



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра «Физика»

## Практикум

Лабораторная работа № М10  
«Момент инерции твердых тел»  
по дисциплине

«Физика»

Авторы  
Жданова Т. П.,  
Кудря А. П.,  
Лемешко Г. Ф.,  
Попова И. Г.

Ростов-на-Дону, 2020

## Аннотация

Настоящая лабораторная работа посвящена изучению зависимости момента инерции твёрдых тел от расстояния до оси вращения.

Методические указания предназначены для организации самостоятельной работы студентов всех форм обучения, изучающих физику, при подготовке к лабораторному практикуму и рейтинговому контролю.

## Авторы

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Физика»

Жданова Т.П.,

ст. преподаватель кафедры «Физика»

Кудря А.П.,

к.ф.-м.н., профессор кафедры «Физика»

Лемешко Г.Ф.,

к.ф.-м.н., доцент кафедры «Физика»

Попова И.Г.



## Оглавление

<b>Краткая теория .....</b>	<b>4</b>
<b>Вывод рабочей формулы.....</b>	<b>6</b>
<b>Ход работы.....</b>	<b>7</b>
<b>Приложение 1 .....</b>	<b>11</b>
<b>Приложение 2.....</b>	<b>13</b>
<b>Контрольные вопросы .....</b>	<b>14</b>
<b>Рекомендуемая литература.....</b>	<b>14</b>

**Цель работы:** Определить момент инерции твердого тела правильной геометрической формы методом крутильных колебаний. Установить зависимость момента инерции двух грузиков от их расстояния до оси вращения.

**Оборудование:** В комплект экспериментальной установки входят: световой барьер со счетчиком, источник питания, стержень, прикрепленный к спиральной пружине, два грузика, масштабная линейка, динамометр.

## КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

**Моментом инерции материальной точки** называется скалярная величина, равная произведению массы точки на квадрат расстояния от точки до оси вращения:

$$I = m \cdot r^2.$$

**Моментом инерции твердого тела** называется сумма моментов инерции материальных точек, из которых состоит тело:

$$I = \sum_i m_i r_i^2.$$

**Момент инерции** – это мера инертности при вращательном движении (в этом состоит физический смысл момента инерции).

В случае непрерывного распределения масс момент инерции может быть определен интегралом:  $I = \int r^2 dm$ , где интегрирование ведется по всему объёму тела. Величина  $r$  – функция положения точки с координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Момент инерции зависит от массы тела и распределения массы относительно оси вращения.

### Теорема Штейнера

$$I = I_c + ma^2,$$

где  $I_c$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс;  $I$  – момент инерции этого тела относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии  $a$ ;  $m$  – масса тела.

**Моменты инерции** тел правильной геометрической формы относительно оси, проходящей через центр масс (тела считаются однородными;  $m$  – масса тела):

Тело	Момент инерции
Обруч или полый тонкостенный цилиндр радиусом $R$	$mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиусом $R$	$\frac{mR^2}{2}$
Прямой тонкий стержень длиной $l$	$\frac{ml^2}{12}$
Шар радиусом $R$	$\frac{2}{5}mR^2$

**Моментом силы относительно неподвижной точки** называется векторная физическая величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из данной точки в точку приложения силы, на силу  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Модуль момента силы относительно неподвижной оси:

$$M = Fr \sin \alpha = Fl,$$

где  $l = r \sin \alpha$  – плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения);  $\alpha$  – угол между направлениями силы и радиус-вектора. Направление момента силы совпадает с осью, относительно которой происходит вращение, и может быть определено по правилу буравчика.

**Основное уравнение динамики вращательного движения** твердого тела относительно неподвижной оси  $z$ :

$$M_z = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \varepsilon,$$

где  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$  – угловое ускорение;  $I_z$  – момент инерции тела

относительно оси  $z$ ,  $M_z$  – момент силы относительно оси  $z$ .

## ВЫВОД РАБОЧЕЙ ФОРМУЛЫ

Закрепим твердое тело на вращающийся вал и повернем его на угол  $\varphi \approx 30^\circ$ . Если систему предоставить самой себе, то возникнут свободные крутильные колебания под действием момента силы упругости спиральной пружины:

$$\vec{M}_{\text{упр}} = -G \cdot \vec{\varphi}, \quad (1)$$

где  $G$  - угловой коэффициент упругости спиральной пружины.

В реальных условиях маятник под действием моментов сил трения в подшипниках и сопротивления воздуха совершает затухающие колебания. Момент сил трения зависит от угловой скорости

$$\vec{M}_{\text{тр}} = -k \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad (2)$$

где  $k$  - коэффициент пропорциональности, зависящий от формы и размеров маятника и вязкости среды.

Суммарный момент сил:  $\vec{M} = \vec{M}_{\text{упр}} + \vec{M}_{\text{тр}}$ .

Основное уравнение динамики вращательного движения:

$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ , или с учетом уравнений (1) и (2), имеет вид

$$I \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2} = -k \frac{d\vec{\varphi}}{dt} - G \cdot \vec{\varphi}. \quad (3)$$

Разделив (3) на момент инерции и вводя коэффициент затухания  $\beta = k/(2I)$  и собственную частоту свободных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G}{I}}, \quad (4)$$

запишем дифференциальное уравнение свободных колебаний в виде:

$$\frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{d\vec{\varphi}}{dt} + \omega_0^2 \vec{\varphi} = 0. \quad (5)$$

Решением дифференциального уравнения (5) является зависимость углового перемещения от времени

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \cos \omega t, \quad (6)$$

где циклическая частота затухающих колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (7)$$

При слабом затухании  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ , а уравнения (6) и (7) примут вид:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega_0 t, \quad \omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (8)$$

где  $T$  - период свободных колебаний.

Совместное решение уравнений (4) и (8) позволяет определить момент инерции твердого тела по его периоду крутильных колебаний:

$$I = \frac{G \cdot T^2}{4\pi^2}, \quad (9)$$


где  $G$  - угловой коэффициент упругости спиральной пружины (указан на рабочем месте),  $T$  - период свободных колебаний.

## ХОД РАБОТЫ

**Задание 1.** *Определение момента инерции однородного стержня.*



1. Занесите значения массы  $m$ , длины стержня  $l$ , а также коэффициент упругости пружины  $G$  в таблицу 1 (указаны на рабочем месте).

2. Закрепите стержень на вращающемся валу (см. рис.).
3. Счетчик расположите так, чтобы при колебаниях стержня его конец пересекал световой барьер. Для светового барьера выберите режим . Отклоните стержень на угол  $\varphi \approx 30^\circ$ . Нажатием кнопки в верхнем левом углу включите световой барьер и освободите стержень. Измерьте период колебаний стержня 5 раз. Найдите среднее значение периода колебаний  $\langle T \rangle$ . Занесите данные в таблицу 1.
4. По среднему значению периода колебаний определите момент инерции стержня  $I_{\text{ЭКСП}}$  по формуле (9).
5. Найдите теоретическое значение момента инерции стержня

по формуле:

$$I_{\text{ТЕОР}} = \frac{ml^2}{12}.$$

6. Результаты измерений и вычислений занесите в таблицу 1.
7. Сравните результаты эксперимента с теоретическим значением момента инерции тела, оцените погрешность по формуле:

$$\delta = \frac{|I_{\text{ТЕОР}} - I_{\text{ЭКСП}}|}{I_{\text{ТЕОР}}}.$$

8. Выполните статистическую обработку прямых и косвенных измерений (Алгоритм обработки прямых и косвенных измерений приведен в Приложении 1).

Таблица 1

$m =$	$l =$					$G =$
X	1	2	3	4	5	$\langle T \rangle$
$T, \text{с}$						
$I_{\text{ЭКСП}} =$	$I_{\text{ТЕОР}} =$			$\delta =$		

**Задание 2.** *Определение зависимости моментов инерции двух грузиков от их расстояния до оси вращения.*

1. Закрепите на стержне два одинаковых грузика на одинаковом и минимальном расстоянии  $r$  от оси вращения.
2. Отклоните стержень на угол  $\varphi \approx 30^\circ$ . Нажатием кнопки в верхнем левом углу включите световой барьер и освободите



стержень. Измерьте период колебаний стержня 3 раза. Занесите данные в таблицу 2.

3. Повторите измерения для 5 различных расстояний  $r$  (по заданию преподавателя).

4. Для каждого периода колебаний определите момент инерции стержня с грузиками  $I$  по формуле (9).

5. Найдите среднее значение момента инерции стержня с грузиками  $\langle I \rangle$  для каждого  $r$ .

6. Найдите абсолютные погрешности по формулам

$$\Delta I_i = |\langle I \rangle - \Delta I_i|.$$

7. Найдите относительные погрешности по формуле

$$\delta I = \frac{\langle \Delta I \rangle}{\langle I \rangle} 100\% .$$

8. Для нахождения момента инерции двух грузиков относительно оси вращения необходимо вычесть из среднего значения момента инерции стержня с грузиками  $\langle I \rangle$  момент инерции однородного стержня  $I_{ЭКСП}$  из таблицы 1:

$$I_{ГР} = \langle I \rangle - I_{ЭКСП} .$$

9. Принимая грузики за материальные точки, по известной их массе рассчитайте для каждого расстояния  $r$  теоретическое значение момента инерции по формуле:

$$I_{ГР}^{ТЕОР} = 2m \cdot r^2 \quad (m = 0,215 \text{ кг}).$$

10. Результаты измерений и вычислений занесите в таблицу 2.

Таблица 2

$r$	№	$T$	$I$	$\Delta I$	$\delta I$	$I_{ГР}$	$I_{ГР}^{ТЕОР}$
$M$	пп	$c$	$кг \cdot м^2$	$кг \cdot м^2$	%	$кг \cdot м^2$	$кг \cdot м^2$
	1				X	X	X
	2						
	3						
	<ср>	X					
	1				X	X	X
	2						
	3						
	<ср>	X					
	1				X	X	X
	2						
	3						
	<ср>	X					
	1				X	X	X
	2						
	3						
	<ср>	X					
	1				X	X	X
	2						
	3						
	<ср>	X					

10. В одних координатных осях постройте графики зависимостей  $I_{ГР}(r)$  и  $I_{ГР}^{ТЕОР}(r)$ . Сравните результаты эксперимента с теоретическим значением момента инерции грузиков. Сделайте вывод.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Статистическая обработка прямых измерений.

(Выполняется только для задания 1)

1. Занесите измеренные значения периода колебаний  $T$  из таблицы 1 в таблицу 3.

2. Найдите абсолютные погрешности каждого измерения по формулам:  $\Delta T_1 = |\langle T \rangle - T_1|$ ;  $\Delta T_2 = |\langle T \rangle - T_2|$  и т.д.

3. Возведите в квадрат каждое значение  $\Delta T$ .

4. Вычислите стандартный доверительный интервал  $S_{n,T}$  по формуле:

$$S_{n,T} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta T_i)^2}{n(n-1)}}, \text{ где } n - \text{ число измерений.}$$

Занесите данные в таблицу 4.

5. Задайте доверительную вероятность  $\alpha$  по заданию преподавателя (обычно  $\alpha = 0,95$ ).

6. По таблице найдите коэффициент Стьюдента  $t(n, \alpha)$  для данного числа измерений  $n$  и вероятности  $\alpha$ .

7. Найдите  $\Delta T_{СЛ}$  по формуле:  $\Delta T_{СЛ} = t(\alpha, n) \cdot S_{n,T}$ .

8. С учетом приборной погрешности  $\Delta T_{ПР}$  рассчитайте величину доверительного интервала  $\Delta T_{ДОВ}$  по формуле:

$$\Delta T_{ДОВ} = \sqrt{(\Delta T_{СЛ})^2 + (\Delta T_{ПР})^2},$$

помня, что абсолютная погрешность округляется до первой значащей цифры.

9. Определите относительную погрешность  $\delta T$  по формуле:

$$\delta T = \frac{\Delta T_{ДОВ}}{\langle T \rangle} 100\% .$$

10. Окончательный результат представьте в виде:

$$T = \langle T \rangle \pm \Delta T_{ДОВ}, \text{ с .}$$

11. Рассчитайте относительную погрешность момента инерции по формуле

$$\delta I = \frac{\Delta G}{\langle G \rangle} + \frac{\Delta T_{\text{ДОВ}}}{\langle T \rangle},$$

где  $\Delta G = 0,002 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}$ .

Таблица 3

	1	2	3	4	5	$\langle T \rangle$
$T, \text{с}$						X
$\Delta T, \text{с}$						
$\Delta T^2, \text{с}^2$						

Таблица 4

$S_{n,T}$	$\alpha$	$t(n, \alpha)$	$\Delta T_{\text{СЛ}}$	$\Delta T_{\text{ПР}}$	$\Delta T_{\text{ДОВ}}$	$\delta T$
$\text{с}$	–	–	$\text{с}$	$\text{с}$	$\text{с}$	%
	0,95			0,002		

12. Рассчитайте абсолютную погрешность по формуле

$$\Delta I = I_{\text{ЭКСП}} \cdot \delta I.$$

13. Окончательный результат запишите в виде:

$$I = \langle I \rangle \pm \Delta I, \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Определение углового коэффициента упругости пружины.

### (Инструкция для инженера)

1. Закрепите стержень на вращающемся валу. Установите ноль на динамометре. Кольцо динамометра наденьте на стержень на расстоянии  $r$  от оси вращения (это плечо силы). Линейкой измерьте плечо силы, поверните стержень на угол  $\varphi$ . При измерении силы динамометр должен находиться под прямым углом к плечу рычага.

2. Измерьте силу при помощи динамометра для углов поворота стержня  $\pi, 3\pi/2, 2\pi, 5\pi/2, 3\pi, 7\pi/2$ . Исходя из требований к безопасности и устойчивости, не рекомендуется перегибать пружину на  $\pm 4\pi$ . Рассчитайте для каждого угла момент силы  $M = F \cdot r$ .

3. Занесите данные в таблицу 5, рассчитайте коэффициент упругости для каждого угла по формуле  $G = \frac{M}{\varphi}$  и найдите среднее значение  $\langle G \rangle$  или постройте график зависимости  $M(\varphi)$  и по тангенсу угла наклона найдите  $G$ .

Таблица 5

$\varphi, \text{рад}$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$	$5\pi/2$	$3\pi$	$7\pi/2$
$F, \text{Н}$						
$M, \text{Н} \cdot \text{м}$						
$G, \text{Н} \cdot \text{м} / \text{рад}$						

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Момент инерции материальной точки.
2. Момент инерции твёрдого тела. От чего он зависит?
3. Физический смысл момента инерции.
4. Основной закон динамики вращательного движения.
5. Теорема Штейнера.
6. Применение теоремы Штейнера.
7. Момент сил относительно точки.
8. Чем обусловлен момент сил трения в данной работе?
9. Работа при вращательном движении.
10. Кинетическая энергия при вращательном движении.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Трофимова Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимов. – М.: Высш. шк., 2015.
2. Справочное руководство по физике. Ч.1. Механика, молекулярная физика, электричество, магнетизм: учеб.-метод. пособие. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2008.