



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ

Кафедра «Автоматизация производственных процессов»

Методическое пособие


по дисциплине

«Синтез систем управления движением»

Авторы

Туркин И. А.,

Лапшин В. П.



Ростов-на-Дону, 2019

Аннотация

Практикум предназначен для студентов очной форм обучения направлений 27.04.04 и 15.03.04

Авторы



Доцент, к.т.н.,
ДГТУ
Туркин И.А.



Доцент, к.т.н.,
ДГТУ
Лапшин В.П.



Оглавление

1. **Создание проекта**.....Ошибка! Закладка не определена.
 2. **Установка и конфигурация сервопривода**..... Ошибка!
Закладка не определена.
 3. **Синхронизация с микроконтроллером и сервоприводом**Ошибка! Закладка не определена.
 4. **Запуск двигателя в тестовом режиме**. Ошибка! Закладка не определена.
- СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**.....Ошибка! Закладка не определена.

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании современных систем управления технологическими процессами и производствами необходимо учитывать высокие требования по качеству процессов, прорекающих в таких системах, и качеству выпускаемой продукции. Также добавляются требования по обеспечению определенных технических, временных и других нормативов и все это жестко ограничивается рамками инвестиций. Проектирование в этом случае сводится к решению задачи определения структуры и параметров системы управления, которые обеспечат решение всех вышеперечисленных задач наилучшим образом. В теории управления принято называть наилучшее решение оптимальным, а системы, реализующие такие решения, оптимальными системами управления.

В своей повседневной деятельности мы привыкли полагаться на цифры, которые позволяют дать количественный анализ всех событий и процессов сопровождающих нас. Так Антуан де Сент-Экзюпери сказал по этому поводу следующее: "Взрослые очень любят цифры... Когда говоришь взрослым: «Я видел красивый дом из розового кирпича, в окнах у него герань, а на крыше голуби» - они никак не могут представить себе этот дом. Им надо сказать: «Я видел дом за сто тысяч франков», - тогда они восклицают «Какая красота»". В теории оптимального управления также необходимо сначала сформулировать количественную задачу управления, а уже потом искать метод или способ, обеспечивающий ее наилучшее решение. При таком подходе наилучшее решение, как правило, доставляет минимум или максимум некоторой функции или функционала.

В математике решение задач на поиск минимумов или максимумов получило название выпуклый анализ, а сами задачи стали выпуклыми экстремальными задачами. Около трехсот лет назад выяснилось, что некоторые задачи естествознания, а именно, что многие законы природы, допускают вывод из так называемых «вариационных принципов», согласно которым истинное движение механической системы, света, электричества, жидкости, газа и т.п. можно выделить из произвольной совокупности допустимых движений тем, что они минимизируют или максимизируют некоторые величины.

В 20-м столетии потребности техники, в частности космической, выдвинули серию задач, которые также не поддавались вариационному исчислению. Для решения таких задач была разработана новая теория, получившая название теория оптимального

управления. Основной метод в теории оптимального управления был разработан в пятидесятые – шестидесятые годы советскими математиками Л.С. Понтрягиным и его учениками.

Для современных систем управления, функционирующих в условиях, изменяющихся во времени параметров самой системы управления и параметров воздействия окружающей среды, стало необходимо определять не только оптимальные управления, но и разрабатывать алгоритмы и законы позволяющие варьировать оптимальное управление в случаях таких изменений. Системы управления способные изменять закон управления в зависимости от изменяющихся параметров внешней среды либо параметров самой системы принято называть адаптивными системами. Адаптивные алгоритмы управления получили распространение сравнительно недавно, но на сегодняшний день разработка таких систем является наиболее перспективным направлением проектирования систем управления.

Руководство к практическим занятиям предназначено для подготовки бакалавров и магистрантов, проходящих подготовку по направлениям 27.03.04 и 27.04.04 «Управление в технических системах».

1 СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ КЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Задача №1

Определить методом классического вариационного исчисления кривую экстремаль $x^0(t)$, проходящую через заданные точки x_0 и x_1 в моменты времени t_0 и t_1 , на которой достигает экстремума функционал семейства оптимальной САУ.

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + \tau^2 \dot{x}^2) dt,$$

где τ - заданное число; t_0 – начало функционирования САУ; t_1 – конец функционирования САУ.

А л г о р и т м р е ш е н и я

1. Определение подинтегральной функции φ_0 функционала качества, непрерывно дифференцируемой по x и \dot{x} ;
2. Определение исходного уравнения Эйлера для определения экстремума функционала качества $x_0(t)$;
3. Подстановка подинтегральной функции в уравнение Эй-

лера;

4. Определения постоянных интегрирования для отыскания экстремали $x_0(t)$.

Решение задачи

1. поскольку $J = \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + \tau^2 \dot{x}^2) dt \Rightarrow \varphi_0 = x^2 + 2\tau^2 \dot{x}^2$

2. Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} = 0,$$

определяем

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} = 2\tau^2 \dot{x}$$

3. Уравнение Эйлера примет вид

$$2x - \frac{2\tau^2 \dot{x}}{\partial t} = 0$$

или

$$2x - 2\tau^2 \ddot{x} = 0$$

или

$$\ddot{x} - \frac{1}{\tau^2} x = 0$$

4. Решение уравнения

$$x(t) = c_1 e^{\frac{t}{\tau}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

5. Определим c_1 и c_2 из уравнений

$$x_0 = c_1 e^{\frac{t_0}{\tau}} + c_2 e^{-\frac{t_0}{\tau}}; \quad x_1 = c_1 e^{\frac{t_1}{\tau}} + c_2 e^{-\frac{t_1}{\tau}}$$

$$c_1 = \frac{x_0 e^{\frac{t_1}{\tau}} - x_1 e^{-\frac{t_0}{\tau}}}{\frac{(t_0 - t_1)}{\tau} e^{\frac{t_1}{\tau}} - e^{-\frac{t_0}{\tau}}}; \quad c_2 = \frac{x_1 e^{\frac{t_0}{\tau}} - x_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}}}{e^{\frac{t_0}{\tau}} - \frac{(t_0 - t_1)}{\tau} e^{-\frac{t_1}{\tau}}}$$

Задача №2

Требуется перевести объект из начальной точки $x(t_0) = x_0 = 2$ при $t_0 = 0$ в конечную точку $x(t_1) = x_1 = 4$ при $t_1 = 1$, таким образом,

чтобы доставить экстремум функционалу.

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (0,4x^2 + \tau^2 \dot{x}^2) dt, \text{ для } \tau=0,2$$

Уравнение Эйлера для экстремалей функционала

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} = 0,$$

где $\tilde{\varphi}_0 = (0,4x^2 + \tau^2 \dot{x}^2)$

Решая уравнение, получим

$$0,8x - \frac{d}{dt} \tau^2 \dot{x} = 0$$

Уравнение Эйлера для экстремалей функционала примет вид

$$0,8x - \tau^2 \ddot{x} = 0$$

Подставляем значение τ и переходим к операторной форме записи

$$0,8X(p) - 0,08X(p)p^2 = 0$$

Находим корни уравнения

$$X(p)(0,8 - 0,08p^2 = 0 \quad p = \pm\sqrt{10}$$

Получим общее решение уравнения

$$X(t) = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt}$$

Используя граничные условия определим значения постоянных c_1 и c_2 .

При $x_0=2, t_0=0, x_1=4, t_1=1$ получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ 4 = c_1 e^{\sqrt{10}} + c_2 e^{-\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 - c_2 \\ c_2 = \frac{(2e^{\sqrt{10}} - 4)e^{\sqrt{10}}}{e^{2\sqrt{10}} - 1} \end{cases}$$

Решая систему, получаем

$$c_1 = 0,17, c_2 = 1,83$$

Частное решение, проходящее через граничные точки x_0, x_1

и доставляющее экстремум функционалу примет вид

$$x(t) = 0,17e^{pt} + 1,83e^{-pt}.$$

Задача №3

Определить методом классического вариационного исчисления кривую экстремаль $x_0(t)$, проходящую через заданные точки x_0 и x_1 в моменты времени t_0 и t_1 , на которой достигается экстремум

функция качества оптимальной САУ $J = \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + \tau^4 \dot{x}^2) dt$

при граничных условиях $x(t_0)=x_0, \dot{x}(t_0) = x_0^{(1)}, x(t_1)=x_1, \dot{x}(t_1) = x_1^{(1)}$; где $\tau, x_0, x_0^{(1)}, x_1, x_1^{(1)}$ - заданные числа.

Алгоритм решения

1. Определение подинтегральной функции φ_0 функционала качества, непрерывно дифференцируемой по x и \dot{x} ;
2. Определение исходного уравнения Эйлера - Пуассона для определения экстремума функционала качества $x_0(t)$;
3. Подстановка подинтегральной функции в уравнение Эйлера - Пуассона с учетом преобразования Лапласа;
4. Определение функции $x(t)$ или экстремали функционала $J(x(t))$.

Решение задачи

$$1. \varphi_0 = (x^2 + \tau^4 \dot{x}^2)$$

$$2. \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \ddot{x}} = 0.$$

Найдем экстремали функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + \tau^4 \dot{x}^2) dt$$

при граничных условиях $x(t_0) = x_0; \dot{x}(t_0) = x_0^{(1)}; x(t_1) = x_1; \dot{x}(t_1) = x_1^{(1)}$.

Вычислим вначале

$$\partial \varphi_0 / \partial x = 2x; \partial \varphi_0 / \partial \dot{x} = 2\tau^4 \dot{x},$$

тогда уравнение Эйлера - Пуассона имеет вид

$$x + \tau^4 x^{IV} = 0.$$

Характеристический полином этого уравнения

$$d(s) = \tau^4 s^4 + 1 = (\tau^2 s^2 - \sqrt{2\tau}s + 1)(\tau^2 s^2 + \sqrt{2\tau}s + 1).$$

Его корни

$$s_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2\tau}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2\tau}}; s_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2\tau}}.$$

И, таким образом, экстремаль функционала имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{2\tau}(1+j)t}} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{2\tau}(1-j)t}} + c_3 e^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}(1+j)t}} + c_4 e^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}(1-j)t}}.$$

где $c_i (i = \overline{1,4})$ определяются из граничных условий $x(t_0) = x_0; \dot{x}(t_0) = x_0^{(1)}; x(t_1) = x_1; \dot{x}(t_1) = x_1^{(1)}$.

2 СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ КЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Задача №1

Найдем экстремали функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (qx^2 + u^2) dt \quad (q > 0)$$

на связях

$$\dot{x} = ax + bu$$

при граничных условиях

$$x(t_0) = x_0; x(t_1) = x_1.$$

В соответствии с методом решения задачи на условный экстремум составим вспомогательный функционал

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} [qx^2 + u^2 + \psi(t)(\dot{x} - ax - bu)] dt = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\varphi}_0(x, u, \psi) dt$$

$$\tilde{\varphi}_0 = qx^2 + u^2 + \psi(t)(\dot{x} - ax - bu)$$

Уравнение Эйлера (Эйлера – Лагранжа) для безусловных экстремалей этого функционала имеют вид

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{x}} = 0; \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{u}} = 0;$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}^0}{\partial \psi} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{\psi}} = 0.$$

Принимая во внимание, что $\partial \tilde{\varphi}_0 / \partial \dot{u} = \partial \tilde{\varphi}_0 / \partial \dot{\psi} = 0$, $\partial \tilde{\varphi}_0 / \partial \dot{x} = \psi$, запишем эти уравнения соответственно в виде

$$\psi = -a\psi + 2qx; 2u = b\psi; \dot{x} = ax + bu.$$

Исключая переменную u , получим систему из двух уравнений

$$\dot{x} = ax + \frac{1}{2}b^2\varphi; -a\varphi + 2qx.$$

Дифференцируя первое уравнение с учетом второго, имеем

$$\ddot{x} = a\dot{x} + \frac{1}{2}b^2(-a\varphi + 2qx).$$

Исключая из этого уравнения переменную

$$\psi = \frac{1}{0,5b^2}(\dot{x} - ax),$$

получим окончательно уравнение для экстремали $x(t)$:

$$\ddot{x} - (a^2 + qb^2)x = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt},$$

Используя граничные условия $x(t_0)=x_0$; $x(t_1)=x_1$, получим постоянные c_1 и c_2 .

Задача №2

Требуется перевести объект из начальной точки $x(t_0)=x_0=2$ при $t_0=0$ в конечную точку $x(t_1)=x_1=6$ при $t_1=2$, таким образом, чтобы доставить экстремум функционалу.

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}(qx^2 + u^2)dt, \quad q=3$$

Уравнение связей $\dot{x} = ax + bu$, при $a=2$, $b=1$.

В соответствии с методом решения задачи на условный экстремум составим вспомогательный функционал

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} [(3x^2 + u^2) + \psi(t)(\dot{x} - 2x - u)] dt = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\varphi}_0(x, u, \psi) dt$$

Уравнение Эйлера (Эйлера – Лагранжа) для безусловных экстремалей этого функционала имеют вид

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}^0}{\partial x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{x}} = 0;$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}^0}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{u}} = 0;$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}^0}{\partial \psi} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{\psi}} = 0.$$

Решая эти уравнения, получим

$$3x - 2\psi - \frac{d\psi}{dt} = 0$$

$$u - \psi = 0$$

$$\dot{x} - 2x - u = 0$$

Исключая переменную u , получим систему из двух уравнений

$$\dot{x} = 2x + \psi;$$

$$\dot{\psi} = 3x - 2\psi.$$

Дифференцируя первое уравнение с учетом второго, имеем

$$\ddot{x} = 2\dot{x} + (3x - 2\psi).$$

Исключая из этого уравнения переменную

$$\psi = \dot{x} - 2x,$$

получим окончательно уравнение для экстремали $x(t)$:

$$\ddot{x} - 7x = 0.$$

Запишем уравнение в операторной форме

$$X(p)p^2 - 7X(p) = 0$$

$$X(p)(p^2 - 7) = 0$$

Корни уравнения

$$p = \pm \sqrt{7}$$

Получим общее решение уравнения

$$x(t) = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt}$$

Используя граничные условия $x(t_0)=x_0$; $x(t_1)=x_1$, рассчитаем постоянные c_1 и c_2 .

$$\begin{cases} 2 = c_1 e^0 - c_2 e^0 \\ 6 = c_1 e^{2\sqrt{7}} + c_2 e^{-2\sqrt{7}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 - c_2 \\ c_2 = \frac{6 - c_1 e^{2\sqrt{7}}}{e^{-2\sqrt{7}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 - c_2 \\ c_2 = (6 - c_1 e^{2\sqrt{7}}) e^{2\sqrt{7}} \end{cases}$$

Решая систему, получаем

$$c_1 = 0,03, \quad c_2 = 1,97$$

Частное решение, проходящее через граничные точки x_0, x_1 и доставляющее экстремум функционалу примет вид

$$x(t) = 0,03e^{pt} + 1,97e^{-pt}.$$

3 СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Задача №1

Используя принцип максимума для объекта, описываемого уравнением $k\ddot{x} = u$, определить алгоритм оптимального уравнения, который обеспечивает перевод объекта из начального состояния $x(0)=0, \dot{x}(0)=0$ в конечное состояние $x(T)=1, \dot{x}(T)=0$ за минимальное время T . Определить число переключений, моменты переключений и построить кривые управления $u(t)$ и координат $x(t), \dot{x}(t)$. На управляющее воздействие наложено ограничение $|u| \leq U_{\max}$. Параметры системы: $k=2; U_{\max}=0,5$.

Решение

Для того, чтобы привести уравнение, описывающее объект к нормальному виду, введем фазовые координаты:

$$x = x_1; \quad \dot{x} = x_2. \quad (1)$$

Движение объекта с учетом (3.1) будет описываться системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1; \\ \dot{x}_2 &= ku = f_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Запишем гамильтониан

$$H = \sum_{i=1}^2 \psi_i f_i, \quad (3)$$

где ψ_i и f_i – координаты векторов $\vec{\psi}$ и \vec{f} . В дополнение к системе (2) составим систему уравнений для вспомогательных переменных ψ_i , где $i=1,2$, используя следующую зависимость:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{j=1}^2 \psi_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i=1,2.$$

Учитывая (3.2), получаем:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \psi_2 \right] = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \psi_2 \right] = -\psi_1. \quad (5)$$

Решение уравнений (4) и (5) имеет вид:

$$\psi_1 = c_1; \quad \psi_2 = c_2 - c_1 t, \quad (6)$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования.

Выражение для гамильтониана (3) принимает вид:

$$H = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 = c_1 x_2 + c_2 ku - c_1 kut. \quad (7)$$

В выражении (7) рассмотрим член, зависящий от управления:

$$H^* = (c_2 k - c_1 kt) \cdot u. \quad (8)$$

Так как при оптимальном управлении гамильтониан H принимает максимальное положительное значение, то слагаемое H^* должно быть всегда положительным и наибольшим.

Это будет, если алгоритм оптимального управления имеет вид:

$$u(t) = \sigma U_{\max}, \quad (9)$$

где

$$\sigma = \text{sign}(c_2k - c_1kt). \quad (10)$$

Оптимальное управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения $\pm U_{\text{макс}}$, и имеет не более двух интервалов постоянства, так как линейная функция $c_2k - c_1kt$ меняет знак не более одного раза.

Решение уравнения, описывающего заданный объект, на интервале управления при $u = +U_{\text{макс}}$ имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \int_0^t \frac{U_{\text{макс}}}{k} dt = \frac{U_{\text{макс}}}{k} t + c_3; \\ x(t) &= \int_0^t \left[c_3 + \frac{U_{\text{макс}}}{k} t \right] dt = c_4 + c_3 t + \frac{U_{\text{макс}}}{2k} t^2, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$0 \leq t \leq t_1,$$

где t_1 – продолжительность первого участка;

c_3, c_4 – постоянные интегрирования.

Используя начальные условия, определяем постоянные интегрирования:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(0) &= c_3 = 0; \\ x(0) &= c_4 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Для момента времени t_1 координаты \dot{x} и x соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t_1) &= \frac{U_{\text{макс}}}{k} t_1; \\ x(t_1) &= \frac{U_{\text{макс}}}{2k} t_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

На втором участке управления (после переключения управления) при $u = -U_{\text{макс}}$ координаты \dot{x} и x определяются следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \int_{t_1}^t -\frac{U_{\max}}{k} dt + \dot{x}(t_1) = \dot{x}(t_1) - \frac{U_{\max}}{k}(t - t_1); \\ x(t) &= \int_{t_1}^t \left[\dot{x}(t_1) - \frac{U_{\max}}{k}(t - t_1) \right] dt + x(t_1) = x(t_1) + \dot{x}(t_1)(t - t_1) - \frac{U_{\max}}{2k}(t - t_1)^2; \\ t_1 &\leq t \leq t_2, \quad t_2 = T. \end{aligned} \right\} (14)$$

Для момента времени $t_2 = T$ – прихода системы в конечное состояние $x(T) = 1$, $\dot{x}(T) = 0$ – справедливы следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t_2) &= \dot{x}(t_1) - \frac{U_{\max}}{k}(t_2 - t_1) = 0; \\ x(t_2) &= x(t_1) + \dot{x}(t_1)(t_2 - t_1) - \frac{U_{\max}}{2k}(t_2 - t_1)^2 = 1. \end{aligned} \right\} (15)$$

Подставляя численные значения параметров системы в выражения (3.11), (3.13) с учетом (3.12), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0,25t; \\ x(t) &= 0,125t^2; \\ 0 &\leq t \leq t_1; \end{aligned} \right\} (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t_1) &= 0,25t_1; \\ x(t_1) &= 0,125t_1^2. \end{aligned} \right\} (17)$$

После подстановки численных значений параметров в выражении (14), (15) с учетом (17) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0,5t_1 - 0,25t; \\ x(t) &= 0,05tt_1 - 0,25t_1^2 - 0,125t^2; \\ t_1 &\geq t \geq t_2; \end{aligned} \right\} (18)$$

$$\left. \begin{aligned} 2t_1 &= t_2; \\ 0,5t_1t_2 - 0,25t_1^2 - 0,125t_2^2 &= 1. \end{aligned} \right\} (19)$$

Из выражения (19) определяем моменты переключения:

$$t_1 = 2 \text{ сек}; \quad t_2 = 4 \text{ сек}.$$

Из выражения (18) для координат движения системы на втором участке управления с учетом значений моментов переключения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 1 - 0,25t; \\ x(t) &= -1 + t - 0,125t^2; \\ t_1 &\geq t \geq t_2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

На основании выражений (16) и (20) на рис. 1 представлены кривые оптимальных процессов в системе.

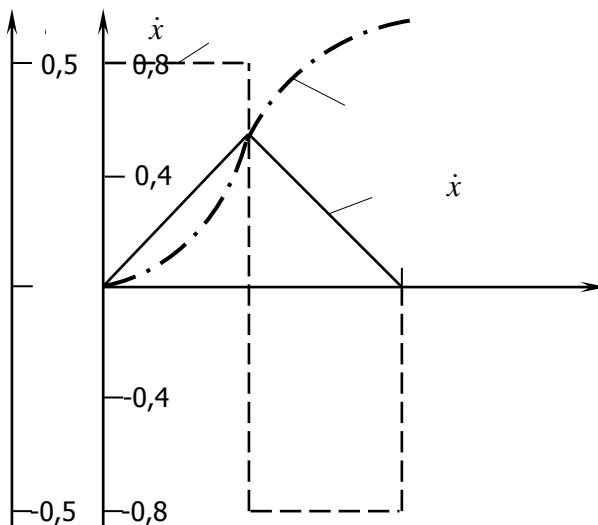


Рис. 1

4 СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача №1

Требуется определить уравнение Беллмана для оптимизации управления объектом

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u$$

Заданы: краевые условия $x(t_0), x(t_k)$;
ограничение на уравнение $u \in U_{доп}$;
критерий качества

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_k} (x_1^2 + u^2) dt = \min .$$

Решение

Уравнение Беллмана в общем виде представляется так

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \min_{u \in u_{\text{дон}}} \left[\varphi_0(x, u, t) + \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot \varphi_1(x, u, t) + \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot \varphi_2(x, u, t) \right] \quad (21)$$

Поскольку $v(x(t_0), t_0) = \min_{t_0}^{t_k} \int (x_1^2 + u^2) dt$ в явном виде не

зависит от времени t , то $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, а выражение (3.21) можно

записать так

$$\min_{u \in u_{\text{дон}}} \left[(x_1^2 + u^2) + \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot (-x_1 + u) \right] = 0 .$$

Минимизируем полученное выражение по управлению

$$\frac{d}{du} \left[(x_1^2 + u^2) + \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot (-x_1 + u) \right] = 2u + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \quad u^* = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} .$$

Подставляя полученное выражение для u^* , получаем уравнение Беллмана в виде

$$x_1^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial v}{\partial x_2} \left(-x_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) = 0;$$

$$x_1^2 + \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot x_2 - \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot x_1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 = 0.$$

Полученное дифференциальное уравнение является нелинейным в частных производных и его решение связано со значительными трудностями.

Задача №2

Объект описывается уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 u + x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u.$$

Ставится задача перевода объекта из начального $x(0)$ в конечное состояние $x(T)$ за время T при минимизации функционала качества

$$J(x, u) = \int_0^T (x_1^2 + u^2) dt.$$

Решение

Поставленным условиям соответствует уравнение Беллмана

$$0 = \min_{u \in V} \left[x_1^2 + u^2 + \frac{\partial v}{\partial x_1} (x_1 u + x_2) + \frac{\partial v}{\partial x_2} u \right].$$

Минимум правой этого уравнения обеспечивается следующим управлением:

$$u^* = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right).$$

С учетом полученного выражения для u^* уравнения Беллмана принимает вид

$$0 = -x_1^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 x_1^2 - \frac{\partial v}{\partial x_1} x_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} x_1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2.$$

Решение этого уравнения для соответствующих граничных условий позволяет определить функцию $v(x(t))$, а по ней найти оптимальное управление.

5 АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ

Задача №1

Уравнение процедуры аналитического конструирования регулятора гирорамы. Осуществим первый этап аналитического конструирования регулятора гирорамы.

Опишем вначале физическое содержание задачи стабилизации гирорамы, поскольку на примере решения этой задачи будут иллюстрироваться результаты, приведенные в этой и в следующих главах.

Рассмотрим трехстепенной гироскоп в кардановом подвесе (рис.2). Его уравнения имеют вид:

$$(J_{\mathcal{E}} + J_{B\mathcal{E}})\ddot{\beta} + (J_{\mathcal{E}} + J_{B\mathcal{E}} - J_B)\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + n_{\beta}\dot{\beta} + H\dot{\alpha} \cos \beta = M_x; \quad (22)$$

$$\left[(J_{\mathcal{E}} + J_{B\mathcal{E}}) \cos^2 \beta + J_B \sin^2 \beta + J_H \right] \ddot{\alpha} + 2(J_B - J_{\mathcal{E}} - J_{B\mathcal{E}})\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + n_{\alpha}\dot{\alpha} - H\dot{\beta} \cos \beta = -M_y; \quad (23)$$

где α – угол поворота наружной рамы относительно оси OY ; β – угол поворота внутреннего кольца карданова подвеса относительно оси OX (угол прецессии); J_H – момент инерции наружной рамы (кольца) относительно оси OY ; $J_{\mathcal{E}}$ – экваториальный момент инерции гироскопа; J_B, J_{Bx}, J_{By} – моменты инерции внутреннего кольца карданова подвеса относительно осей OZ, OX, OY соответственно, при этом $J_{Bx} = J_{By} = J_{Bz}$; H – кинетический момент гироскопа; M_x и M_y – моменты относительно осей OX и OY соответственно; n_{α}, n_{β} – коэффициенты демпфирования.

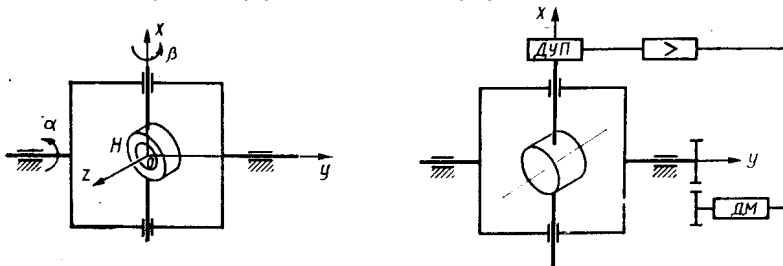


Рис. 2

Гироскоп в кардановом подвесе используется (если установить на оси OY датчик угла) для измерения углов поворота движущегося объекта (например, ракеты) относительно оси OY . Однако из-за вредных моментов по этой оси (трения, дисбаланса и т. п.) гироскоп начинает «прецессировать» относительно оси OX , т. е. ось OZ начинает поворачиваться в направлении оси OY , и гироскоп теряет свойство быть индикатором поворота летательного аппарата. Явление прецессии следует непосредственно из уравнения (23), если в нем пренебречь всеми слагаемыми в левой части, кроме последнего слагаемого (так как $H \gg J_{\mathcal{E}}, J_{Bz}, J_B, n_{\alpha}$). Прецессию можно измерить, установив на оси OX датчик угла. Усилим этот сигнал и подадим его на двигатель, который развивает полезный момент, равный и противоположный по знаку вредному. Тогда прецессия прекратится и гироскоп будет сохранять свои функции. Гироскоп в кардановом подвесе с системой стабилизации угла прецессии называется *гирорамой*. Ее схема приведена на рис. 2, где ДУП—датчик угла прецессии, ДМ—

датчик момента (двигатель).

Запишем уравнения (22), (23) в форме Коши.

Пренебрегая значениями $J_{\mathcal{E}}$, $J_{B\mathcal{E}}$, J_B по сравнению с J_H , полагая $M_x=0$ и вводя обозначения

$$x_1 = \beta / \beta_H; \quad x_2 = \dot{\beta} / \dot{\beta}_H; \quad x_3 = \dot{\alpha} / \dot{\alpha}'_H; \quad (\beta_H = 1 \text{ рад}; \quad \dot{\beta}_H = 1 \text{ рад/с}; \quad \dot{\alpha}'_H = 1 \text{ рад/с});$$

$$-\frac{J_{\mathcal{E}} + J_{B\mathcal{E}} - J_B}{J_{\mathcal{E}} + J_{B\mathcal{E}}} = R_2; \quad -\frac{H}{J_{\mathcal{E}} + J_{B\mathcal{E}}} = a_{23}; \quad -\frac{n\beta}{J_{\mathcal{E}} + J_{B\mathcal{E}}} = a_{22};$$

$$-\frac{(J_B - J_{\mathcal{E}} - J_{B\mathcal{E}})}{J_H} = R_3; \quad \frac{H}{J_H} = a_{32};$$

$$-\frac{n\alpha}{J_H} = a_{33}; \quad -\frac{M_y}{J_H} = b_{31}u + m_{31}f,$$

запишем (22), (23) в виде

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \cos x_1 + R_2 x_3^2 \sin x_1 \cos x_1; \quad (24)$$

$$\dot{x}_3 = a_{32}x_2 \cos x_1 + a_{33}x_3 + R_3 x_3 x_2 \sin x_1 + b_{31}u + m_{31}f. \quad (25)$$

Разлагая правые части этих уравнений в ряд Тейлора в окрестности точки $x_1=x_2=x_3=0$, получим уравнения первого приближения

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \dot{x}_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u + \psi_{31}f, \quad (26)$$

где u пропорционально моменту, развиваемому датчиком моментов, а f пропорционально вредному моменту по оси OY .

Полагая пока $f = 0$, будем искать управление

$$u = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3, \quad (27)$$

при котором на движениях гирорамы (возбужденных начальными отклонениями) минимизируется функционал

$$J = \int_0^{\infty} (q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + q_{33}x_3^2 + u^2) dt \quad (q_{ii} > 0; \quad i = 1, 2, 3). \quad (28)$$

Переходя к решению этой задачи, запишем уравнения $PA + A'P - PBB'P + Q = 0$; $C = -PB$ процедуры АКОР. Первое из этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} - \\
 & - \begin{vmatrix} p_{13} & b_{31} \\ p_{23} & b_{31} \\ p_{33} & b_{31} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_{13}b_{31} & p_{23}b_{31} & p_{33}b_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Это матричное уравнение можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{aligned}
 & -(p_{13}b_{31})^2 + q_{11} = 0; \\
 & p_{11} + p_{12}a_{22} + p_{13}a_{32} - (p_{13}b_{31})(p_{23}b_{31}) = 0; \\
 & p_{12}a_{23} + p_{13}a_{33} - (p_{13}b_{31})(p_{33}b_{31}) = 0; \\
 & 2p_{12} + 2p_{22}a_{22} + 2p_{23}a_{23} - (p_{23}b_{31})^2 + p_{22} = 0; \\
 & p_{22}a_{23} + p_{23}a_{33} - p_{13} + a_{22}p_{23} + a_{23}p_{33} - (p_{23}b_{31})(p_{33}b_{31}) = 0; \\
 & 2p_{23}a_{23} + 2p_{23}a_{33} - (p_{23}b_{31})^2 + q_{33} = 0.
 \end{aligned} \quad (30)$$

(Из-за симметричности матрицы A число этих уравнений не $n^2=9$, а $n(n+1)/2=6$.)

На основе уравнений $C = -PB$ получим

$$c_1 = -p_{13}b_{31}, \quad c_2 = -p_{23}b_{31}, \quad c_3 = -p_{33}b_{31}. \quad (31)$$

Таким образом, аналитическое конструирование регулятора гиросамолета (системы стабилизации гиросамолета) сводится к решению алгебраических уравнений (30) и нахождению искоемых параметров регулятора (28) по формулам (31).

Пусть заданы значения параметров гиросамолета (27) и функционала оптимизации (29):

$$\begin{aligned}
 & a_{22} = -300; \quad a_{23} = 10^3; \quad a_{32} = -3; \quad a_{33} = -1; \quad b_{31} = 10^{-3}; \\
 & q_{11} = 1,6 \cdot 10^{12}; \quad q_{22} = 3 \cdot 10^8; \quad q_{33} = 5 \cdot 10^9.
 \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя в правые части уравнений (3.30) вместо 0 соответствующие производные (так, в первом уравнении нужно подставить \dot{p}_{11} , во втором – \dot{p}_{12} , в третьем – \dot{p}_{13} и т.д.) и решая полученную систему из 6 дифференциальных уравнений с помощью метода Рунге-Кутты, получим:

$$\begin{aligned}
 & p_{11}^0 = 53,4 \cdot 10^9; \quad p_{12}^0 = 147 \cdot 10^6; \quad p_{13}^0 = 12,6 \cdot 10^8; \quad p_{22}^0 = 92 \cdot 10^4; \\
 & p_{23}^0 = 44 \cdot 10^5; \quad p_{33}^0 = 116 \cdot 10^6.
 \end{aligned} \quad (33)$$

Искомые параметры регулятора на основе чисел (3.33):

$$c_1 = -0,126 \cdot 10^7; \quad c_2 = 0,44 \cdot 10^4; \quad c_3 = -116 \cdot 10^3. \quad (34)$$

Вследствие чего получим:

$$u = -0,126 \cdot 10^7 x_1 + 0,44 \cdot 10^4 x_2 + -116 \cdot 10^3 x_3.$$

6 ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Задача №1

Рассмотрим объект управления с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{b_0}{p^2 + p_1 p + a_0}, \quad (35)$$

параметры $k_0 \omega_0 \alpha_1$ которой неизвестны и их требуется определить. Пусть для частот

$$\omega_1 = 10; \quad \omega_2 = 30 \quad (36)$$

определены экспериментально числа

$$U(\omega_1) = 10^{-3}; U(\omega_2) = -5,4 \cdot 10^{-4}; V(\omega_1) = -3 \cdot 10^{-3}; V(\omega_2) = -7 \cdot 10^{-4} \quad (37)$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае

$$c(\omega) = b_0; d(\omega) = 0; q(\omega) = a_0 - \omega^2; l(\omega) = a_1 \omega,$$

запишем систему

$$c(\omega_r) = q(\omega_r)U(\omega_r) - l(\omega_r)V(\omega_r) \quad (r = \overline{1, n})$$

$$d(\omega_r) = l(\omega_r)U(\omega_r) + q(\omega_r)V(\omega_r) \quad (r = \overline{1, n})$$

как

$$b_0 = (a_0 - \omega_1^2)U(\omega_1) - \alpha_1 \omega_1 V(\omega_1); b_0 = (a_0 - \omega_2^2)U(\omega_2) - \alpha_1 \omega_2 V(\omega_2) \quad (38)$$

$$0 = a_1 \omega_1 U(\omega_1) + (a_0 - \omega_1^2)V(\omega_1); 0 = a_1 \omega_2 U(\omega_2) + (a_0 - \omega_2^2)V(\omega_2) \quad (39)$$

Последние два уравнения не зависят от k_0 и при числовых значениях (3.36), (3.37) принимают вид

$$10^{-2} a_1 - 3 \cdot 10^{-3} a_0 = -0,3; -16,2 \cdot 10^{-3} a_1 - 7 \cdot 10^{-4} a_0 = -0,63.$$

Решая эти уравнения, получим

$$a_0 = 200; a_1 = 30. \quad (40)$$

Подставляя полученные значения в любое из уравнений (38), заключаем, что $b_0 = 1$.

7 ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Задача №1

На рис. 3 изображена линия связи с активным сопротивлением R и переменной нагрузкой R_H . Напряжение U , приложенное к линии, при изменении нагрузки не меняется. Параметры схемы: $R=10$ Ом, $U=400$ В, $R_H=2\div 20$ Ом.

Определить характеристику передачи энергии по линии при изменении полезной нагрузки, т.е. зависимость мощности, выделяемой в нагрузке, от изменения сопротивления нагрузки $P=f(R_H)$.

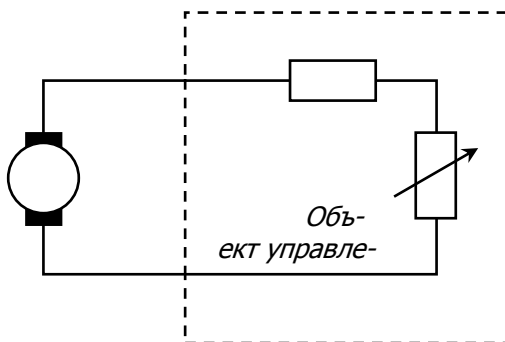


Рис. 3

Решение:

Мощность, выделяемая на нагрузке,

$$P = R_H I^2 = R_H \frac{U^2}{(R_H + R)^2}. \quad (41)$$

Определим, при каком значении R_H мощность имеет максимум, для чего возьмем частную производную по R_H от выражения (3.41) и приравняем нулю:

$$\frac{\partial P}{\partial R_H} = \frac{U^2 (R - R_H)}{(R + R_H)^2} = 0; \quad (42)$$

это справедливо в случае, если $R = R_H$.

Таким образом, мощность в нагрузке будет максимальной при равенстве сопротивлений нагрузки и линии.

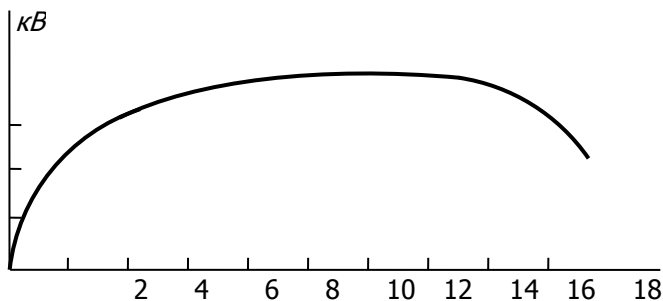


Рис. 4

Строим теперь зависимость $P=f(R_n)$, сводя расчеты в табл.1.

Т а б л и ц а 1

$R_n,$ $Ом$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$P,$ $кВт$	2,2	3,26	3,75	3,95	4	3,96	3,89	3,78	3,68	2,0

По данным табл.1 строим экстремальную характеристику, представленную на рис.4.

Задача №2

На рис. 5 представлена непрерывная экстремальная система, где *ИМ* – исполнительный механизм; *И* – объект регулирования; *РЛУ* – релейное логическое устройство. Объект управления безынерционный, а его статическая характеристика описывается уравнением $y = -kx^2 = -2x^2$.

Параметры системы: ν – скорость изменения входной величины; τ – время выхода в экстремальную область; $\Delta y=8\%$ – зона поиска на выходе; $A=4$ – начальное рассогласование; $T=2$ сек – период автоколебаний; P – потери на поиск.

Определить качественные показатели экстремальной системы.

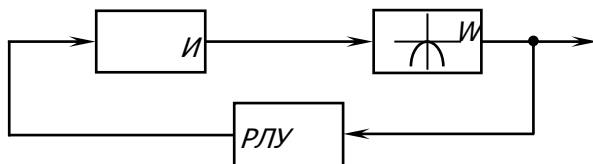


Рис. 5

Решение:

Так как управляющее воздействие изменяется с постоянной скоростью, то

$$y = -k(vt)^2. \quad (43)$$

Находим v , используя заданный период автоколебаний и зону поиска на выходе, учитывая при этом движение только до момента переключения:

$$-\Delta y = -kv^2 \left(\frac{T}{2} \right)^2, \quad (44)$$

откуда

$$v = \frac{2}{T} \sqrt{\frac{\Delta y}{k}}. \quad (45)$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$v = 1 \cdot \sqrt{\frac{0,08}{2}} = 0,2 \text{ 1/сек.}$$

Время выхода в экстремальную область определяется:

$$\tau = \frac{A}{v} (1 - \sqrt{\Delta y}), \quad (46)$$

или

$$\tau = \frac{4}{0,2} (1 - \sqrt{0,08}) = 14,4 \text{ сек.}$$

Потери на поиск

$$P = \frac{\Delta y}{3}; \quad (47)$$

или

$$P = \frac{0,08}{3} = 0,0266.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы.: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1976.
2. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования.: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1984.
3. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.Наука. 1975.
4. Гайдук А.Р. Оптимальные и адаптивные системы автоматического управления.: -М.: УМ и ИЦ «Учебная литература». 2006.
5. Ногин В.Д., Протоdjяконов И.О., Евлампиев И.И. Основы теории оптимизации.: Учеб. пособие для студентов втузов: – М.: Высш. школа, 1986.
6. Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1979.
7. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления./Под. ред. Бесекерского В.А. – М.: Наука, 1969.