ мм}$, определяем масштаб плана скоростей

$$\mu_v = \frac{v_B}{\overline{p_v b}} = \frac{4}{100} = 0,04 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

Выбрав на чертеже (рис. 40, б) произвольную точку p_v – полюс плана скоростей, – строим из неё вектор $\overline{P_v b} = 100 \text{ мм}$, в масштабе $\mu_v = 0,04 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$ представляющий величину и направление $\overline{v_B}$.

Скорость точки A кривошипа $v_A = 0$, поэтому точку a – конец вектора скорости этой точки – располагаем в полюсе P_v .

Далее строим план скоростей звеньев группы II (2,3), для чего используем систему векторных уравнений:

$$\begin{cases} \overline{v_C} = \overline{v_B} + \overline{v_{CB}}; \\ \overline{v} = \overline{v_{C_0}} + \overline{v_{CC_0}}. \end{cases}$$

Решая эту систему, из точки b плана скоростей строим линию действия $\overline{v_{CB}}$ – перпендикуляр к BC – положению звена 2 на рис. 40, а (эта линия действия представлена на рис. 40б пунктиром). Скорость точки C_0 , принадлежащей стойке, равна нулю, потому её помещаем в полюс P_v . Скорость точки C звена 3 относительно стойки направлена по горизонтали, поэтому из точки C_0 плана скоростей проводим горизонтальную прямую (представлена пунктиром)). Две пунктирные прямые пересекаются в точке c – конец вектора абсо-

лютой скорости точки. Изображаем вектор $\overline{P_v c}$ этой скорости сплошной линией и находим $\overline{v}_C = \overline{P_v c} \cdot \mu_v = 94,6 \cdot 0,04 = 3,78 \text{ м/с}$.

Изображаем сплошной линией вектор \overline{bc} и находим значения относительной скорости точек B и C звена 2: $\overline{v}_{CB} = \overline{bc} \cdot \mu_v = 75 \cdot 0,04 = 3 \text{ м/с}$.

Угловая скорость звена 2: $\omega_2 = V_{CB} / l_{BC} = 3 / 0,2 = 15 \text{ с}^{-1}$.

Определяя направление ω_2 , вектор \overline{bc} из плана скоростей (см. рис. 40, б) перенесём в точку C звена 2 (см. рис. 40, а) и направление поворота звена 2 относительно его точки B от действия этого вектора указывает направление ω_2 . Указывают это направление круговой стрелкой на звене 2 (рис. 40, а).

Построенный план скоростей механизма позволяет найти абсолютную скорость любой точки любого звена этого механизма. В частности, определяя скорость \overline{v}_{S_2} центра масс звена 2, используем пропорцию

$$\frac{BS_2}{BC} = \frac{\overline{bs_2}}{\overline{bc}}, \text{ откуда } \overline{bs_2} = \overline{bc} \frac{BS_2}{BC} = 70 \cdot 0,5 = 35 \text{ мм.}$$

На отрезке $\overline{bc} = 70 \text{ мм}$ плана скоростей откладываем $\overline{bs_2}$, полученную точку s_2 соединяем с полюсом P_v (рис. 40, б) и находим $\overline{v}_{S_2} = \overline{P_v s_2} \cdot \mu_v = 92 \cdot 0,04 = 3,68 \text{ м/с}$.

4.2.3. Построения плана ускорений для заданного положения механизма

Начиная с построения плана ускорений механизма I класса, найдём ускорение точки B кривошипа. Так как $\omega_1 = \text{const}$, эта точка будет иметь только нормальное ускорение, определяемое как

$$\overline{a}_B = \overline{a}_{AB}^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB} = 80^2 \cdot 0,05 = 320 \text{ м/с}^2$$

и направленное от точки B к точке A кривошипа.

Приняв для изображения этого ускорения на плане отрезок $\overline{P_a b} = 80 \text{ мм}$, определяем масштаб плана ускорений

$$\mu_a = \frac{a_B}{\overline{P_a b}} = \frac{320}{80} = 4 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Выбрав на чертеже (рис. 40, в) произвольную точку p_a – полюс плана ускорений – строим из неё вектор $\overline{P_a b} = 80 \text{ мм}$, в масшта-

бе $\mu_a = 4 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$ представляющий величину и направление $\overline{a_B}$. Ус-

корение точки A кривошипа $a_A = 0$, поэтому точка a – конец вектора абсолютного ускорения этой точки – располагаем в полюсе p_a .

Далее строим план ускорений звеньев группы II (2,3), для чего используем систему векторных уравнений:

$$\begin{cases} \overline{a_C} = \overline{a_B} + \overline{a_{CB}^n} + \overline{a_{CB}^t}; \\ \overline{a_C} = \overline{a_{C_0}} + \overline{a_{CC_0}}. \end{cases}$$

Строя правые части уравнений из полюса p_a , имеем:

– $\overline{a_B}$ изображается уже построенным вектором $\overline{P_a b}$;

– $\overline{a_{CB}^n}$ – нормальная составляющая ускорения относительно вращения точки C звена 2 относительно его точки B . По величине

$$a_{CB}^n = \omega_2^2 \cdot l_{BC} = 15^2 \cdot 0,2 = 45 \text{ мс}^{-2};$$

направлено это ускорение от точки C к точке B звена 2 и, в соответствии с первым уравнением системы, прикладывается к век-

тору $\overline{a_B}$. В масштабе $\mu_a = 4 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$ ускорение a_{CB}^n представляется

вектором $\overline{bn} = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a} = \frac{45}{4} = 11,25 \text{ мм}$, который и прикладываем на

рис. 40, в к вектору $\overline{P_a b}$, направленным от C к B ;

– $\overline{a_{CB}^\tau}$ – тангенциальная составляющая ускорения относительного вращения точки C звена 2 относительно точки B . Известна лишь линия действия этой составляющей – перпендикуляр к BC , которую и строим пунктиром из точки n плана ускорений (рис. 40в). Этим заканчивается анализ и построение слагаемых правой части первого уравнения решаемой системы векторных уравнений;

– $\overline{a_{C_0}} = 0$ – ускорение точки C_0 , принадлежащей стойке. Точку C_0 помещаем в полюс p_a ;

– $\overline{a_{CC_0}}$ – ускорение движения точки C ползуна 3 относительно стойки. Это ускорение известно лишь по линии действия – горизонтальная прямая, которую и строим пунктиром из точки C_0 плана ускорений (рис. 40, в). Пересечение двух пунктирных прямых определяет на плане ускорений (рис. 40, в) положение точки c – конца вектора абсолютного ускорения C механизма.

Построенный план ускорений механизма позволяет найти абсолютное ускорение любой точки любого звена механизма. В частности, определяя ускорение $\overline{aS_2}$ центра масс звена 2, используем пропорцию:

$$\frac{\overline{BS_2}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{bs_2}}{\overline{bc}},$$

откуда $\overline{bs_2} = \overline{bc} \cdot \frac{\overline{BS_2}}{\overline{BC}} = 55 \cdot 0,5 = 27,5$ мм.

На отрезке $\overline{bc} = 55$ мм плана ускорений откладываем $\overline{bs_2}$, полученную точку s_2 соединяем с полюсом P_a (рис. 40, в) и находим

$$\overline{a_{s_2}} = \overline{P_a s_2} \cdot \mu_a = 63,3 \cdot 4 = 253,2 \text{ мс}^{-2}.$$

Из выполненных построений плана ускорений механизма также находим:

– абсолютное ускорение точки C :

$$\overline{a_C} = \overline{P_a c} \cdot \mu_a = 55 \cdot 4 = 220 \text{ мс}^{-2};$$

– тангенциальная составляющая относительного ускорения вращения точки C относительно точки B :

$$\overline{a_{CB}^\tau} = \overline{nc} \cdot \mu_a = 53,3 \cdot 4 = 213,2 \text{ мс}^{-2};$$

– угловое ускорение звена 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^\tau}{l_{CB}} = \frac{\overline{nc} \cdot \mu_a}{l_{BC}} = \frac{65 \cdot 4}{0,2} = 1300 \text{ с}^{-2}.$$

Определяя направление ε_2 вектор \overline{nc} плана ускорений, изображающий $\overline{a_{CB}^\tau}$ переносим в точку C механизма (рис. 40, а) и направление поворота звена 2 вокруг точки B от действия этого вектора указывает направление ε_2 (на рис. 40а направление ε показано круговой стрелкой на звене 2).

4.3. Определение сил инерции в механизмах

Силы инерции материальных точек звена могут быть приведены к одной точке и, таким образом, представлены их главным вектором и главным моментом пар сил инерции.

Главный вектор сил инерции, называемый обычно *силой инерции звена*, равен

$$\overline{P}_n = -m\overline{a}_S,$$

где m – масса звена, кг; \overline{a}_S – ускорение центра S масс звена, м/сек².

Направление силы инерции \overline{P}_n противоположно направлению вектора \overline{a}_S ; она измеряется в ньютонах [Н].

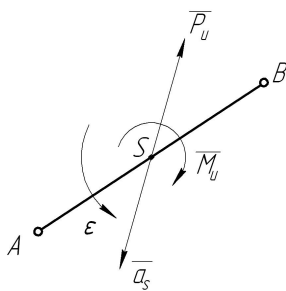


Рис.41 Инерционная нагрузка звена

Рассмотрим наиболее общий случай, когда звено совершает плоско-параллельное движение. При этом точкой приведения сил инерции звена целесообразно брать его центр масс S (рис. 41), так как упрощается выражение главного момента пары сил инерции (*инерционного момента*). Он определяется как

$$\overline{M}_H = -I_S \varepsilon,$$

где I_S – центральный момент инерции звена относительно оси, проходящей

через его центр масс S перпендикулярно плоскости его движения, $\text{кг}\cdot\text{м}^2$; $\bar{\varepsilon}$ – угловое ускорение звена, сек^{-2} .

Инерционный момент M_H измеряется в Нм . Плоскость, в которой он действует, параллельна плоскости движения звена; он направлен в сторону, противоположную направлению $\bar{\varepsilon}$ – углового ускорения звена (см. рис. 41). Таким образом, в указанных выше случаях *инерционная нагрузка* звена представляется инерционной силой \bar{P}_H , приложенной в точке S , и инерционным моментом \bar{M}_H .

Рассмотрим далее некоторые частные случаи

Поступательное движение звена. Инерционная нагрузка состоит только из инерционной силы $\bar{P}_H = -m\bar{a}$.

Вращение звена вокруг центра масс S с угловым ускорением $\bar{\varepsilon}$. Инерционная нагрузка состоит только из инерционного момента $\bar{M}_H = -I_S\bar{\varepsilon}$.

Вращение звена вокруг центра масс S при $\omega = \text{const}$, $\varepsilon = 0$. Инерционная нагрузка на звено отсутствует.

Пример определения сил инерции

Для кривошипно-ползунного механизма компрессора (рис. 42) найти инерционную нагрузку всех звеньев, если длины звеньев равны $l_{AB} = 0,05 \text{ м}$, $l_{BC} = 0,2 \text{ м}$; положения центров масс звеньев: $S_1 = A$, $l_{BS_2} = 0,1 \text{ м}$, массы звеньев: $m_1 = 0,2 \text{ кг}$, $m_2 = 0,5 \text{ кг}$, $m_3 = 0,4 \text{ кг}$; центральный момент инерции шатуна BC : $I_{S_2} = 0,0018 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Угловая скорость кривошипа AB постоянна и равна $\omega_1 = 80 \text{ сек}^{-1}$.

Задачу решить для положения механизма, когда угол $\varphi_1 = 45^\circ$.

Решение

1) Задаемся масштабом чертежа $\mu_l = 0,002 \text{ м/мм}$ и строим схему механизма (рис. 42, а).

2) Строим план скоростей механизма (рис. 42, б).

3) Строим план ускорений (рис. 42, в).

4) Определяем инерционную нагрузку для каждого звена механизма.

а) *Инерционные силы.* Сила инерции кривошипа равна $P_{n1} = 0$, так как $\bar{a}_{S1} = 0$. Сила инерции шатуна равна

$\bar{P}_{n2} = -m_2 \bar{a}_{S2} = -m_2 (\bar{P}_a S_2) \mu_a = 0,5 \cdot 63 \cdot 4 = 126 \text{ Н}$, приложена в центре его масс S_2 и по направлению противоположна вектору ускорения \bar{a}_{S2} этого звена (рис. 42, а). Сила инерции ползуна 3 равна $\bar{P}_{n3} = -m_3 \bar{a}_C = -m_3 (\bar{P}_a C) \mu_a = 0,4 \cdot 55 \cdot 4 = 88 \text{ Н}$, приложена в центре его масс (точке $C \equiv S_3$, рис. 42, а) и по направлению противоположна вектору \bar{a}_C ускорения этого центра.

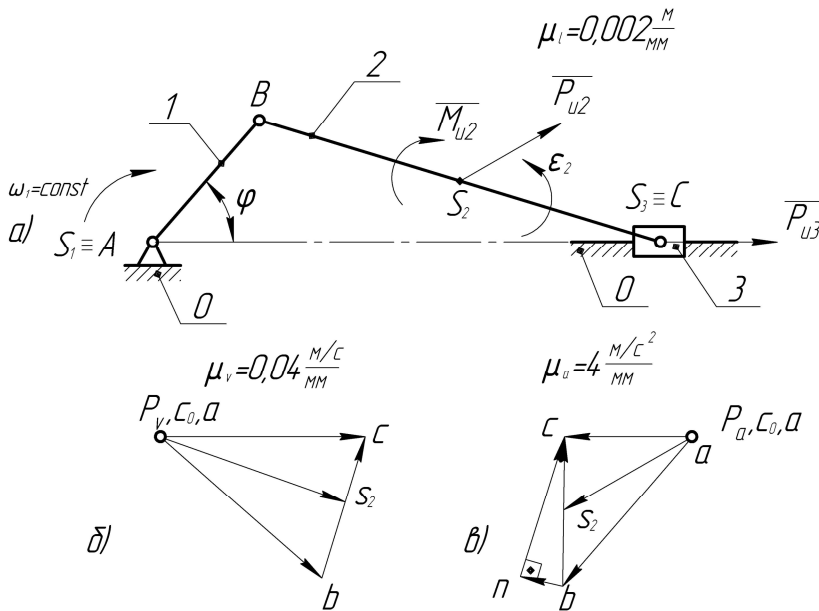


Рис. 42. Определение инерционной нагрузки звеньев кривошипно-ползунного механизма: а – план положения механизма; б – план скоростей; в – план ускорений

б) **Инерционные моменты.** Для кривошипа AB инерционный момент M_n равен $M_{nI}=0$, так как звено вращается равномерно ($\varepsilon_1=0$). Для шатуна BC инерционный момент M_{n2} найдем по формуле:

$$M_{n2} = I_{S2} \varepsilon_2 = I_{S2} \frac{\bar{a}_{CB}^t}{l_{BC}} = I_{S2} \frac{(nc) \mu_a}{l_{BC}} = 0,0018 \frac{65 \cdot 4}{0,2} = 2,34 \text{ Нм}.$$

Этот момент направлен противоположно угловому ускорению $\bar{\varepsilon}_2$ звена BC (см. рис. 42, а).

Для ползуна 3 инерционный момент M_{I3} равен $M_{n3} = 0$, так как звено движется поступательно ($\bar{\varepsilon}_3 = 0$).

4.4. Силовой расчет механизмов. Определение реакций в кинематических парах

В задачу силового расчета входит определение всех сил и моментов пар сил, которые приложены к каждому отдельному звену механизма. Эти силы или моменты надо знать, например, для расчета на прочность отдельных звеньев механизма или их частей (деталей).

Для того, чтобы механизм находился в равновесии под воздействием внешних сил, к одному из звеньев его должна быть приложена уравновешивающая сила \bar{P}_y или уравновешивающая пара сил, характеризуемая ее моментом \bar{M}_y – уравновешивающим моментом. Эту силу \bar{P}_y или момент \bar{M}_y обычно считают приложенными к ведущему звену, которое либо получает энергию, потребную для движения механизма, извне, как это имеет место у механизмов рабочих машин, либо отдает ее, как это имеет место у машин двигателей.

Если при силовом расчете механизма в число известных внешних сил не включена инерционная нагрузка на звенья, то силовой расчет механизма называется статическим. Если же при силовом расчете механизма в число известных внешних сил, приложенных к его звеньям, входит инерционная нагрузка на звенья, то силовой расчет механизма называется кинетостатическим. Для его проведения необходимо знать закон движения ведущего звена, чтобы иметь возможность предварительно определить инерционную нагрузку на звенья.

Силовой расчет включает:

- а) определение реакций в кинематических парах механизма;
- б) нахождения уравновешивающей силы \bar{P}_y или момента

\bar{M}_y . Он производится в следующей последовательности:

1. Определяются все внешние силы, приложенные к звеньям механизма, от действия которых требуется найти реакции в кинематических парах механизма.

2. Определяется точка приложения и направление (линия действия) уравновешивающего усилия \bar{P}_y или \bar{M}_y .

3. Проводится силовой расчет каждой группы Ассура в порядке, обратном формуле строения механизма.

4. В заключение производится силовой расчет ведущего звена.

Задачи обычно решают графоаналитическим методом, используя уравнения равновесия всей группы или отдельных ее звеньев в форме

$$\sum \bar{P} = 0, \quad \sum \bar{M} = 0.$$

В число сил и моментов, входящих в эти уравнения, включаются реакции и моменты реакций в кинематических парах группы.

На основании векторных уравнений первого вида строятся многоугольники сил, которые носят название *плана сил группы*, причем в первую очередь находятся реакции во внешних кинематических парах группы, а затем во внутренних парах по условиям равновесия звеньев группы, взятых порознь.

Для реакций, возникающих между элементами кинематических пар, приняты следующие обозначения: реакция со стороны звена k на звено l обозначается R_{kl} реакция же со стороны звена l на звено k соответственно обозначается R_{lk} . Очевидно, что

$$\bar{R}_{kl} = -\bar{R}_{lk}.$$

Реакция характеризуется *величиной (модулем), направлением и точкой приложения*.

Пренебрегая трением в кинематических парах, можно отметить следующее: во вращательной паре подлежат определению *величина и направление* реакции, так как ее точка приложения совпадает с осью вращения пары. В поступательной паре подлежат определению *величина и точка приложения* реакции, так как известно только то, что направление реакции в такой паре всегда перпендикулярно оси ее направляющей.

Пример силового расчета механизма

Провести силовой расчет заданного положения кривошипно-ползунного механизма компрессора (рис.43, а), если длины звеньев

равны $l_{AB} = 0,05 \text{ м}$, $l_{BC} = 0,2 \text{ м}$; положения центров масс звеньев: $S_1 = A$, $l_{BS2} = 0,1 \text{ м}$, массы звеньев: $m_1 = 0$, $m_2 = 0,5 \text{ кг}$, $m_3 = 0,40 \text{ кг}$; центральный момент инерции шатуна BC - $I_{S2} = 0,0018 \text{ кгм}^2$. Угловая скорость кривошипа AB постоянна и равна $\omega_1 = 80 \text{ сек}^{-1}$. Сила полезного сопротивления равна $P_C = 250 \text{ Н}$, она противоположна $\bar{v}_C = \bar{p}_C \cdot \mu_v$ (см. рис. 42, а, б) и проходит через точку C ; сила тяжести шатуна - $G_2 = m_2 g = 0,5 \cdot 10 = 5 \text{ н}$, сила тяжести ползуна - $G_3 = m_3 g = 0,4 \cdot 10 = 4 \text{ н}$. Уравновешивающая сила \bar{P}_y приложена перпендикулярно звену 1 в точке A .

Подлежит определению: реакция \bar{R}_{03} в поступательной кинематической паре C , которая направлена перпендикулярно линии хода ползуна; реакция \bar{R}_{23} во вращательной паре C ; реакция \bar{R}_{12} во вращательной паре B ; реакция \bar{R}_{01} во вращательной паре A и уравновешивающая сила \bar{P}_y , приложенная к звену 1.

Решение

1. Все внешние силы, действующие на звенья механизма, заданы, поэтому этот этап расчета выполнен.

2. Уравновешивающая сила P_y приложена перпендикулярно звену 1 в его точке B .

3. Механизм содержит только одну группу Л.В. Ассура, состоящую из звеньев 2 и 3. Эта группа относится ко второму классу второго вида.

Составляем уравнения равновесия группы. Разложим реакцию \bar{R}_{12} на две составляющих: \bar{R}_{12}^r , направленную перпендикулярно линии BC , и \bar{R}_{12}^n , направленную по линии BC . Тогда геометрическая сумма сил, приложенных к группе (рис. 43, б), равна

$$\bar{R}_{12}^r + \bar{R}_{12}^n + \bar{G}_2 + \bar{P}_{H2} + \bar{P}_{H3} + \bar{G}_3 + \bar{P}_C + \bar{R}_{03} = 0.$$

В качестве второго уравнения взято уравнение $\sum M_C(P_i) = 0$, которое, будучи развернутым, примет вид

$$\bar{R}_{12}^r l_{BC} + G_2 h_{G2} - P_{H2} h_{PH2} - M_{H2} = 0,$$

откуда

$$\bar{R}_{12}^{\tau} = \frac{-G_2 h_{G2} + P_{n2} h_{Pn2} + M_{n2}}{l_{BC}} = \frac{-5 \cdot 0,09 + 120 \cdot 0,07 + 2,84}{0,2} = 54 \text{ Н},$$

где $h_{G2} = 0,09 \text{ м}$ – плечо силы G_2 относительно точки C (найдено по чертежу); $h_{Pn2} = 0,07 \text{ м}$ – плечо силы P_{n2} относительно точки C (найдено по чертежу).

Строим план сил группы (рис. 43, в) в масштабе $\mu_P = 2 \text{ Н/мм}$.

Порядок построения векторной суммы, вообще говоря, безразличен, но применительно к данной группе Ассур можно рекомендовать следующий: проводим прямую, параллельную BC . Это будет линия действия силы \bar{R}_{12}^n .

Отложим от произвольной точки a , лежащей на этой прямой (рис. 43, в), силу \bar{R}_{12}^{τ} в виде отрезка

$$(ab) = \frac{P_{12}^{\tau}}{\mu_P} = \frac{54}{2} = 27 \text{ мм}, \text{ перпендикулярно прямой. От точки } b \text{ откла-}$$

$$\text{дываем силу } \bar{G}_2 \text{ в виде отрезка } (bc) = \frac{G_2}{\mu_P} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ мм}, \text{ далее от точ-}$$

$$\text{ки } c \text{ откладываем силу } \bar{P}_{n2} \text{ в виде отрезка } (cd) = \frac{P_{n2}}{\mu_P} = \frac{120}{2} = 60 \text{ мм.}$$

$$\text{Из точки } d \text{ откладываем силу } \bar{P}_{n3} \text{ в виде отрезка } (de) = \frac{P_{n3}}{\mu_P} = \frac{88}{2} =$$

$$44 \text{ мм}, \text{ далее от точки } e \text{ откладываем силу } \bar{G}_3 \text{ в виде отрезка}$$

$$(ef) = \frac{G_3}{\mu_P} = \frac{4}{2} = 2 \text{ мм. Силу } \bar{P}_C \text{ откладываем в виде отрезка}$$

$$(fg) = \frac{P_C}{\mu_P} = \frac{250}{2} = 125 \text{ мм. Силы откладываем в соответствии с их}$$

направлениями на чертеже группы. И, наконец, из точки g восстанавливаем перпендикуляр (линия действия силы \bar{R}_{03}) до пересечения с линией действия силы \bar{R}_{12}^{τ} . Полученная точка k – начало век-

тора \overline{R}_{12}^n . Отрезок (ka) в масштабе μ_P дает искомую реакцию \overline{R}_{12}^n , а отрезок (gk) в том же масштабе – реакцию \overline{R}_{03} , а отрезок (kb) дает искомую реакцию \overline{R}_{12} .

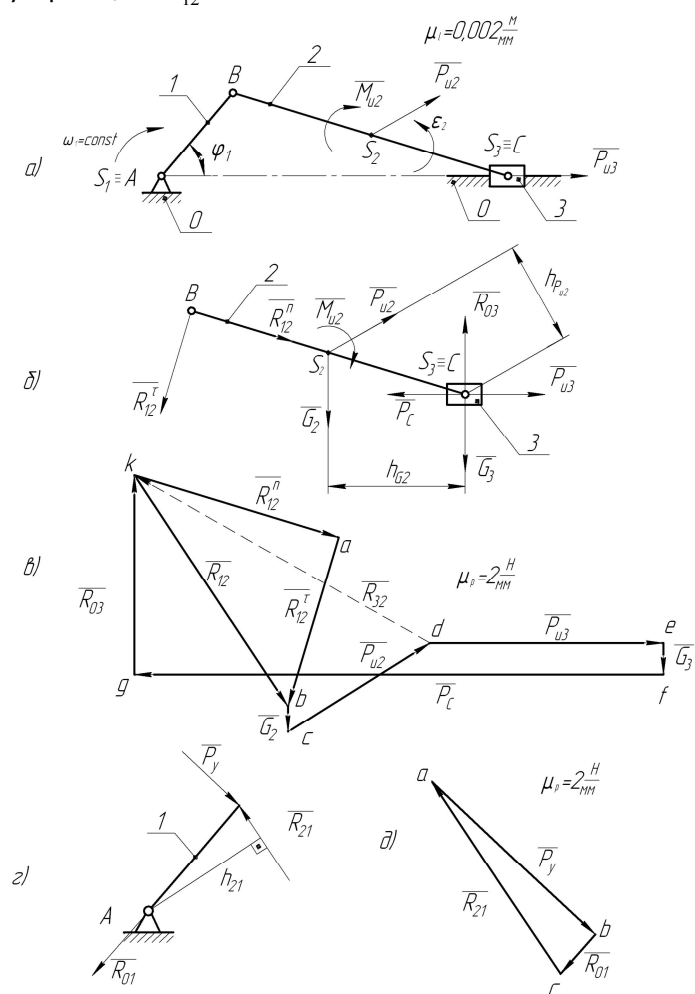


Рис.43. Силовой расчет кривошипно-ползунного механизма компрессора:
а – положение механизма; б – структурная группа с приложенными силами;

в – план сил

Для нахождения реакции \bar{R}_{32} напишем условие равновесия звена 2:

$$\bar{R}_{12} + \bar{G}_2 + \bar{P}_{H2} + \bar{R}_{32} = 0.$$

Из плана сил (рис. 43, *в*) видно, что отрезок (*dk*) в масштабе μ_P соответствует искомой реакции \bar{R}_{32} . Реакция \bar{R}_{03} должна проходить через точку С.

5) Силовой расчет ведущего звена 1 (рис.43, *г*). К звену 1 приложены: сила $\bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12}$ (ее величина определяется из плана сил (рис. 7, *в*) отрезком (*kb*) (сила $\bar{R}_{21} = (kb) \mu_P = 65 \cdot 2 = 130 \text{ Н}$), сила (реакция) \bar{R}_{01} , приложенная в точке *A* и уравнивающая сила P_Y , приложенная перпендикулярно звену 1 в точке *B*. Из равенства нулю суммы моментов относительно точки *A* сил, приложенных к звену 1, находим величину уравнивающей силы P_Y

$$- P_Y l_{AB} + R_{21} h_{21} = 0,$$

где h_{21} (плечо силы \bar{R}_{21}) находится по чертежу (рис. 43, *г*).

$$P_Y = \frac{R_{21} h_{21}}{l_{AB}} = \frac{130 \cdot 27}{28} = 125 \text{ Н}.$$

Условием равенства нулю векторной суммы сил, приложенных к звену 1, будет

$$\bar{R}_{21} + \bar{P}_Y + \bar{R}_{01} = 0.$$

Отсюда находим модуль реакции \bar{R}_{01} путем построения векторного треугольника сил (рис. 43, *д*): $R_{01} = (bc) \mu_P (\text{Н})$.

Определив величину ($M_y = P_Y \cdot l_{ab}$) момента уравнивающей пары сил, можно найти мощность двигателя, необходимую для привода машины. Для этого нужно знать угловую скорость кривошипа 1 (ω_1).

4.5. Кинематический анализ передач

Передаточным механизмом (передачей) называется механизм, преобразующий вращение одного звена, называемого ведущим, во вращение другого звена, называемого ведомым. К таким относятся зубчатые, фрикционные, цепные и другие типы передач.

Передаточным отношением такого механизма от ведущего звена k к ведомому звену l называется отношение угловой скорости ω_k звена k к угловой скорости ω_l звена l , т.е.

$$U_{kl} = \frac{\omega_k}{\omega_l}.$$

Численно передаточное отношение выражается через частоты n_k, n_l вращения ведущего и ведомого звеньев

$$U_{kl} = \pm \frac{n_k}{n_l},$$

а также через размеры этих звеньев.

Задачей кинематического анализа передач является нахождение передаточного отношения передачи через отношения размерных параметров ее звеньев.

Различают *одноступенчатые* передачи, такие, в которых имеются только два звена с неподвижными осями вращения, и *многоступенчатые*, в которых звеньев с неподвижными осями вращения больше двух. *Степенью* передаточного механизма называется передача вращения с одной неподвижной оси вращения на другую неподвижную ось вращения. В многоступенчатых механизмах каждая из ступеней может реализовываться парой зубчатых колес, находящихся в зацеплении.

Рассмотрим методы определения передаточных отношений сложных многоступенчатых зубчатых механизмов через заданные числа зубьев, предварительно условившись о правилах определения знака передаточного отношения.

В одноступенчатой зубчатой передаче (рис. 44) с внешним зацеплением зубчатые колеса вращаются в противоположных на-

правлениях, поэтому передаточное отношение такой передачи является отрицательным:

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = - \frac{n_1}{n_2} = - \frac{Z_2}{Z_1}.$$

В одноступенчатой передаче с внутренним зацеплением (рис. 45) зубчатые колеса вращаются в одну сторону, поэтому передаточное отношение положительно:

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{Z_2}{Z_1}.$$

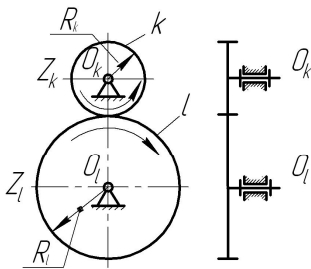


Рис. 44. Трехзвенная зубчатая передача с внешним зацеплением

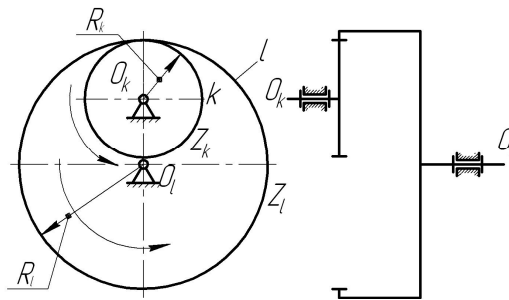


Рис. 45. Трехзвенная зубчатая передача с внутренним зацеплением колес

Рассмотрим многоступенчатое соединение зубчатых колес, в котором имеется k параллельных валов; на каждом из $(k - 2)$ промежуточных валов закреплено по два зубчатых колеса, зацепляющихся с колесами, закрепленными на предыдущем и последующем валах (рис. 46), число его ступеней — $(k - 1)$. Такое зацепление называется последовательным. Запишем для каждой из пар зубчатых колес ступеней передаточное отношение.

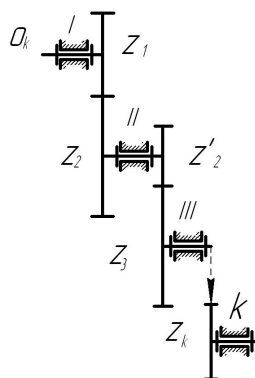


Рис. 46. Последовательное рядовое зацепление колес

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{Z_2}{Z_1}; U_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{Z_3}{Z_2'}, \dots, U_{K-1,K} = \frac{\omega_{K-1}}{\omega_K} = -\frac{Z_K}{Z_{K-1}'}$$

Перемножив почленно выражения передаточных отношений, получим

$$U_{12} U_{23} \dots U_{K-1,K} = \frac{\omega_1}{\omega_K} = \frac{Z_2 Z_3 \dots Z_K}{Z_1 Z_2' \dots Z_{K-1}'} (-1)^m,$$

где m – число внешних зацеплений колес передачи.

Передаточное отношение всей передачи, представленной на рис. 46, определится как

$$U_{1k} = \frac{\omega_1}{\omega_k} = U_{12} U_{23} \dots U_{k-1,k}.$$

Передаточное отношение последовательного зацепления, как это следует из формулы, равно произведению передаточных отношений всех его ступеней.

Если при подсчете U_{1k} получится отрицательным, то это означает, что ведомое колесо k вращается противоположно ведущему колесу 1.

Если на каждом из валов закреплено по одному колесу, входящему одновременно в зацепление с колесами на предыдущем и последующем валах, то такое зацепление называется рядовым (или паразитным рядом), а все промежуточные колеса называются паразитными (рис. 47). Полное передаточное отношение паразитного ряда можно получить, приняв $Z_2 = Z_2'$, $Z_3 = Z_3'$, $Z_4 = Z_4'$ и т.д.;

$$U_{1k} = \frac{\omega_1}{\omega_k} = \frac{Z_k}{Z_1} (-1)^m.$$

Последнее выражение показывает, что паразитные колеса на величину передаточного отношения не влияют, однако их включение может изменить знак передаточного отношения. Если число паразитных колес четное, то знак передаточного отношения такой же, как если бы колеса Z_1 и Z_2 зацеплялись непосредственно.

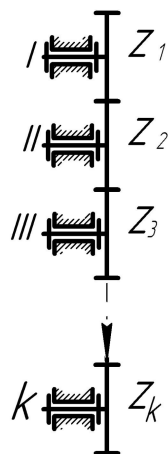


Рис. 47. Паразитный ряд

Нечетное число паразитных колес меняет знак передаточного числа на противоположный. Паразитные зубчатые колеса применяют в тех случаях, когда расстояние между ведущим и ведомым валами велико и непосредственно зацепляющиеся колеса увеличивают габаритные размеры механизма, или же в тех случаях, когда нужно соответственно изменить направление вращения ведомого вала.

4.6. Передача цилиндрическими зубчатыми колесами

Если на дисках имеются зубья определенного профиля, расположенные на равном расстоянии один от другого, то передача будет называться *зубчатой* (рис. 48). При вращении ведущего зубчатого колеса его зубья взаимодействуют с находящимися в контакте (зацеплении) зубьями ведомого колеса, в результате чего оно также начинает вращаться.

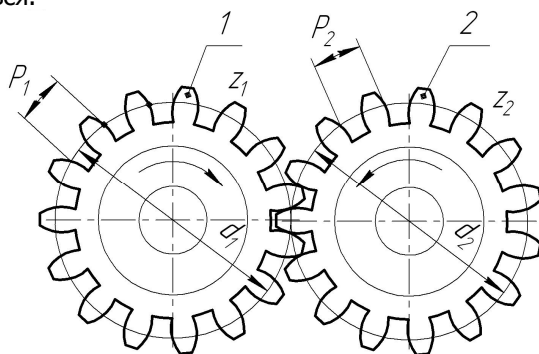


Рис. 48. Зубчатая цилиндрическая передача с внешним зацеплением

Наиболее распространены передачи с *эвольвентным профилем зуба*. Такой профиль позволяет зубьям при вращении колес обкатываться друг по другу, отчего зубчатая передача работает плавно, с небольшими потерями энергии на трение. При вращении зубчатых колес можно представить себе две касающиеся окружности 1 и 2 (см. рис. 48), которые катятся одна по другой без скольжения. Это воображаемые окружности d_1 и d_2 , – диаметры которых называют начальными окружностями. Зацепление зубчатых колес в передаче требует соблюдения основного условия: зуб одного колеса должен

Technical drawing of a gear pair showing geometric parameters. The drawing includes labels for pitch diameter (d_w), pressure angle (p), addendum (h_a), dedendum (h_f), and various diameters (d , d_1 , d_2 , d_1' , d_2'). It also includes Russian text labels: "окружность впадин" (pitch circle), "начальная окружность" (pitch circle), and "окружность вершин" (addendum circle).

93

начальной окружности, разделенной на число зубьев Z . На одном колесе эта зависимость выразится так:

$$p = \frac{\pi d_{w1}}{Z_1},$$

на другом

$$p = \frac{\pi d_{w2}}{Z_2}.$$

Отсюда

$$\frac{\pi d_{w1}}{Z_1} = \frac{\pi d_{w2}}{Z_2},$$

или передаточное отношение

$$U_{12} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}}.$$

4.7. Геометрические элементы зубчатого зацепления

Шаг зубчатой передачи по делительной окружности

$$p = \frac{\pi d}{Z},$$

где d – диаметр делительной окружности зубчатого колеса.

Отсюда:

для первого колеса $d_1 = \frac{pZ_1}{\pi};$

для второго $d_2 = \frac{pZ_2}{\pi}.$

В обоих выражениях есть одна и та же величина $\frac{p}{\pi}$. Поскольку эта величина не может быть подсчитана точно из-за наличия

иррационального числа π , более удобно взамен ее ввести величину, называемую *модулем зубчатого колеса*:

$$m = \frac{p}{\pi}.$$

Модуль является основной геометрической характеристикой зубчатого колеса. Величина модуля стандартизована, это облегчает изготовление и подбор зубчатых колес.

Расстояние от делительной окружности до вершины зуба называется головкой зуба h_a (см. рис. 49), а от делительной окружности до основания зуба – ножкой зуба h_f . При изготовлении колес стандартным зуборезным инструментом высота головки зуба получается равной m , а высота ножки $1,25 m$. Таким образом, полная высота зуба $h=2,25 m$. Для цилиндрического зубчатого колеса, у которого $d=d_w$, можно легко определить основные размеры:

диаметр делительной окружности $d=mz$,

диаметр окружности вершин $d_a=d+2 h_a=m(z+2)$,

диаметр окружности впадин $d_f=d-2 h_f=m(z-2,5)$.

Расстояние между центрами колес (межосевое расстояние)

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m(Z_1 + Z_2)}{2}.$$

Методы изготовления зубчатых колес тесно связаны с теорией зацепления. Зубчатые колеса с эвольвентным профилем изготавливают главным образом методом копирования и методом обкатки. При методе копирования профиль режущего инструмента должен соответствовать профилю впадины нарезаемого колеса. При методе обкатки (огибания) зуборезный инструмент и нарезаемое колесо как будто находятся в действительном зацеплении, то есть начальная окружность (начальная прямая) инструмента и начальная окружность колеса касаются друг друга и обкатывают одна другую без скольжения. Этим объясняется название метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов: учеб. пособие / А.И. Аркуша. – М.: Высшая школа, 2002.
2. Гольдин И.И. Основные сведения по технической механике / И.И. Гольдин. – М.: Высшая школа, 1980.
3. Лачуга Ю.Ф. Теория механизмов и машин / Ю.Ф. Лачуга и др. – М.: Изд-во «Колосс», 2006.
4. Марченко С.И. Теория механизмов и машин / С.И. Марченко. – Ростов н/Д: Феникс, 2003.
5. Мовнин М.С. Основы технической механики / М.С. Мовнин и др. – Л.: Изд. «Судостроение», 1970
6. Попов С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин: учеб. пособие / С.А. Попов, Г.А. Тимофеев. – М.: Высшая школа, 2003.
7. Сапрыкин В.Н. Техническая механика / В.Н. Сапрыкин. – Ростов н/Д: Феникс, 2003.
8. Фролов К.В. Теория механизмов и машин: учебник для вузов / К.В. Фролов и др. – М.: Высшая школа, 2003.